J. PELLAUMAIL

Étude des oscillations d'un processus de sauts purs à l'aide d'un processus de diffusion

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 36-49
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A9_0>

DES OSCILLATIONS D'UN PROCESSUS DE SAUTS PURS
A L'AIDE D'UN PROCESSUS DE DIFFUSION

par J. PELLAUMAIL

cet exposé est de présenter, sans rentrer dans les
tions, un travail de M.F. Allain, travail montrant qu'on
cillations de certains processus Markoviens de sauts
processus de diffusion.

dopté est le suivant :

donne un exemple très simple de réseau fermé de files
lique, sur cet exemple, ce qui sera prouvé par la suite
al

indique brièvement quelques résultats antérieurs relatifs
ré

donne le théorème assurant la convergence en loi de
de Markov vers un processus de diffusion

précise quelque peu la "vitesse de convergence".

cet exposé est uniquement de présentation : on a donc
ie des résultats obtenus par M.F. Allain et que les
démonstrations. Les autres résultats et les preuves
re trouvés dans :

oximation, par un processus de diffusion, des oscil-
ons, autour d'une valeur moyenne, d'un processus de
ov de sauts pur.
ort n° 32 de l'I.R.I.S.A.
ratoire de probabilités - Université de Rennes
1 RENNES Cédex - B.P. 25A

B - UN EXEMPLE ELEMENTAIRE DE RESEAU FERME

B.1. - Hypothèses

On considère un parc comprenant n véhicules
de marche et j = (n-k) sont en réparation ; pour chaque
marche, la probabilité de tomber en panne suit une loi e
mètre a, les divers véhicules étant indépendants les uns
ailleurs, il y a m mécaniciens pour réparer les véhicule
véhicule est pris en charge par un mécanicien, le temps
une loi exponentielle de paramètre b, chaque mécanicien
seul véhicule à la fois et les divers mécaniciens étant
des autres. On pose c = m/n . Enfin, à l'instant t = O,
les véhicules sont en état de marche.

B.2. - Equations de Chapmann - Kolmogoroff

L'état du phénomène considéré à l'instant t
le nombre y_t de véhicules en état de marche à cet insta
est markovien.

Soit p(k,t) = probabilité $[y_t = k]$ = la prob
k véhicules en état de marche à l'instant t. Les équatio
Kolmogoroff s'écrivent :

$p'(k,t) = a.(k+1).p(k+1,t)+b.[m\wedge(n-k+1)]p(k-1,t)-a.k.p(k$

B.3. - Etude quand n tend vers l'infini

Si n est très grand, avec m = cn où c est un
en première approximation on peut étudier ce processus e
évolue de façon déterministe, c'est-à-dire en supposant
égal à sa valeur moyenne. Soit donc Y cette valeur moyenne
ximation, on doit avoir :

$$Y' = - aY + b\ [(n-Y)\wedge cn] \quad \text{et} \quad Y_o = n$$

, on a donc $X' = - aX + b\left[(1-X) \wedge c\right]$ et $X_o = 1$

ction X décroît donc exponentiellement jusqu'à la valeur

$$\left(\frac{b}{a+b} \wedge \frac{bc}{a} \right)$$

blème que l'on se pose est :

ns quelle mesure la valeur $Y_n = n\, X_t$ est une bonne de l'état du processus (y_t)

oi de la différence $(y_t - n\, X_t)$

emière question est donc du type "loi des grands nombres" xième question est du type "théorème central limite". deuxième question est plus précise que la première et ette deuxième question que nous allons étudier maintenant.

<u>- Approximation par un processus de diffusion</u>

$(.)$ et $G(.)$ les fonctions définies par

$$\wedge(1-u)\right] \quad ; \quad G(u) = au + b\left[c \wedge (1-u)\right]$$

^n_t le processus considéré précédemment quand la taille égale à n et soit Y^n_t la solution de l'**équation**

$$= - a\, Y^n + b\left[(n-Y^n) \wedge c\, n\right] \qquad \text{solution telle que } Y^n_o = n$$

éorème du paragraphe D donné plus loin montre que la suite

$_{>o}$ défini par

$$v^n_t = \frac{y^n_t - Y^n_t}{\sqrt{n}}$$

rs un processus de diffusion, solution de l'équation diffé-tique suivante :

$$v_t = \int_o^t \left[G(X_s)\right]^{1/2} d\,\beta_s + \int_o^t F'(X_s)\, v_s\, ds$$

vement brownien unidimensionnel.

Sans chercher à prouver ce résultat, on pe expliquer pourquoi il y a lieu de faire intervenir ce

Soit Δy^n la variation du processus y^n entr l'instant $(t+ \Delta t)$. Si Δt est "petit" et n "grand", au la loi de la variable aléatoire Δy^n est donnée par le

Δy^n	-1	0	
Probabilité	$a\, y^n\, \Delta t$	$-\{ay^n+b[m\wedge(n-y^n)]\}\Delta t$	$b[m\wedge(n$

L'espérance de l'accroissement $\Delta(y^n-Y^n)$ d $(t+ \Delta t)$ vaut $n\left[F(x^n) - F(X^n)\right]$ ce qui est peu diffé (puisque X^n et x^n sont peu différents de X) : l'espéra Δv^n de v^n entre t et $(t+ \Delta t)$ est donc peu différent de

De même, la variance de Δy^n est peu différ

$$a\, y^n + b\left[m \wedge (n-y^n)\right]$$

donc celle de Δv^n est peu différente de $a\, X = b\,[c \wedge (1$

Ceci explique que la suite $(v^n)_{n>o}$ conve de diffusion de variance locale $G(X)$ et d'espérance lo

ANTERIEURES

trouver, dans la littérature, divers exemples où on
pprocher la loi d'un phénomène aléatoire associé à un
purs par la loi d'un processus de diffusion. Indiquons
tudes effectuées dans ce sens.

Taille d'une file d'attente M/M/1

5], en 1971, P. Gaver et G.S. Shelder ont, notamment,
file d'attente M/M/1 correspondant à des programmes
ement par un ordinateur ; ils indiquent, en s'appuyant
ons heuristiques un peu différentes de celles qui pré-
le de cette file d'attente suit à peu près la loi d'un
ion (avec barrières) dont l'"espérance locale" (le rift)
(taille de la file d'attente) et la "variance locale"
aucune justification théorique n'est donnée.

cas M/M/1 a également été étudié (cf. [9]) par
là non plus, aucune justification théorique n'est donnée
validité de l'approximation par une diffusion sont testées
es.

Temps d'attente à une file d'attente M/G/1

8], en 1974, D.P. Kennedy a démontré, partiellement, que
ttente, à l'instant t, pour une file d'attente M/G/1,
loi d'un processus de diffusion, quand t tend vers l'infini ;
i W(t) est ce temps d'attente à l'instant t, la loi de
s la loi d'un processus de diffusion avec barrières.

Les travaux de Kurtz

connaissance, les seuls travaux où ce problème d'approxi-
e façon théorique satisfaisante sont dus à Kurtz [10] ,

Dans [10] , Kurtz répond à la première questi
(loi des grands nombres). Dans [11], il répond à la deuxiè
mulée en B-3. Cette formulation, qui consiste à approcher
de diffusion, la différence entre le processus et la solut
associée, semble beaucoup plus satisfaisante que la méthod
les exemples évoqués précédemment, méthode qui consiste à
lui-même par un processus de diffusion.

Enfin, dans [12], Kurtz généralise l'étude am
en approchant, par un processus de diffusion, des process
généraux.

Toutefois, il faut noter quelques lacunes dans
en [11] ; d'une part, il y a une inexactitude dans la preu
à la troisième ligne de la preuve, la majoration donnée n
assurer le fait que la suite $(P^n)_{n>0}$ est équi-tendue. De p
que l'"espérance locale limite F(x)", la "variance locale
atteintes uniformément, que F est lipschitzienne et que G
formément continue : en pratique, ces hypothèses ne sont p
faites (même dans le cas M/M/1 évoqué plus haut). Enfin,
indication sur la vitesse de convergence; plus précisément
à la question suivante : à partir de quelle valeur de n,
une diffusion est-elle valable ?.

Par ailleurs, dans [1] , on considère le cas
des "coefficients de normalisation" est une suite matricie
dans [11], on considère uniquement le cas où la suite $(\alpha$
de nombres réels.

APPROXIMATION

de l'étude effectuée par M.F. Allain dans [1] est donc
unes. Il faut noter que, pour lever l'hypothèse F(x)
l'hypothèse G(x) bornée et uniformément continue, il a
technique récente et très puissante : la technique des
ook - Varadhan (cf [16] pour l'article original ou [ ]
tématique).

me 1

$x^n)_{n>0}$ une suite de processus de Markov de sauts purs
. Pour tout n, soit (A^n, D^n) le générateur infinitésimal
n étant le domaine du générateur infinitésimal A^n.

out n, on notera $\mu_n(x,dy)$ la probabilité de transition
de transition" associés au processus x^n ; plus précisément,
ion réelle bornée mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, Φ appar-
:

$$. \int_{\mathbb{R}^d} [\Phi(y) - \Phi(x)] \cdot \mu_n(x,dy)$$

pose que, pour tout n et pour tout élément x de $\mathbb{R}^d$:

$$. \mu_n(x,dy)\Big] \cdot \Big[\int |y-x|^2 \cdot \mu_n(x,dy)\Big] < +\infty$$

out élément x de $\mathbb{R}^d$ et pour tout n, on définit les fonctions
G_n par :

$$= \lambda_n(x) \cdot \int (y-x) \cdot \mu_n(x,dy)$$
$$= \lambda_n(x) \cdot \int (y-x) \otimes (y-x) \cdot \mu_n(x,dy)$$

ment l'"espérance locale" et la "covariance locale".

On se donne :

1°/ Une suite $(\alpha_n)_{n>0}$ de matrices d x d inversibles tel

$$\lim_{n\to\infty} ||\alpha_n|| = +\infty$$

2°/ Une suite $(a_n)_{n>0}$ de nombres réels positifs telle q

$$\lim_{n\to\infty} . a_n = +\infty$$

3°/ Une suite $(\varepsilon_n)_{n>0}$ de nombres réels tendant en décro

4°/ Une fonction H définie et continue sur $\mathbb{R}^d$, à valeur
telle que, pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$:

$$\lim_{n\to\infty} \cdot \{\sup_{x\in K} ||\alpha_n \cdot G_n(x) \cdot \alpha_n^* - H(x)||\} = 0$$

5°/ Une constante K_2 telle que

$$\lambda_n(x) \cdot \int_{||\alpha_n \cdot (y-x)||>\varepsilon_n} ||\alpha_n \cdot (y-x)||^2 \mu_n(x,dy) \leqslant K_2 \; \frac{(1}{\;}$$

et $||\alpha_n \cdot G_n(x) \cdot \alpha_n^*|| \leqslant K_2 \cdot (1+||x||)$

6°/ Un élément x_0 de $\mathbb{R}^d$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \cdot E(||x_0^n - x_0||^2) = 0$$

7°/ Une fonction F définie et continument différentiable
dans $\mathbb{R}^d$ et telle que la suite $(F_n)_{n>0}$ converge ve
sur tout compact de $\mathbb{R}^d$.

On notera X(t) la solution de l'équation $\frac{dX}{dt} = F [X($

8°/ Une constante K_0 et une fonction B définie et contin
valeurs dans $\mathbb{R}^d$, telles que : $B(x) \leqslant K_0(1+||x||)$ e
C de $\mathbb{R}^d$, la suite de fonctions $\{\alpha_n [F_n(x) - F(x)]\}_n$
mément sur C vers la fonction B(x).

9°/ Un élément v_0 de $\mathbb{R}^d$ tel que :

$$\lim \cdot E\Big[||\alpha_n \cdot (x_0^n - x_0) - v_0||\Big] = 0$$

M telle que, pour tout n :

$$_t \; ||\alpha_n \; [F_n(x_s^n) - F(X_s)]|| \} \leq M$$

$R(x)$ telle que la suite $(\alpha_n F'(x) \alpha_n^{-1})_{n>0}$ converge sur tout compact de $\mathbb{R}^d$ vers la fonction $R(x)$, ce qui suppose, $_n$ inversible pour tout n.

$D, \mathcal{D}, (\mathcal{D}_t)_{t \in [0,T]}$ l'espace canonique associé aux sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, continus à droite et admet- gauche par trajectoires : plus précisément, D est l'en- tions c.a.d.ℓ.a.g. définies sur $[0,T]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, ie de Skorokhod (cf. [ ], par exemple), $\mathcal{D}$ et $(\mathcal{D}_t)_{t \in T}$ noniques.

$v^n)_{n>0}$ la suite de processus définie par

$$_n \cdot [x_t^n - X(t)]$$

out n, soit Q^n la loi de probabilité associée au processus l'espace canonique $(D, \mathcal{D}, (\mathcal{D}_t)_{t \in T})$

la suite $(Q^n)_{n>0}$ converge vers la loi Q du processus de on de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$] \}^{1/2} \; d\beta_s + \int_0^t [R(X(s)), v_s] \, ds + \int_0^t B \, [X(s)] \, ds$$

uve comprend essentiellement deux étapes :

la suite $(Q^n)_{n>0}$ est équi-tendue et que, si une sous-suite ite de $(Q^n)_{n>0}$ converge faiblement, sa limite faible $\hat{Q}$ $\hat{Q}(C) = 1$.

ela, on montre que :

$\exists \; \delta > 0$ et $\exists \; n_0$ tels que $\forall \; n \geq n_0$,

$$P \left\{ \left[\sup_{|t-s| \leq \delta} |v_t^n - v_s^n| \right] > \varepsilon \right\} \leq \eta$$

La preuve de cette démonstration, très tec notamment, des lemmes de majoration sur les martingale

2°/ On considère une sous-suite extraite de la suite (faiblement vers Q : pour alléger l'écriture, on su suite $(Q^n)_{n>0}$ elle-même qui converge.

On montre alors que, pour toute fonction ψ continue bornée et $\mathcal{D}_s$ - mesurable et pour toute fonct $^o_\infty(\mathbb{R}^d)$, on a, pour $s < t$:

$$E^Q \, [\psi \, . \, (\phi(v_t) - \phi(v_s)] = E^Q \left\{ \psi \; [\; \int_s^t \right.$$

où S_u est l'opérateur défini sur $C_\infty^o(\mathbb{R}^d)$ par

$$(S_u\phi)(z) = \frac{1}{2} < D^2\phi \; (z), \; H \, [X(u)] > + < Dg(z), \; R \, [X(u)]$$

(la preuve de cette égalité est très technique).

Ceci montre que $\phi(v_t) - \int_0^t (S\phi) \; (v_u) \, du$ e qui prouve le théorème annoncé compte-tenu du théorèm (cf. [16]).

VERGENCE

maintenant, donner un théorème qui permet d'évaluer
la suite $(Q^n)_{n > 0}$ converge vers Q.

me 2

$x^n)_{n > 0}$ une suite de processus satisfaisant aux hypo-
1 du paragraphe précédent. On suppose, de plus :

onction lipschitzienne ou que F est une fonction bornée
ipschitzienne

ns H et DF sont localement lipschitziennes

$X(t) = \exp.\{- \int_0^t R(\psi_s)\, ds\}$, la fonction
$H[X(s)] \cdot \overset{*}{\psi}(s)$ est strictement elliptique, c'est-à-dire
réel σ_o tel que, pour tout élément x de $\mathbb{R}^d$,

$x > \; \geq \sigma_o^2 \cdot ||x||^2$

n, la probabilité de transition μ^n est homogène dans l'espace
'il existe une loi de probabilité ν^n telle que
$\Gamma)$ pour tout borélien Γ de $\mathbb{R}^d$.

$= \operatorname{Sup}_{s \leq t} ||X_s||$; $M \doteq \operatorname{Sup}_{s \leq t} ||\psi(s)||$

$= \operatorname{Sup}_{s \in [0,t]} ||\sigma(s)||^2$ $\qquad M_1 = 1 + \operatorname{Sup}_{s \in [0,t]} ||H(X_s)||$

$= [M_1 \cdot M^3] \vee [M^2 \cdot (C^2 + 1)]$

er tel que, pour n ≥ k,

$\frac{1}{\;^2_n} \leq \frac{\sigma_o^2}{8K}$ et $\operatorname{Sup}_{s \in [0,t]} ||\alpha_n G_n(X_s)\, \alpha_n^*|| \leq M_1$

On introduit les notations suivantes :

$$p_1^n = M\left\{\operatorname{Sup}_{||x|| \leq C+1}\left\{||\alpha_n[F_n(x)-F(x)] - B(x)||\right\} + \operatorname{Sup}_t\left\{||\alpha_n [D\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{||\alpha_n||} \cdot K_o [K_1 + K(1+C) + 4(1+C^2+K_o)^{1/2}]\right\}\right\}$$

$$p_2^n = M^2 \cdot \operatorname{Sup}_{||x|| \leq C+1}\left\{||\alpha_n \cdot G_n(x) \cdot \alpha_n^* - H(x)|| + \frac{1}{||\alpha_n||}(5\,K\right.$$

$$\left. + \frac{3K_2}{a_n^2}(1 + K + C^2)\right\}$$

$$p_3^n = M^3 \cdot \operatorname{Sup}_{||x|| \leq C+1}\left\{||\alpha_n \cdot G_n(x) \cdot \alpha_n^* - H(x)|| + \frac{1}{||\alpha_n||} \cdot [5\,K\,K\right.$$

$$p_4^n = E\left(||\alpha_n(x_o^n - x_o) - v_o||\right)$$

On a alors, pour n ≥ k :

$$\operatorname{Sup}_{\ell \in \mathbb{R}^d} \operatorname{Sup}_{x \in \mathbb{R}} \left| \text{Probabilité } [< \ell, v_t^n > \leq x] - \text{Probabilit}\right.$$

$$\leq \frac{8}{\pi \sigma_o^2}\left\{p_1^n \left[\frac{\sigma_1^2 t}{2}\left(1 + \frac{\sigma_1^2\, t}{2}\right) + 1\right] + \frac{1}{2} p_2^n \sigma_1^2 \cdot t\right.$$
$$\left. + p_2^n \operatorname{Log}\left(\frac{\sigma_o^2}{8K\varepsilon_n}\right) + \frac{\sigma_o^2\, p_n^3}{8K}\right\}$$

$$+ 2\frac{K}{\pi} t\left[p_4^n \frac{\sqrt{\pi}}{t.\sigma_o} + \frac{2}{t.\sigma_o^2\, a_n^2} + \frac{2\sqrt{\pi}}{(t.\sigma_o^2)^{3/2}} \cdot \varepsilon_n\right] + \frac{24}{\pi\sigma_o}$$

Preuve

La preuve de ce résultat est évidemment très
Les idées essentielles sont les suivantes :

1°/ On majore les différences indiquées des fonctions de
l'aide d'une majoration des différences des fonction
en utilisant divers résultats donnés par Chung dans

2°/ On majore la différence des fonctions caractéristiqu
notamment, la formule de Ito.

BIBLIOGRAPHIE

Convergence de processus de Markov de sauts purs vers un un processus de diffusion. Séminaire de Rennes 1975

Convergence of probability measures. John Wiley and Sons, 1968

A course in probability theory. Academic Press 1974

AN HSING SU One dimensionnal migration models in population genetics theory. Preprint. Brown University Providence, Rhode Island 02912

Diffusion approximations and models for certain congestion problems. J. Appl. Prob. 5, 607-623 (1968)

SHEDLER Processor utilization in multiprogramming systems via Diffusion Approximations

On approximate computer system models. Journal of the Association for computing machinery. 22,2, 261-269, 1975

Limiting diffusions for the conditionned M/G/1 Queue. J. Appl. Prob. 11, 355-362, 1974

Applications of the diffusion approximation to queuing networks. Computer Sciences Mathematics, 1972

Solutions of ordinary differential equations as limits of pure jump Markov processes. J. Appl. Prob. 7, 49-58

Limit theorem for sequences of jump Markov processes approximating ordinary differential processes. J. Appl. Prob. 8, 344-356, 1971

Semigroups of conditionned shifts and approximation of Markov processes (to appear)

On the weak convergence of interpolated Markov chains to a diffusion. Ann. Prob. 2, 40-50, 1974

Applications of queuing theory. Chapman and Hall, London, 1971, chap. 6

[15] P. PRIOURET Processus de diffusion et équations d stochastiques. Ecole d'Eté de Probabi 1973. Springer Verlag

[16] D.W. STROOK and S.R.S. VARADHAN Diffusion processes w ficients. Comm. Pure. 479-530, 1967

[17] YAMADA and WATANABE On the uniqueness of solutions of sto equations. J. of Math. Kyoto Universi