P. Y. GLORENNEC

J. PELLAUMAIL

Sur une extension de la formule de Jackson donnant les probabilités stationnaires d'un réseau de files d'attente

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 24-28
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A7_0>

UNE EXTENSION DE LA FORMULE DE JACKSON DONNANT
BILITES STATIONNAIRES D'UN RESEAU DE FILES D'ATTENTE

par P.Y. GLORENNEC et J. PELLAUMAIL

[3], on donne une formule, désormais classique, relative tationnaires d'un réseau de files d'attente. Cette formule de plusieurs façons, notamment en [1], [2] et [4]. , sous certaines contraintes, une extension naturelle de encore valable pour un système où, partant d'une station lité pour un élément d'aller dans une autre station n'est mais dépend de l'état des stations à atteindre.

1 - POSITION DU PROBLEME

On considère le réseau ouvert suivant :

- le flot entrant dans le réseau est un fl paramètre λ ;
- chaque élément qui entre dans le réseau n stations.

La probabilité d'aller dans la station i d d'éléments présents dans l'ensemble des stations à l'in Plus précisément :

$X = (x_1, \dots x_n) \in N^n$ est l'état du résea

$p_i(X)$ = Probabilité d'aller dans la statio

On suppose évidemment que $\sum_{i=1}^{n} p_i(X) = 1$

- le temps de service dans la station i su tielle dont le taux $a_i(x_i)$ dépend du nombre d'éléments à l'instant considéré. Les $(a_i(x_i))_{1 \leq i \leq n}$ peuvent ne pas

On supposera $a_i(o) = 0$, $1 \leq i \leq n$.

Le problème est de déterminer les probabilités sta réseau. On notera $P(X)$ la probabilité stationnaire qu dans l'état X.

2 - EQUATIONS DONNANT LES PROBABILITES STATIONNAIRES

On note $X \pm e_i$ l'état du réseau après l'a d'un élément dans la station i.

Les fonctions P (X) doivent vérifier le s

$$(\mathfrak{R}) \left\{ \begin{aligned} P(X) \{ \lambda + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i) \} = & \sum_{i=1}^{n} P(X - e_i) \\ & + \sum_{i=1}^{n} P(X + e_i) \end{aligned} \right.$$

n est valable pour tout $X \in \mathbb{N}^n$ avec la convention

$$P(X - e_j) = 0 \quad \text{si} \quad x_j = 0.$$

ne s'impose aucune contrainte à priori sur les quantités
de $p_i(X)$ pour X "très grand" interviendront dans la
ur X "très petit". Autrement dit, P(.), solution générale
toutes les valeurs $p_i(X)$, pour tout X de $\mathbb{N}^n$.

solution générale ne semble pas simple à déterminer et,
st probablement peu exploitable .

ous proposons maintenant de montrer que, sous certaines
valeurs $(p_i(X))$, le système ($\mathcal{R}$) admet une solution
isation naturelle de la formule de Jackson.

DE LA FORMULE DE JACKSON

érons le système suivant :

$\cdot N^n$, $\forall j \in \{1,2,\dots n\}$

$_j)\cdot a_j(x_j+1) = \lambda . P(X) . p_i(X)$

ystème admet une solution, celle-ci est aussi une solu-
($\mathcal{R}$). On notera, de plus, que la solution générale
) peut être construite par récurrence. On vérifie alors
) admet une solution si et seulement si on a :

tout couple d'entiers (i,j) avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, et
tout élément X de $\mathcal{D}$, on a :

$$-e_i) . p_j(X-e_i-e_j) = p_j(X-e_j) . p_i(X-e_i-e_j)$$

ne $\mathcal{D}$ étant l'ensemble des états pour lesquels
u n'est pas saturé.

te une infinité de solutions de ($\mathcal{C}$) telles que les
ssociées prennent leurs valeurs dans le segment $[0,1]$.
ne de ces solutions correspond une loi de répartition
es n stations telle que la solution stationnaire associée
la forme ($\mathcal{U}$).

4 - UNE SOLUTION PARTICULIERE DE $\mathcal{C}$

Soit $Y = (y_1,\dots,y_n)$ un élément de N^n. On
correspond à l'état de saturation de réseau, c'est-à-dir
$a_i(y_i + k) = +\infty$ si $k \geq 1$; y_i représente donc le nombr
dans la station i.

On vérifie que ces conditions sur les a_j sont compatible

Soit $\mathcal{D}_Y$ le domaine défini par :

$$\mathcal{D}_Y = \{ X = (x_1,\dots,x_n) : \forall i, \ o \leq x_i \leq y_i \}$$

On constate que ($\mathcal{C}$) admet la solution particulière sui

($\mathcal{C}'$) Pour tout $X \in \mathcal{D}_Y$, et pour tout i, $1 \leq i \leq n$, p

De plus cette solution est telle que $\sum_{i=1}^{n} p_i(X) = 1$, pou
de $\mathcal{D}_Y$.

Notons que, dans ce cas,

$$p_i(x_1,\dots x_{i-1}, y_i, x_{i+1},\dots x_n) = 0$$

$$p_i(y_1,\dots y_{i-1}, x_i, y_{i+1},\dots y_n) = 1 \text{ si } x_i < y_i$$

Par conséquent, un élément arrivant dans le
en charge par celui-ci, sauf si toutes les stations du s

Si les probabilités de répartition entre st
données en $\mathcal{C}'$, la solution stationnaire associée satisf
précisément, dans ce cas, cette solution est de la forme

$$P(X) = C.\lambda^{|X|} . \prod_{i=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{x_i-1} p_i\left[X - \sum_{k=1}^{i-1} x_k e_k - \right.}{\prod_{j=1}^{x_i} a_i(j)}$$

où $\frac{1}{C} = \sum_{X \in \mathcal{D}_Y} P(X)$ et $|X| = \sum_{i=1}^{n} x_i$

B I B L I O G R A P H I E

NDY and MUNTZ *Open, Closed and Mixed networks of queues with different classes of customers.* Journal of the Association for Computing Machinery. Vol. 22, n° 2, April 1975.

Computationnal algorithms for closed queuing networks with exponentiel servers. (1973).

Job-shop like queuing systems. Management Science, vol. 10, 1963, pp. 131-142.

d REISER *Queuing networks with several closed subchains : theory and computationnal algorithms.* I.B.M. Thomas J. Watson Research Center (1974).