RAYMOND MARIE

Sur les réseaux de file d'attente fermés à services exponentiels

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 5-23
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A6_0>

SUR LES RESEAUX DE FILE D ATTENTE FERMES A SERVICES EXPONENTIELS

par Raymond MARIE

seau de file d'attente fermé à services exponentiels est
"structure" (matrice de passage $\mathcal{P} = (p_{ij})$), par la
ntes stations qui le composent (en général, la station i,
de s_i guichets de taux de service μ_i), par la disci-
ci : premier arrivé, premier servi) et par le nombre N
ontient. Ici, nous supposons que la matrice $\mathcal{P}$ ne dépend
éseau, c'est-à-dire que la probabilité p_{ij} d'aller dans
quittant la station i, ne dépend pas de l'état du réseau.

un tel réseau, l'expression des distributions asymptoti-
système a été mise en évidence par J.R. JACKSON [3] et
L [2] :

$$n_2, \ldots, n_M) = \frac{\prod_{j=1}^{j=M} \left(\frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)} \right)}{C(N)}$$

est une solution de :

$$X_j = \sum_{i=1}^{i=M} \mu_i \cdot X_i \, p_{ij}$$

(n_j) est définie de la façon suivante :

$) = 1$

$_j) = A_j(n_j - 1) \cdot \frac{\mu_j(n_j)}{\mu_j}$

$\mu_j(n_j)$ représentant le taux de sortie de la station j d

On voit que, si $\mu_j(n_j) = (s_j \wedge n_j) \cdot \mu_j$, o
d'une station à s_j guichets dont les temps de service μ_j
de n_j.

c) C(N) est la constante de normalisation :

$$C(N) = \sum_{\mathcal{X}_N} \prod_{j=1}^{j=M} \left(\frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)} \right)$$

où $\mathcal{X}_N = \{ (n_1, n_2, \ldots, n_M) \ / \ \forall j \in \{1,2,\ldots,M\}, \ 0 \leq n_j \leq$

Dans cette note, on donne d'une part, un alg
de la constante C(N) en fonction de la nature du réseau ;
met en évidence une décomposition du réseau en sous-résea
réseau étant caractérisé par le nombre de clients dans ce

Certains résultats sont applicables à des ré
à des réseaux comportants des stations à services non exp
ces stations : $s_j \geq N$.

B - CALCUL DE LA CONSTANTE DE NORMALISATION

B.1. Généralités

Posons $$P(v) = \prod_{j=1}^{j=M} \left(\frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)} \right)$$

où $v = \{n_1, n_2, \ldots, n_M\}$ représente un état du réseau

Décomposons le réseau R en sous-réseaux R_1,
états respectifs sont associés aux domaines $\mathcal{X}_{1,m_1}$, $\mathcal{X}_{2,m}$
Ces derniers étant définis de la façon suivante :

$\ldots,n_k) \ / \ \forall i \in \{a,b,\ldots,k\} \ , \ 0 \leq n_i \leq m_j \ , \ \sum_{\{a,b,..,k\}} n_i = m_j\}$

représente les indices des stations formant le sous-

ujours : $\sum_{j=1}^{j=P} m_j = N$

lant $v_j = \{n_a,n_b,\ldots,n_k\}$ l'état du sous-réseau R_j, et

$$(v_j) = \prod_{\{a,b,..,k\}} \left(\frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)}\right)$$

$$_{,m_j} = \sum_{v_j \in \mathcal{H}_{j,m_j}} P_j(v_j)$$

écrire :

$$\sum_{m_1=o}^{m_1=N} \alpha_{1,m_1} \left(\sum_{m_2=o}^{m_2=N-m_1} \alpha_{2,m_2} \left(\sum_{m_3=o}^{m_3=N-m_1-m_2} \alpha_{3,m_3} \quad \ldots\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left. {}^{p-2}_{-\ \Sigma\ m_i}_{\ 1} \left(\alpha_{p-1,m_{p-1}} \cdot \alpha_{p,m_p}\right)\right)\ldots\right)$$

avec $m_p = N - \sum_1^{p-1} m_i$

nissant une fonction $\beta_j(i)$ de la façon suivante :

$$\sum^{i}_{0} (\alpha_{p-1,m_{p-1}} \cdot \alpha_{p,m_p}) \qquad \text{avec } m_p = i - m_{p-1}$$

$$\alpha_{j,m_j} \cdot \beta_{j+1}(i-m_j) \qquad \text{pour} \begin{cases} i=0,1,\ldots,N \\ j=p-2,\ldots,1 \end{cases}$$

ent finalement :

$$N) = \sum_{v \in \mathcal{H}_N} P(v) = \beta_1(N)$$

L'intérêt de cette décomposition résidant es dans la rapidité du calcul numérique, il reste à connaîtr coupage optimal du réseau en sous-réseaux minimisant le n élémentaires sur ordinateur. Dans la mesure où le seul pr à calculer la constante C(N) (et sans plus d'informations stations formant le réseau), il est évident que la décomp correspond à la décomposition maximale. Il suffit pour s' remarquer que, si un sous-réseau était formé de plusieurs améliorerait son calcul en le décomposant selon la méthod réseau est donc décomposé en M sous-réseaux d'une seule s

Compte-tenu de ce résultat :

$$\alpha_{j,m_j} = \frac{X_j^{m_j}}{A_j(m_j)} = \frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)} \quad , \quad j = 1,2,\ldots$$

(et la fonction α_{j,m_j} ne sera plus utilisée par la suit

B.2. <u>Simplifications possibles du calcul sel</u>
<u>réseau</u>

B.2.1. Cas des réseaux comportant des s que le terme $\frac{A_j(n_j)}{A_j(n_j-1)}$ reste constant pour $n_j \geq s_j$.

En reprenant la fonction auxiliaire $\beta_j(i)$,

$$\beta_j(i) = \sum_{n_j=0}^{n_j=i} \frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)} \cdot \beta_{j+1}(i-n_j)$$

Soit $\frac{A_j(n_j)}{A_j(n_j-1)} = r_j$ pour $r_j \geq s_j$.

Pour $i > s_j$, on peut écrire :

$$\beta_j(i) = \frac{X_j}{r_j} \beta_j(i-1) + \sum_{k=0}^{k=s_j-1} \left[\frac{r_j A_j(k-1) - A_j(k)}{r_j\ A_j(k-1)}\right] \quad \frac{X_j^k}{A_j(k}$$

expression permet d'obtenir plus rapidement les valeurs
puisque la sommation se fait sur s_j et non plus sur i.

que, dans le cas fréquent où $\mu_j(n_j) = (s_j \wedge n_j)\, \mu_j$,
) s'écrit :

$$) + \sum_{k=o}^{k=s_j} \left[\frac{s_j - k}{s_j}\right] \frac{X_j^k}{k!} \; \beta_{j+1}(i-k)$$

si $s_j = 1$:

$$\beta_j(i-1) + \beta_{j+1}(i)$$

.2.2. Cas des réseaux comportant des stations telles que
rs soit supérieur au nombre de clients ($s_j \geqslant N$), et que

$_S$ le sous-réseau formé de toutes stations ainsi définies.

$$A_j(n_j) = n_j \,!$$

ons, pour simplifier l'écriture, que ces stations aient
2,..., M. On vérifie facilement en raisonnant par récur-

$$_{-1}(i) = \frac{1}{i!}\,(X_y + X_{y+1} + \dots + X_M)^i$$

gorithme de calcul

organigramme relatif au calcul de la constante est
on la nature du réseau, et aux initialisations près,
ns élémentaires varie de (2N+M) à $M(\frac{3}{2}\, N(N+1) + N)$.
quelques unités, ce nombre devient très faible par
d'un calcul élaboré selon un processus décrivant tous
du réseau (en effet, un tel calcul conduirait à un

nombre d'opérations élémentaires supérieur à (M+3) × C_{N+M}^{M-1}

On trouvera aussi dans l'annexe la comparaiso
avec les deux algorithmes donnés par Jeffrey - Buzen dans

C - PROBABILITES MARGINALES - RESEAUX REDUITS

C.1. Probabilité marginale

Pour simplifier l'écriture, cherchons la
de la probabilité de l'état de la station d'indice 1, ce q
à la généralité du calcul.

Par définition :

$$p_1(i) = \frac{\displaystyle\sum_{\mathcal{X} \text{ et } n_1=i} \; \prod_1^M \left(\frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)}\right)}{C(N)}$$

ce qui peut s'écrire :

$$p_1(i) = \frac{\dfrac{X_1^{\,i}}{A_1(i)} \displaystyle\sum_{\mathcal{X}'_{N-i}} \; \prod_2^M \left(\frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)}\right)}{\beta_1(N)}$$

où

$$\mathcal{X}'_{N-i} = \{ (n_2,n_3,\dots,n_M) \;/\; \forall j \in \{2,3,\dots,M\} \;,\; 0 \leqslant n_j \leqslant N$$

On obtient donc :

$$p_1(i) = \frac{\dfrac{X_1^{\,i}}{A_1(i)} \; \beta_2(N-i)}{\beta_1(N)}$$

seau réduit

ns le paragraphe (B.2.2.), on a montré que l'expression iaire $\beta_{y+1}(i)$ relative à un sous-réseau R_S particulier vait s'écrire directement :

$$) = \frac{1}{i!} (X_{y+1} + X_{y+2} + \ldots + X_M)$$

el sous-réseau R_S existe et si on ne s'intéresse pas s clients à l'intérieur de R_S, alors une simplification N) consiste à partir directement des valeurs $\beta_{y+1}(i)$. effet, l'étude des réseaux de file d'attente est géné- l'examen du comportement des stations où il se produit ène d'attente.

définir les probabilités "semi-marginales"

$$_y, N_z) = \sum_{\{n_{y+1}+n_{y+2}+..+n_M=N_z\}} P(n_1,n_2,\ldots,n_M)$$

t égale à :

$$_y, N_z) = \frac{\prod_1^y \left(\frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)}\right) \cdot \beta_{y+1}(N_z)}{\beta_1(N)}$$

rquant que si l'on remplace, dans le réseau d'origine, r une station Z (avec $s_z \geq N$) de paramètres :

$$\begin{cases} X_z = X_{y+1} + X_{y+2} + \ldots + X_M \\ A_z(N_z) = N_z\ ! \end{cases}$$

eau réseau admettant la même probabilité $P(n_1,n_2,\ldots,n_y,n_z)$ ue ce nouveau réseau constitue un réseau "réduit" du

re cette réduction, il suffit de calculer les $\{x_j\}$

solution de $\bar{x}\ \mathcal{P} = \bar{x}$ afin d'obtenir le paramètre :

$$X_z = \sum_{\{y+1,y+2,\ldots,M\}} \frac{x_j}{\mu_j}$$

C.3. Extension

Soit un réseau stochastique fermé où le à des lois exponentielles à l'exception de ceux d'un sous lequel les services obéissent à des lois non identifiées stations (de R'_S) sont telles que $s_j > N$. On ne connaît moyennes de service $\bar{u}_j$, $j = y+1,\ldots, M$.

On peut toujours (pour l'étude, en régime st un sous-réseau R_S équivalent à R'_S mais formé de stati vices obéissent à des lois exponentielles (même si cela c ment à une infinité de guichets) (cf. [1]). Les station telles que les moyennes des temps de services restent éga R'_S .

Les probabilités "semi-marginales" d'état P(seront encore données par la formule :

$$P(n_1,\ldots, n_y, N_z) = \frac{\prod_1^y \left(\frac{X_j^{n_j}}{A_j(n_j)}\right) \cdot \beta_{y+1}(N_z)}{\beta_1(N)}$$

où :

$$\beta_{y+1}(N_z) = \frac{(x_{y+1}\cdot\bar{u}_{y+1} + x_{y+2}\cdot\bar{u}_{y+2} + \ldots + x_M\cdot\bar{u}_M}{N_z!}$$

avec x_j solution de $\bar{x}\ \mathcal{P} = \bar{x}$

(1) *en toute rigueur, il faut supposer que les lois non ide transformées de Laplace rationnelles.*

position de R'_S en une infinité éventuelle de guichets elle n'a qu'un but de démonstration et ne pénalise en s effectués.

ssion précédente peut être étendue au cas d'un réseau imant le terme $\beta_1(N)$.

donc dire, pour l'étude en régime stationnaire, qu'un e partout exponentiel sauf pour les stations comportant serveurs ($s_j \geq N$ pour un réseau fermé) est "réductible" ponentiel "réduit".

SOUS-RESEAUX - REDUCTION GENERALISEE

lcul du taux de sortie d'un sous-réseau

nsidérons le réseau R décomposé en K sous-réseaux dis- $_K$ $(2 \leq K \leq M)$.

it R_J l'un quelconque de ces sous-réseaux. Son état cteur $\{v_J\}$.

sons $\nu_J(i)$ le taux de sortie du sous-réseau R_J sachant s dans ce sous-réseau et cherchons à calculer $\nu_J(i)$.

$_J(v)$ le taux de sortie de R_J lorsque R est dans l'état enu du paragraphe (B.1) :

$$\frac{\displaystyle\sum_{\substack{v \in \mathcal{X}_N \\ \text{et } N_j=i}} \rho_J(v) \cdot P(v)}{\displaystyle\sum_{\substack{v \in \mathcal{X}_N \\ \text{et } N_j=i}} P(v)}$$

$$\frac{\displaystyle\sum_{v_J \in \mathcal{X}_{J,i}} \rho_J(v_J) \cdot P_J(v_J)}{\displaystyle\sum_{v_J \in \mathcal{X}_{J,i}} P_J(v_J)}$$

$\{v_{\bar{J}}\}$ représentant l'état du réseau complémentaire à l

et compte tenu que :

$$\rho_J(v) = \rho_J(v_J) + \rho_J(v_{\bar{J}}) = \rho_J(v_J)$$

Désignons par $\{\ell\}$ l'ensemble des indices des stations d l'ensemble des indices d'un sous-réseau R_J .

On a :

$$\rho_J(v_J) = \sum_{j \in \{\ell_J\}} \mu_j(n_j) \left[\sum_{m \in \{\{\ell\}-\{\ell_J\}\}} P_{jm} \right]$$

ou
$$\rho_J(v_J) = \sum_{j \in \{\ell_J\}} \mu_j(n_j) \cdot q_{j\bar{J}}$$

si on pose
$$q_{j\bar{J}} = \sum_{m \in \{\{\ell\}-\{\ell_J\}\}} P_{jm}$$

Posons :

$$\theta_1^J(i) = \sum_{\mathcal{X}_{J,i}} \rho_J(v_J) \cdot P_J(v_J)$$

La quantité $\theta_1^J(i)$ s'obtient par récurrence

auxiliaires :

$$\begin{cases} \delta_j^J(i) \begin{cases} = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=i} q_{j\bar{J}} \cdot \mu_j(k) \cdot \frac{X_j^k}{A_j(k)} \; \beta_{j+1}^J(i-k) \\ = 0 \quad \text{sinon} \end{cases} \\ \theta_j^J(i) = \delta_j^J(i) + \displaystyle\sum_{o}^{i} \frac{X_j^k}{A_j(k)} \; \theta_{j+1}^J(i-k) \end{cases}$$

ayant pour conditions initiales, si la station d'indice station prise ne compte dans le calcul :

$$\theta_{r_J}^J(i) = \delta_{r_J}^J = \sum_{1}^{i} q_{r_J \bar{J}} \; \mu_{r_J}(k) \cdot \frac{X_{r_J}^k}{A_{r_J}(k)} \cdot \beta_{r_{J+1}}^J(i$$

du sous-réseau R_J est évidemment équivalente à la u réseau R.

nant une expression simplifiée de la fonction $\theta_1^J(i)$.

$$_j(n_j) = \frac{A_j(n_j)}{A_j(n_j-1)} \mu_j$$

$$i) = q_{j\bar{J}} \cdot x_j \sum_{1}^{i} \frac{X_j^{k-1}}{A_j(k-1)} \beta_{j+1}^J(i-k)$$

$$= q_{j\bar{J}} \cdot x_j \beta_j^J(i-1)$$

$$-1)_J(i) = \delta^J_{(r-1)_J} + \sum_{0}^{i} \frac{X^k_{(r-1)_J}}{A_{(r-1)_J}(k)} \times \delta^J_{r_J}(i-k)$$

$\forall j$ car $\mu_j(o) = 0 \quad \forall_j$

$$)_J(i) = \left(\sum_{(r-1)_J}^{r_J} x_j \, q_{j\bar{J}} \right) \cdot \beta^J_{(r-1)_J}(i-1)$$

sonnement par récurrence permet donc de montrer que :

$$= \left(\sum_{j=1_J}^{j=r_J} x_j \cdot q_{j\bar{J}} \right) \cdot \beta_1^J(i-1)$$

'expression très simple de $\nu_J(i)$:

$$= \frac{\theta_1^J(i)}{\beta_1^J(i)} = \left(\sum_{j=1_J}^{j=r_J} x_j \cdot q_{j\bar{J}} \right) \cdot \frac{\beta_1^J(i-1)}{\beta_1^J(i)}$$

fions l'écriture en écrivant :

$$\nu_J(i) = \alpha_J \frac{\beta_1^J(i-1)}{\beta_1^J(i)}$$

Le terme α_J représente (à 1 facteur mult le vecteur $\{x\}$ n'a pas été normalisé) le flux sortant il est donc égal au flux entrant dans R_J .

D.2. Probabilités d'état d'un réseau en for de ses sous-réseaux

Compte tenu du paragraphe précédent, n tenant énoncer le théorème suivant :

Théorème D.2.

Soit un réseau d'attente à lois exponentiel en un ensemble dijoint de sous-réseaux $R_A, R_B, \ldots, R_K$. *S nombre de client dans le sous-réseau* R_J, *les probabilit naires sont données par :*

1°) si le réseau est fermé

$$P(N_A, N_B, \ldots, N_K) = \frac{\prod_{\{A,B,\ldots,K\}} \frac{\alpha_J^{N_J}}{\Gamma_J(N_J)}}{\sum_{\{N_A+N_B+\ldots+N_K=N\}} \prod_{\{A,B,\ldots,K\}} \frac{\alpha_J^{N_J}}{\Gamma_J(N_J)}}$$

2°) si le réseau est ouvert :

$$P(N_A, N_B, \ldots, N_K) = \prod_{\{A,B,\ldots,K\}} \left(\frac{\alpha_J^{N_J}}{\Gamma_J(N_J)} \right)$$

avec $\Gamma_J(N_J)$ *telle que :*

$$\begin{cases} \Gamma_J(0) = 1 \\ \Gamma_J(N_J) = \Gamma_J(N_J-1) \cdot \nu_J(N_J) \end{cases}$$

et $\quad \alpha_J = \sum_{1_J}^{r_J} x_j \cdot q_{j\bar{J}}$

représentant le flux entrant dans le sou

$$\prod_{1}^{i} \nu_J(j) = \alpha_j^i \frac{\beta_1^J(o) \, . \, \beta_1^J(1) \dots \beta_1^J(i-1)}{\beta_1^J(1) \, . \, \beta_1^J(2) \dots \beta_1^J(i)}$$

$$\alpha_J^i \times \frac{\beta_1^J(o)}{\beta_1^J(i)}$$

$$\frac{\alpha_J^i}{\beta_1^J(i)} \qquad \text{car} \quad \beta_1^J(o) = 1$$

$$\frac{N_J \quad J}{(N_J)} = \beta_1^J(N_J)$$

rer le théorème dans le cas d'un réseau ouvert revient
qu'on a bien :

$$,\dots,N_K) = \beta_1^A(N_A) \, . \, \beta_1^B(N_B) \dots \beta_1^K(N_K)$$

immédiatement de la formule des produits.

rmé il faut montrer que :

$$\dots,N_K) = \frac{\beta_1^A(N_A) \, . \, \beta_1^B(N_B) \dots \beta_1^K(N_K)}{\sum_{N_A+N_B+\dots+N_K=N} \beta_1^A(N_A) . \beta_1^B(N_B) \dots \beta_1^K(N_K)}$$

compte tenu de la démonstration relative au réseau
ue :

$$_{K}=N\}} \beta_1^A(N_A) \cdot \beta_1^B(N_B) \dots \beta_1^K(N_K) = \beta_1(N)$$

<u>Remarque</u> : Dans la formule qui précède, on suppose fi
du réseau R par la connaissance de la matrice $\mathcal{P}$
permet de changer les valeurs des paramètres de se
sous-réseaux sans remettre en cause les fonctions
sous-réseaux, celle-ci appelle des précisions quan
de "structure" possibles.

Considérons dans ce sens un sous-réseau R
à un flot d'arrivée constant λ_o. En régime permane
vée sur chacune des stations sont déterminés par :

$$\lambda_j = \sum_{i \in \{\{\ell_J\},o\}} \lambda_i P_{ij} \qquad j=0, \{\ell$$

λ_o étant connu à priori, il existe une sol

$$\lambda_j = \omega_j \, . \, \lambda_o \quad .$$

D'après le calcul de $\nu_J(i)$, on peut dire
indépendant de λ_o. (α_J. $\beta_1^J(i-1)$ et $\beta_1^J(i)$ sont prop

Reconsidérant le sous-réseau R_J inclus
définissons comme vecteur d'entrée dans R_J le vect
composante a pour valeur :

$$\nu_{J_k} = \sum_{i \notin \{\ell_J\}} x_i P_{ik}$$

On voit que la fonction $\Gamma_J(i)$ est conserv
sion de R_J dans R si le vecteur d'entrée est propo
Ω_J de composante ω_j définie ci-dessus.

Dans ce cas, il n'est pas utile de calcule
de la solution $\overline{x} . \mathcal{P} = \overline{x}$; il suffit de détermin
considérant la matrice de transition élaborée à l'
de transition de sous-réseau à sous-réseau.

A N N E X E

alcul de la constante :

station de service à loi exponentielle et de discipline
premier servi" peut être classée dans l'un des 4 types

, $\mu_j(n_j) = n_j \cdot \mu_j$)

, $\mu_j(n_j) = (1 - \delta_{o,n_j})\ \mu_j$)

$= r_j \cdot A_j(n-1)$ pour $s_j \leqslant n_j < N$)

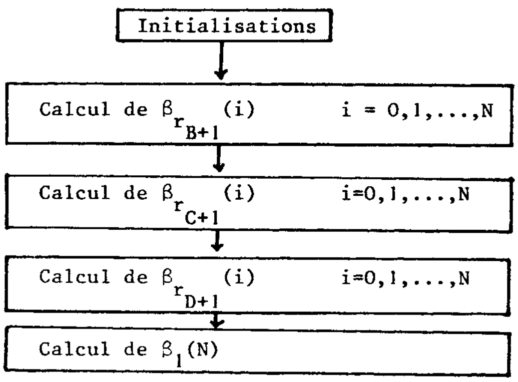
qui ne sont ni du type A, ni B, ni C.

sons que, dans le réseau, les indices des stations soient
type de celles-ci:

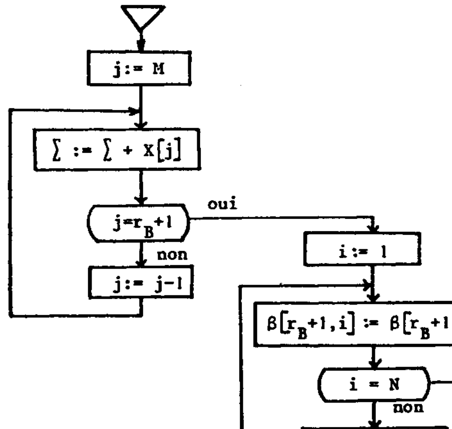
Sup {indices des stations de type k}

$0 < r_D < r_C < r_B < r_A = M$

gramme général est le suivant :



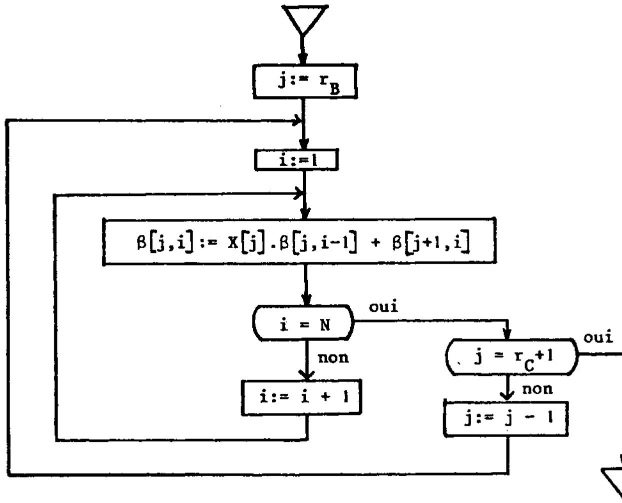
Organigramme relatif à $\beta_{r_B+1}(i)$



Nombre d'opérations élémentaires :

$2N + (M - r_B)$

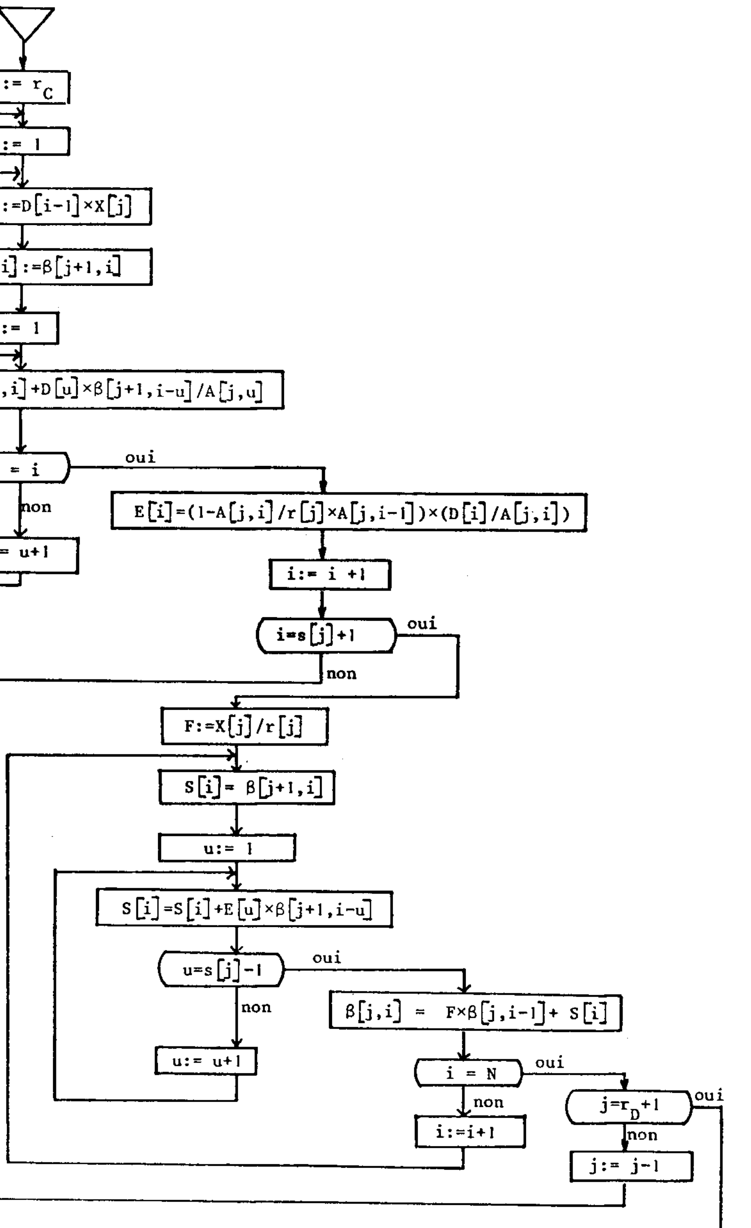
Organigramme relatif à $\beta_{r_C+1}(i)$



Nombre d'opérations élémentaires : $2(r_B - r_C) \times N$

Nota : Cet organigramme est similaire à celui de Buzen dans
algorithme ; et le nombre d'opérations élémentaires est ident

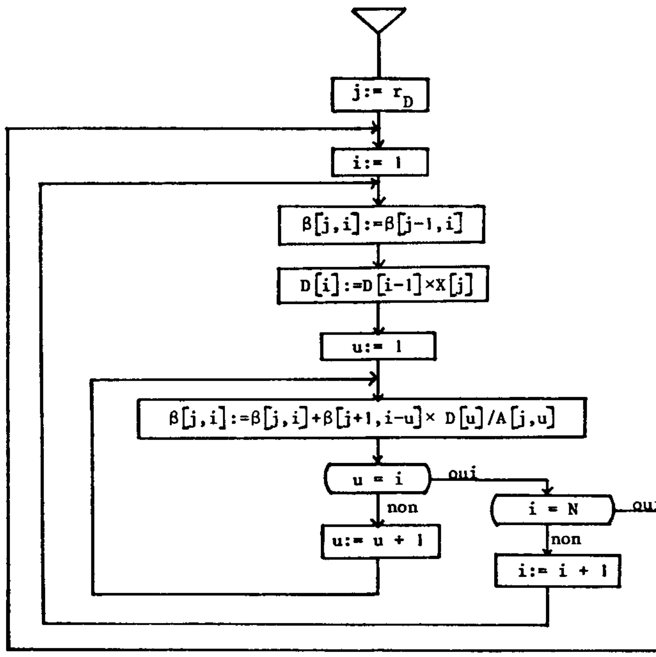
tif à $\beta_{r_D+1}(i)$



rations élémentaires :

$$\sum_{j=r_D+1}^{j=r_C} (s[j]\left[2N - \frac{1}{2}\, s[j] + \frac{15}{2}\right] + 1)$$

Organigramme relatif à $\beta_1(N)$



Nombre d'opérations élémentaires : $r_D \left[\frac{3}{2} N(N+1) + N\right]$

Nota : Cet organigramme est très voisin de celui utilisé pa
deuxième algorithme. Ce dernier donnerait un nombre de $r_D \times 2$
mentaires (car ici on calcule D[u] directement avec la variab

Revenant à l'algorithme global, on voit donc que, s
(et aux initialisations près), le nombre d'opérations élément
$\frac{3}{2}$ M.N.$(N+\frac{5}{2})$.

Cet algorithme sera d'autant plus intéressant que l
prendra que des stations de type A, B, et C (ce qui est souve

Si dans un réseau ouvert, on s'intéresse à des prob
réseaux telles qu'elles ont été définies dans le paragraphe D
pourra être utilisé pour calculer les fonctions $\beta_1^J(i)$.

B I B L I O G R A P H I E

A use of complex probabilities in the theory of
stochastic processus. Proc. Camb. Phil. Soc, 51 (1955

NEWEL Closed Queuing Systems with exponentials
servers. Oper. Res. 15.2 (1967), 254-265

Job-Shop like queuing systems, Management Science,
Vol 10, Oct. 1963, 131-142.

P.BUZEN Computational Algorithms for closed Queuing
Networks with Exponentials Servers. A.C.M. Volume 16,
Number 9. 1973.