GILLES HAINRY

Décomposition en sous-réseaux indépendants d'un réseau de files d'attente markovien ergodique

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A5_0>

OMPOSITION EN SOUS-RESEAUX INDEPENDANTS D'UN RESEAU

FILES D'ATTENTE MARKOVIEN ERGODIQUE PAR Gilles HAINRY

MAIRE :

montre que la distribution de probabilité stationnaire
 ergodique ouvert ou fermé est proportionnelle au pro-
s de probabilités stationnaires de sous-réseaux ouverts
s à une décomposition du réseau considéré en sous-réseaux;
au canonique, la probabilité stationnaire ne dépend que du
nt, elle ne dépend pas du nombre de "serveurs" dans les
ppartenant pas au sous-réseau considéré.

Le plan adopté est le suivant :

- A : Données
- B : Cas d'un seul élément en circulatio
- C : Sous-réseau canonique associé à un
- D : Relation entre le réseau global et
  canoniques quand il n'y a qu'un seu
  culation
- E : Théorème

Le but est essentiellement de prouver le
paragraphe E.

A - DONNEES

Le système que l'on considère est un rése
tente markovien fermé (resp. ouvert) ergodique dont on étudie
stationnaire. Plus précisément.

- Le réseau comprend m postes de services
évoluent n éléments (resp. une infinité d'éléments) ; dans le
ouvert, on suppose que dans le m-ième poste seulement il y a

- Pour le poste i, le taux de service de
s'il y a x_i éléments dans ce poste (en attente ou en cours
tant considéré ; dans le cas d'un réseau ouvert, μ_m ne dépend
x_m est infini.

- Un élément qui quitte le poste i va au
babilité $p_{i,j}$; la matrice P de terme général $p_{i,j}$ est une ma
puisqu'aucun élément ne quitte le système ; c'est aussi une m
puisque le système est supposé ergodique. On notera I = {1,...
indices des postes de service.

On se donne une partition $\{J(k)\}_{1\leq k\leq s}$ de I
k, $1\leq k\leq s$, l'ensemble des postes dont l'indice appartient à J(
réseau k;

On notera $X = (x_1,\dots,x_m)$ un état du syst
pour $1\leq i\leq m$, le nombre d'éléments dans le poste d'indice i; on
des états possibles ; dans le cas d'un réseau ouvert, $\mathcal{H}$ est d
X tel que $x_m = +\infty$ et tel que $\sum_{i=1}^{m-1} x_i < +\infty$; dans le cas d'un rése
semble des X tel que $\sum_{i=1}^{m} x_i = n$.

ELEMENT EN CIRCULATION

era $U = (u_1, \ldots, u_m)$ la matrice uni-ligne, telle que
ution de l'équation matricielle UP = U. Cette matrice est
système est ergodique. S'il n'y a qu'un seul élément en
e système, u_i représente la fréquence de passage de cet
ste i ou encore, la probabilité stationnaire, pour cet
ns ce poste i, quand tous les postes ont un service expo-
ramètre. De même, $u_i \cdot p_{i,j}$ représente la fréquence de
au poste j.

out sous-réseau d'indice k, $1 \leqslant k \leqslant s$, on notera v(k) le
, $v(k)_m$) défini par $(v(k))_i = 0$ si $i \notin J(k)$ et

$$i = \frac{1}{\sum_{j \in J(k)} u_j} \left\{ \sum_{j \in J(k)} p_{j,i} \cdot u_j \right\} \quad \text{si } i \in J(k)$$

e cas où il n'y a qu'un seul élément en circulation dans
ppartient à J(k), c'est-à-dire si le poste i appartient
$(v(k))_i$ est la fréquence d'entrée dans le poste i sachant
rieur du sous-réseau k.

NONIQUE ASSOCIE A UN SOUS-RESEAU

out sous-réseau k, on appellera sous-réseau canonique
éseau ouvert constitué du sous-réseau considéré k auquel
e extérieur avec les taux suivants : le taux d'entrée
en venant de l'extérieur vaut $(v(k))_i$; les taux de
eau canonique et les taux de transfert à l'intérieur du
que sont les mêmes que ceux du sous-réseau k considéré.
canonique est irréductible et admet donc une probabilité
$q_k(x)$.

LE RESEAU GLOBAL ET LES SOUS-RESEAUX CANONIQUES QUAND
L ELEMENT EN CIRCULATION

sidère le cas où il n'y a qu'un seul élément en circula-

tion et où tous les postes du réseau sont à service exp
paramètre.

Pour tout sous-réseau k et pour tout poste
$(w(k))_i$ la probabilité stationnaire d'être dans le post
restreint au sous-réseau canonique associé au sous-rése
quent, $(w(k))_i = 0$ si la station i n'appartient pas au
si on considère la matrice uni-ligne F_k dont une coordo
$1 - \sum_{i \notin j(k)} (w(k))_i$ et dont les autres valent $(w(k))_i$
à j(k), ceci revient à dire que F_k est solution de l'
$F_k R_k = F_k$ où R_k est la matrice de transition du sous-ré
associé au sous-réseau d'indice k.

On a alors pour tout i, $\sum_{k=1}^{s} (w(k))_i = u_i$

En effet, si le poste i appartient au sous-
est la fréquence de passage dans le poste i dans le cas
seul élément en circulation.

E - THEOREME

Pour toute décomposition en sous-réseaux d'
ou fermé, la distribution de probabilité d'équilibre da
égale au produit des distributions de probabilités d'éq
sous-réseaux canoniques ouverts associés aux sous-résea
tion considérée. Autrement dit, en utilisant les notati
pour tout état x du réseau, on a :

$$q(x) = \prod_{k=1}^{s} q_k(x)$$

où $q_k(x)$ ne dépend en fait que des valeurs x_i telles qu
J(k).

Ce théorème se vérifie formellement facilem
relation $u = \sum_{k=1}^{s} w(k)$ prouvée au paragraphe D et la fo
(cf. [1]) donnant les probabilités stationnaires
vien irréductible ouvert ou fermé.

B I B L I O G R A P H I E

1 JACKSON *Job-Shop Like Queuing systems,* Managemen
1963. pp. 131-142.