M. MÉTIVIER

J. PELLAUMAIL

Mesures stochastiques à valeurs dans des espaces L_o

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 16-37
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A2_0>

RES STOCHASTIQUES A VALEURS DANS DES ESPACES L_o

par M. METIVIER et J. PELLAUMAIL

le cet exposé est d'étudier une notion d'intégrale
clut, notamment, l'intégrale stochastique $\int Y\,dX$
Y par rapport à un processus X à valeurs dans un
Dans [4] ou [6] , cette intégrale stochastique
intégrale d'une fonction réelle associée à Y par
re stochastique" à valeurs dans un espace L_p^E avec
mesure stochastique" est à valeurs dans un espace L_p^E
onduit à utiliser des techniques de démonstration
[4] ou [6] puisqu'on considère une intégrale par
re" à valeurs dans un espace vectoriel non localement

ici, on considère le cas où l'ensemble T (ensemble
dans le cas usuel) n'est pas totalement ordonné

TIONS

P) est un espace de probabilité complet.
espace topologique.
ne semi-algèbre de parties de T.
e élément I de $\mathcal{J}$ est associé une sous-tribu $\mathcal{G}_I$ de $\mathcal{G}$
es ensembles de mesure nulle de $\mathcal{G}$.

ose que, si I et J sont deux éléments de $\mathcal{J}$ tels que
$_J$ (pour des exemples d'une telle situation, cf. [5]).

On dira que A est un "rectangle prévisible" s
partie de (Ω x T) de la forme (H x I) où I est un élémen
est un élément de $\mathcal{G}_I$. La famille de ces rectangles prévi

On vérifie facilement qu'elle constitue une semi-a
L'algèbre engendrée par cette famille $\mathcal{R}$ sera notée $\mathcal{A}$.
facilement que tout élément de $\mathcal{A}$ admet une partition fi
d'éléments de $\mathcal{R}$.

La tribu engendrée par $\mathcal{R}$, ou par $\mathcal{A}$, sera
sera appelée la tribu des prévisibles. On dira que Y est
réel prévisible si Y est une application réelle définie s
rable pour la tribu $\mathcal{G}'$.

E est un espace de Banach (sur $\mathbb{R}$).

Pour tout réel p positif (zéro compris), on p
$L_p^E = L_p^E\ (\Omega, \mathcal{F}, P)$ (espace vectoriel de variables aléatoi
dans E muni de la topologie usuelle).

Quand on dira qu'une partie $\mathcal{U}$ de L_p^E est une
de L_p^E , ce sera toujours au sens des espaces vectoriels
(cf. par exemple [2]).

B - MESURE STOCHASTIQUE D'ORDRE p

B-1 : Définition

Soit $p \geq 0$. Soit x une fonction définie et si
sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans L_p^E et telle que $x\ (H \times I) = 1_H$.
est un élément de $\mathcal{J}$ et si H appartient à $\mathcal{G}_I$. On dira qu
stochastique d'ordre p si x se prolonge à la tribu $\mathcal{G}'$ en
σ - additive pour la topologie usuelle de L_p^E.

Dans ce cas, ce prolongement sera encore noté
appelé mesure stochastique.

la suite du présent paragraphe, on se propose de donner
ffisantes pour que x soit une mesure stochastique
ci-après), puis d'étudier x.

cela, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme

v une fonction réelle positive définie sur $\mathcal{A}$ et qui
ditions suivantes :

appartiennent à $\mathcal{A}$, $v(A) \leq v(A \cup B) \leq v(A) + v(B)$

$\varepsilon > 0$ et pour tout élément $A = H \times I$ de $\mathcal{R}$, il existe
J de $\mathcal{J}$ et un compact C de T tels que $J \subset C \subset I$ et,
J, $v(A \setminus B) \leq \varepsilon$.

suite $(F_n)_{n>0}$ d'éléments de $\mathcal{G}$ telle que $F_n \downarrow \emptyset$
ute suite $(B_n)_{n>0}$ associée d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que
n, $B_n \subset (F_n \times T)$, on a $\lim_{n \to \infty} . v(B_n) = 0$.
tisfait à la condition suivante :

suite $(A_n)_{n>0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $A_n \downarrow \emptyset$
. $v(A_n) = 0$

$\varepsilon > 0$. Soit $(A_n)_{n>0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que
uit une suite associée $(B_n)_{n>0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ de la

dmet une partition finie $\{ A(n,k) \}_{1 \leq k \leq m}$ constituée
, soit $A(n,k) = H(n,k) \times I(n,k)$; pour tout n et k,
$(n,k) \times J(n,k)$ élément de $\mathcal{R}$ tel que $B(n,k) \subset A(n,k)$,

$$(n,k) \setminus B(n,k)] \leq \frac{\varepsilon \cdot 2^{-n}}{m}$$

ste un compact $C(n,k)$ de T avec $J(n,k) \subset C(n,k) \subset I(n,k)$;
$\bigcup_{k=1}^{m} B(n,k)$; on a, notamment,

$$v(A_n \setminus B_n) \leq \sum_{k=1}^{m} v\left[A(n,k) \setminus B(n,k)\right]$$

$$\leq 2^{-n} \cdot \varepsilon$$

Pour tout n, soit $E_n = \bigcap_{k \leq n} B_k$. D'une

$$v(A_n \setminus E_n) \leq \sum_{k=1}^{n} v(A_k \setminus E_k) \leq \varepsilon$$

Pour tout élément ω de Ω et pour tout en
$a(j,\omega)$ l'ensemble des entiers k tels que $\omega \in H(j,k$
tout entier n et tout élément ω de Ω , soit

$$D_n(\omega) = \bigcap_{j \leq n} \{ \bigcup_{k \in a(j,\omega)} C(j,k) \}$$

enfin, soit $F_n = \{ \omega : \omega \in \Omega , D_n(\omega) \neq 0 \}$

(pour tout n, F_n est un élément de $\mathcal{G}$).

Pour ω fixé, $(D_n(\omega))_{n>0}$ est une sui
décroît vers vide, donc il existe un entier n tel que
qui signifie que l'on a $F_n \downarrow \emptyset$. Or, pour tout n, E
$F_n \times T$ (puisque $B_n(\omega)$ est contenu dans $\bigcup_{k=1}^{m} C(n,k)$
D'après la condition (iii), on a donc $v(E_n) \leq \varepsilon$ po
Ceci implique $v(A_n) \leq v(A_n \setminus E_n) + v(E_n)$

$$\leq 2\varepsilon \quad \text{pour n assez grand}$$

Puisque ε est arbitraire, on a $\lim_{n \to \infty} . v(A_n) = 0$.

B-3 : Lemme

Soit x une fonction définie et simplement
algèbre $\mathcal{A}$, à valeurs dans un espace vectoriel $\mathcal{U}$ mu
l'on notera $|| . ||$. On suppose que x satisfait à la

) est une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$,

$$\lim_{n \to \infty} ||x\ (A_n)|| = 0$$

fonction définie sur $\mathcal{A}$ par :

$$= \sup_{B \in \mathcal{A},\ B \subset A} ||v\ (B)||$$

r tout élément A de $\mathcal{A}$, $v(A) < +\infty$

s d'abord que, si x admet un prolongement σ - additif
rée par $\mathcal{A}$, la condition (i) ci-dessus est nécessairement

d'abord prouver que l'on a la propriété suivante :

si A est un élément de $\mathcal{A}$ tel que v (A) = + ∞,
il existe une partition (B, C) de $\mathcal{A}$ telle que

$$||x\ (B)|| \geq 1 \quad \text{et} \quad v(C) = +\infty$$

nsidère donc $A \in \mathcal{A}$ tel que v (A) = + ∞

t E et F deux éléments de $\mathcal{A}$ contenus dans $\mathcal{A}$ tels que
E)|| $\geq$ 2 et $||x(F)|| \geq 2 + ||x\ (E)||$. On a nécessairement
des trois cas suivants (au moins)

∞

∞

∞

le cas a), on pose $C = A \setminus F$ et $B = F$; dans le cas b),
et B = E ; considérons le cas c) :

$|x\ (E \setminus F)|| \geq 1$, on pose $B = E \setminus F$ et $C = F \cup (A \setminus E)$;

$|x\ (E \setminus F)|| \leq 1$, on a :

$E \cap F)|| \leq ||x(E)|| + ||x(E \setminus F)|| \leq 1 + ||x\ (E)||$

donc :

$$||x(F \setminus E)|| \geq ||x(F)|| - ||x(E \cap F)|| \geq 2 + ||x(E)|$$
$$\geq 1$$

On peut donc poser, dans ce cas, $B = F \setminus$

Ceci achève la preuve de la propriété (s)

Raisonnons par l'absurde et supposons v (
On construit les suites $(B_n)_{n > 0}$ et $(C_n)_{n \geq 0}$ par
façon suivante : on pose $C_o = A$ puis, C_n étant déte
$v\ (C_n) = +\infty$, on se donne une partition $(B_{n+1}\ ,\ C_{n+1})$
$||x\ (B_{n+1})|| \geq 1$ et $v\ (C_{n+1}) = +\infty$ (propriété (s))
ne satisfait pas à la condition (i), ce qui achève le

B-4 - <u>Théorème</u>

Soit p $\geq$ 0. Pour toute variable aléatoire
on pose :

$$||f||_p = \left[\int |f\ (\omega)|^{\ p}.\ P\ (d\omega) \right]^{1/p} \quad \text{si } p \geq 1 \quad \text{(nor}$$

$$||f||_p = \int |f\ (\omega)|^{\ p}.\ P\ (d\omega) \qquad \text{si } 0 < p \leq 1$$

$$||f||_p = \int \left[|f\ (\omega)| \wedge 1 \right] .\ P\ (d\omega) \text{ si } p = 0$$

$||\ ||_p$ est une F - norme (cf. [3]) associée à la topolo

Soit x une fonction définie et simplement
à valeurs dans L_p^E et qui satisfait aux conditions sui

(i) si I appartient à $\mathcal{J}$ et si H appartient à $\mathcal{F}_I$

$$x\ (H \times I) = 1_H \cdot x\ (H \times I)$$

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout élément $A = H \times$
un élément J de $\mathcal{J}$ et un compact C de T tels q
et tels que, si D est un élément de $\mathcal{A}$ conten

$$||x\ (D)||_p \leq \varepsilon$$

suite $(A_n)_{n > 0}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$,
$(A_n))_{n > 0}$ converge vers zéro (pour la topologie
L_p^E).

t une mesure stochastique d'ordre p. (cf. B-1 ci-dessus).

la condition (iii) est satisfaite, la condition (ii)
séquence de l'ensemble des deux conditions suivantes :

lément I de $\mathcal{J}$, il existe une suite $(J_n)_{n > 0}$ d'éléments
e suite associée $(C_n)_{n > 0}$ de compacts de T telles que,
, $J_n \subset C_n \subset I$ et telles que $J_n \uparrow I$.

suite $(A_n)_{n > 0}$ d'éléments de $\mathcal{R}$ telle que $A_n \downarrow \emptyset$,
) = 0 (pour la topologie usuelle de L_p^E).

est un esapce vectoriel de dimension finie, la condi-
est satisfaite si x est simplement additive et si x $(\mathcal{A})$
tie bornée de L_p^E.

ra $||\cdot||$ au lieu de $||\cdot||_p$.

bord le cas où E = $\mathbb{R}$: dans ce cas, les espaces $L_p^E = L_p^{\mathbb{R}}$
tisfont aux hypothèses du théorème 3 de [3] ;
une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$;
ve et si x $(\mathcal{A})$ est une partie bornée de L_p^R , la série
1 x (A_n) est "parfaitement bornée" (cf. [3]) ; elle est
e. Ceci montre la dernière partie du théorème dans le
cas où E est un espace vectoriel de dimension finie s'en
ement.

2°/ Considérons maintenant le cas où E est un espace de
et montrons que la condition (ii) est une conséquenc
des trois conditions (iii), (iv) et (v). Pour cela,
l'absurde et considérons un $\varepsilon > 0$ et un élément A =
qui ne satisfassent pas à (ii).

Soit $(J_n)_{n > 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{J}$ et une sui
$(C_n)_{n > 0}$ de compacts telles que, pour tout n, $J_n \subset$
$J_n \uparrow I$. Pour tout n, on pose $J'_n = I \setminus J_n$. On constr
$(V_n)_{n > 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ et la suite associée d'en
par récurrence de la façon suivante :

étant donné k(n), soit $W_{n+1} \subset [H \times J'_{k(n)}]$ avec W_{n+}
et $||x\ (W_{n+1})|| \geq \varepsilon/2$

(rappelons qu'on raisonne par l'absurde)

ensuite, soit k(n+1) tel que $||x\ [\ W_{n+1} \cap (H \times J'_{k(}$

(k(n+1) existe d'après l'hypothèse (v) et le fait qu
tout élément de $\mathcal{A}$, admet une partition finie consti
de $\mathcal{R}$).

enfin, soit $V_{n+1} = W_{n+1} \setminus [H \times J'_{k(n+1)}]$.

On a $||x\ (V_{n+1})|| \geq ||x\ (W_{n+1})|| - ||x\ [W_{n+1} \cap (H$

$$\geq \varepsilon/2 - \varepsilon/4 = \varepsilon/4$$

De plus, les ensembles $(V_n)_{n > 0}$ sont deux à deux d
contredit la condition (iii) et achève le raisonneme

3°/ On considère toujours le cas où E est un espace de B
Soit v la fonction réelle positive définie sur l'ens
de $\Omega \times T$ par :

$$v\ (A) = \underset{B \in \mathcal{A},\ B \subset A}{\operatorname{Sup}} ||x\ (B)||_p$$

On veut prouver que, en restriction à $\mathcal{A}$, v satisfa
(i), (ii) et (iii) du lemme B-2. La condition (i) es
faite et la condition (ii) du lemme B-2 correspond à
de l'énoncé du présent théorème.

propose donc maintenant de prouver que v satisfait
-(iii). Là encore, nous allons raisonner par l'absurde :
suite d'éléments de $\mathfrak{F}$ telle que $F_n \downarrow \emptyset$ et soit
te associée d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que, pour tout n,
$F_n \times T)$ et $||x(B_n)|| \geq 2\varepsilon > 0$.

e que $v(F_1 \times T) = a < +\infty$.
$D \in \mathcal{A}$ tel que $||x(D)||_p \geq a - \varepsilon/4$;
e $||x(D) \cdot I_{F_k}||_p \leq \varepsilon/4$;
$(F_k \times T)$ tel que $||x(E)||_p \geq 2\varepsilon$;
$\setminus D)||_p \geq \varepsilon$, soit $||x(E \cap D)||_p \geq \varepsilon$;
s, on a $||x(E \cup D)||_p \geq a + \varepsilon/4 - \varepsilon/4 + (\varepsilon - \varepsilon/4) \geq a + \frac{\varepsilon}{2}$
as, on a $||x(D \setminus E)||_p \geq a + \varepsilon/2$: dans les deux cas,
l'hypothèse $v(F_1 \times T) = a < +\infty$, ce qui achève le
'absurde.

vé que v satisfait aux hypothèses du lemme B-2.
$(A_n)_{n>0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que
$\lim_{n \to \infty} x(A_n) = 0$. Ceci et la condition (iii) nous permet
th rème 3-3 de [ ] . (on peut, aussi, utiliser [ ]).

ue la condition "x ($\mathcal{A}$) partie bornée de L_p^E " est équi-
ondition $v(\Omega \times T) < +\infty$ sauf si p = 0 (auquel cas
condition $v(\Omega \times T) < +\infty$ est nécessairement satis-

Lemme

un espace vectoriel muni d'une F-norme que l'on notera
e tribu de parties d'un ensemble Ω'. Soit m une fonction
valeurs dans u et σ − additive pour la topologie de u
rme considérée. Soit v la fonction positive définie sur

$$v(A) = \underbrace{Sup}_{B \subset A,\ B \in \mathfrak{F}'} ||m(B)||$$

La fonction v satisfait alors aux deux cond

(i) si A et B appartiennent à $\mathfrak{F}'$, $v(A) \leq v(A \cup B)$

(ii) si $(A_n)_{n>0}$ est une suite d'éléments de $\mathfrak{F}'$ tel

$$\lim_{n \to \infty} v(A_n) = 0$$

Preuve

La propriété (i) se vérifie immédiatement.
une suite $(A_n)_{n>0}$ d'éléments de $\mathfrak{F}'$ telle que $A_n \downarrow \emptyset$
l'absurde et on suppose que $\lim_{n \to \infty} v(A_n) \geq \varepsilon > 0$.

On construit la fonction croissante f et la
par récurrence de la façon suivante :

f(n) et B_n étant déterminés, soit C_n élément de $\mathfrak{F}'$ te
et $||m(C_n)|| \geq 2\varepsilon/3$, puis , soit f(n+1) tel que

$$||C_n \setminus A_{f(n+1)}|| \geq \varepsilon/3$$

On pose $B_{n+1} = C_n \setminus A_{f(n+1)}$. Enfin, on pose $D_n =$ (k

On a $D_n \downarrow \emptyset$ et, $\forall$ n, $||m(D_n \setminus D_{n+1})|| \geq \varepsilon/3$ donc
pas vers zéro, d'où la contradiction.

B-6 : Lemme

Soit $\mathfrak{F}'$ une tribu de parties d'un ensemble
une algèbre $\mathcal{A}$. Soit v une fonction positive définie s
sant aux deux conditions suivantes :

(i) si A et B appartiennent à $\mathfrak{F}'$, $v(A) \leq v(A \cup B) \leq$

(ii) si $(A_n)_{n>0}$ est une suite d'éléments de $\mathfrak{F}'$ te

$$\lim_{n \to \infty} v(A_n) = 0$$

pour tout élément C de $\mathcal{G}'$, et pour tout $\varepsilon > 0$,
t B de $\mathcal{F}'$ qui est réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$,
el que $v\ (B \setminus C) \leq \varepsilon$.

$\mathcal{C}$ la classe des éléments de $\mathcal{G}'$ qui satisfont aux
e. D'une part $\mathcal{C}$ contient $\mathcal{A}$.
classique, il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est une classe

suite d'éléments de $\mathcal{C}$ croissant vers C ; pour tout n,
$v\ (B_n \setminus C_n) \leq \varepsilon .\ 2^{-n}$. Soit $B = \bigcup_{n > 0} B_n$.
$_0$ $v\ (B_n \setminus C_n) \leq \varepsilon$ donc C appartient à $\mathcal{C}$.

suite d'éléments de $\mathcal{C}$ décroissant vers C ; pour tout n,
$(B_n \setminus C_n) \leq \varepsilon$; soit $B = \bigcap_{n > 0} B_n$.
$B \setminus C) \leq v\ (B_n \setminus C_n) + v\ (C_n \setminus C)$
ndu plus petit que 2ε pour n assez grand

roposition

une fonction définie et simplement additive sur $\mathcal{A}$,
et qui satisfait aux conditions (i), (ii) et (iii)
oit H un élément de $\mathcal{G}$. Soit A un ensemble prévisible
$1_{H \times T}$

$) = 1_H \cdot x\ (A)$

onne donc x, H et A comme indiqués dans l'énoncé de la
out élément f de L_p^E , on définit la F-norme $||\cdot||$
ème B-4 puis la fonction v associée comme dans le 3°/
théorème B-4. Le lemme B-5 montre que v satisfait
et (iv) du lemme B-2. Le lemme B-6 montre alors que,

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite décroissante $(B_n)_n$
de $\mathcal{A}$ telle que, si $B = \bigcap_{n>0} B_n$, $B \subset A$ et $v\ (A \setminus B) \leq \varepsilon$
de démontrer que $x(B) = 1_h \cdot x\ (B)$ sachant que $B_n \downarrow B$,
et que, pour tout n, B_n appartient à $\mathcal{G}'$.

Puisque v satisfait à la condition (ii) du l
tout n, il existe une partie D_n de $\Omega \times T$ contenue dans
finie de rectangles à bases compacts dans Ω et un éléme
tels que $C_n \subset D_n \subset B_n$ et $v\ (B_n \setminus C_n) \leq 2^{-n} .\ \varepsilon$.

Soit $C'_n = \bigcap_{k \leq n} C_k$ et $C' = \bigcap_{n > 0} C'_n$. On a $||x(B) -$

Il suffit donc de démontrer que $x\ (C') = 1_H \cdot x\ (C')$. Qu
une sous-suite, on peut supposer que la suite de variabl
$(x(C'_n))_{n > 0}$ converge P.p.s. vers $x\ (C')$.

Pour tout n, soit $G_n = \{\ \omega\ :\ \exists\ t,\ 1_{C'_n}\ (t, \omega) \neq 0\ \}$

et $F_n = \{\ \omega : x\ (C'_n)\ (\omega) \neq 0\ \}$

D'une part, $F_n \subset G_n$ (propriété B-4 (i)) ; d'autre part
(puisque, pour tout $\omega \notin H$, la "trace" de $C'_n\ (\omega)$ sur T es
un compact K_n avec $K_n \downarrow \emptyset$). Or 1_{F_n} converge P.p.s. vers
$F \subset H$ P.p.s , c'est-à-dire que $x\ (C') = 1_H \cdot x\ (C')$

C - CONSTRUCTION DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE

C-1 : Introduction

Soit x une mesure stochastique d'ordre p tell
est une partie bornée de L_p^E . Soit Y un processus prévisi
ment borné. Le problème est de donner un sens au symbole
pour cela, nous allons considérer cette intégrale comme l
rapport à la "mesure" x, de la fonction réelle Y, considé
définie sur $(\Omega \times T)$ et mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{G}$

1, L_p^E est un espace de Banach et on peut utiliser
1, L_p^E n'est plus un espace de Banach : néanmoins,
éré ici, on peut encore définir $\int Y.dx$. (notons qu'on
[11]).

Processus $\mathcal{A}$- étagé

a que Y est un processus réel $\mathcal{A}$- étagé si Y est une
finie sur $(\Omega \times T)$ telle que :

t) = $\sum_{i \in I} a_i \cdot 1_{A(i)} (\omega , t)$ (1)

est une famille finie de réels et où $\{A_{(i)}\}_{i \in I}$
nie associée d'éléments de $\mathcal{A}$.

era $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des processus $\mathcal{A}$- étagés.

ppartient à $\mathcal{E}$ et satisfait à (1), on posera

dx = $\sum_{i \in I} a_i \cdot x \left[A(i) \right]$

ifie immédiatement que, pour une mesure stochastique
ceci définit, sur $\mathcal{E}$, une application linéaire à

Théorème et définition de $\int Y . dx$

≥ 0.
une mesure stochastique d'ordre p telle que x ($\mathcal{A}$)
née de L_p^E .
$\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des processus prévisibles réels
s.

Il existe alors une application (unique) déf
à valeurs dans L_p^E , qui, à Y élément de $\mathcal{P}$, associe $\int$
satisfait aux deux conditions suivantes :

(i) en restriction à $\mathcal{E}$, $\int Y . dx$ est définie com
précédemment (cf. C-2)

(ii) si $(Y_n)_{n > 0}$ est une suite de processus réels pr
mément bornée (en n, t et ω) qui converge simpl
processus Y, la suite $(\int Y_n . dx)_{n > 0}$ converg
usuelle de L_p^E) vers $\int Y . dx$.

Notons qu'on peut parfois définir $\int Y . dx$
processus prévisible non uniformément borné.

Par ailleurs, si Y est un processus prévisib
borné, l'application u, qui, à tout élément A de $\mathcal{A}$ (ou
$u(A) = \int 1_A . Y . dx$ est une mesure stochastique d'o

Preuve

1°/ Considérons les deux propriétés suivantes :

(a) si $(Y_n)_{n > 0}$ est une suite de processus réels
décroît simplement vers zéro (pour tout t et tou
suite $(\int Y_n . dx)_{n > 0}$ converge vers zéro pour
usuelle de L_p^E .

(b) si $(Y_n)_{n > 0}$ est une suite de processus réels p
telle que $\sum_{n > 0} Y_n \leq 1_{(\Omega \times T)}$, alors la su
converge vers zéro pour la topologie usuelle de

Si on sait prouver ces deux propriétés, le t
déduit immédiatement de [7] . On va donc, maintenant,
vement ces deux propriétés.

ropriété (a)

s d'abord que la famille des variables aléatoires $\int Y.dx$,
l'ensemble des processus réels $\mathcal{A}$- étagés uniformément
une partie bornée de L_p^E (compte-tenu de [10], des
F-norme considérée et de l'hypothèse x ($\mathcal{A}$) partie

$(Y_n)_{n > 0}$ une suite de processus réels (positifs)
croît vers zéro. D'après le paragraphe précédent,
ε], et $B(n) = \Omega \setminus A(n)$, $\int Y_n \cdot 1_{B(n)} \cdot dx$ peut être
que l'on veut (uniformément en n) si on prend ε assez
puisque $|Y_n \cdot 1_{B(n)}| \leq \varepsilon$).

our ε fixé, $A(n) \downarrow \emptyset$ donc $v(A_n) \downarrow 0$ (cf. lemme B-2)
. dx tend vers zéro (cf. [10]) ce qui prouve la

ropriété (b)

$(Y_n)_{n > 0}$ une suite de processus réels positifs
que

$$\sum_{n > 0} Y_n \leq 1 \; .$$

(k entier). Pour tout n > 0, soit $A(n) = [Y_n > \varepsilon]$.
t, on peut choisir ε assez petit pour que

$$\int Y_n \cdot 1_{\Omega \setminus A(n)} \cdot dx$$

que l'on veut (uniformément en n). Il reste donc à prouver
ixé,

$$\lim_{n \to \infty} . \int Y_n \cdot 1_{A(n)} \cdot dx = 0 \; .$$

Pour cela, on définit par récurrence les e

$B(0,0) = \Omega$, $B(n, -1) = \emptyset$ pour tout entier n avec n

$B(0,j) = \emptyset$ pour tout entier j avec $j \geq 1$

et pour $n \geq 1$ et $j \geq 1$:

$B(n,j) = [B(n-1, j-1) \cap A(n)] \cup [B(n-1, j) \setminus A(n)$

$C(n,j) = B(n-1, j-1) \cap A(n) = B(n,j) \cap A(n)$

On a $B(n,j) = \emptyset$ pour $j > k$; de plus, po
$\{C(n,j)\}_{1 \leq j \leq k}$ constitue une partition de A(n).
j fixé, $\{C(n,j)\}_{n > 0}$ constitue une famille d'élémen
disjoints. Il résulte de [10] et de l'hypothèse B-3 (
satisfaite) que

$$\lim_{n \to \infty} \int Y_n \cdot 1_{C(n,j)} \cdot dx = 0 \quad \text{(pour to}$$

On en déduit que $\lim_{n \to \infty} \int Y_n \cdot 1_{A(n)} \cdot dx = 0$ (puisqu
constitue une partition de A(n)), ce qui prouve la pro

D - THEOREME DE RIESZ

D-1 - L'espace $\mathcal{H}$

Pour tout ce paragraphe D, en plus des hyp
en A, on se donne un espace vectoriel $\mathcal{H}$ *dont chaque é*
processus réel. On munit $\mathcal{H}$ *de la norme uniforme, c'es*

$$||h|| = \operatorname*{Sup}_{t,\omega} . |h(t,\omega)|$$

et on suppose que, muni de cette norme, $\mathcal{H}$ *est un espac*
on suppose que tout élément de $\mathcal{H}$ *est mesurable par r*
des prévisibles et que, inversement, la tribu $\mathfrak{F}'$ *es*
l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}$ *(pour des exemples d'un*

Définition

a que m est une E-mesure de Radon stochastique
≥ 0) si m est une application linéaire continue de $\mathcal{H}$
t muni de la topologie associée à la norme uniforme
de sa topologie forte usuelle) qui satisfait à la
:

$\in \mathcal{F}$ et $1_F . h \in \mathcal{H}$, on a $m\,(1_F.h) = 1_F.\, m\,(1_F.h)$

Théorème

ure stochastique à valeurs dans L_p^E, d'ordre p et
à-dire que x ($\mathcal{X}$) est une partie bornée de L_p^E).
cation linéaire définie sur $\mathcal{H}$
par $m\,(h) = \int h.\, dx$
e E-mesure de Radon stochastique d'ordre p.

, soit m une E-mesure de Radon sotchastique d'ordre p
la condition suivante :

e suite $(h_n)_{n>0}$ d'éléments positifs de $\mathcal{H}$ tels que
≤ 1 on a $\lim_{n \to \infty} .\ m\,(h_n) = 0$

te une mesure stochastique x (unique) à valeurs dans
,bornée et telle que $m\,(h) = \int h\,.\,dx$ pour tout élément
lus, la condition (i) ci-dessus est nécessairement
E est de dimension finie.

t de dimension finie et si p > 1, toute partie bornée
s E-mesures de Radon stochastiques d'ordre p est rela-
cte pour la topologie de la convergence simple, L_p^E
sa topologie faible.

Preuve

1°/ Le 1°/ se déduit immédiatement de la proposition B
qui précède.

2°/ Soit m une E-mesure de Radon stochastique d'ordre
prouver la propriété suivante :

(j) soit $(h_n)_{n>0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}$
et telle que, si $H_n = \{\omega : \exists\ t$ avec h_n (t,
on a $H_n \downarrow \emptyset$, alors m (h_n) tend vers zéro da

Pour prouver cette propriété (j), on va raisonner
On peut supposer $||h_1|| \leq 1$ (en désignant par $||\cdot|$
sur $\mathcal{H}$). On suppose alors qu'il existe une suite
indiquée dans la condition (j), suite telle que, p

$$||m\,(h_n)||_p \geq \varepsilon > 0$$

(en désignant par $||\cdot||_p$ la F-norme sur L_p^E défin
théorème B-4).

Soient f et g les applications croissantes de $\mathbb{N}$ d
de la façon suivante : f(1) = 1 = g (1) puis f(n)
minés (avec $g(n) \geq f(n)$), soit

$$f(n+1) \geq g(n) \quad \text{tel} \quad ||m(h_{g(n)}) \cdot 1_{H_{f(n+1)}}$$

On pose $u_n = h_{g(n)} - h_{f(n+1)}$ et $v_n = m\,(u_n)$.

On a $||v_n||_p \geq \varepsilon/2$. Soit $g(n+1) \geq f(n+1)$ tel q

$$||v_n \cdot 1_{H_{g(n+1)}}||_p \leq \varepsilon \cdot 4^{-n}$$

(ce qui achève la construction par récurrence).

On pose $w_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. D'une part, $w_n = m\,($

avec $0 \leq \sum_{k=1}^{n} u_k \leq$

$J(k) = H_{g(k)} \setminus H_{g(k+1)}$,

$|_p \geq ||v_k \cdot 1_{J(k)}||_p - \sum_{j=1}^{k-1} ||v_j \cdot 1_{J(k)}||_p$

$\geq \varepsilon/2 \cdot \sum_{j=1}^{k} \varepsilon \cdot 4^{-j}$

$\geq \varepsilon/4$

$||_p = + \infty$

it l'hypothèse de continuité de l'application m,
propriété (j) énoncée ci-dessus.

ntenant de prouver le 2°/ du théorème. On considère
de Radon stochastique d'ordre p, soit m. On se propose de
tisfait à la condition suivante :

> 0 une suite d'éléments de $\mathcal{H}$ telle que $g_n \downarrow 0$:
$m_\infty \cdot m(g_n) = 0$ dans L_p^E

une suite $(g_n)_{n > 0}$ d'éléments de $\mathcal{H}$ telle que

$= \{\omega : \exists\, t$ avec $g_n(t,\omega) \geq \varepsilon\}$.

$\varepsilon - \varepsilon$. On a $H_n = \{\omega : \exists\, t$ avec $h_n(t,) \neq 0\}$.

$\downarrow 0$ donc la suite $(h_n)_{n > 0}$ satisfait à la
2°/ qui précède, donc

$$\lim_{n \to \infty} \cdot m(h_n) = 0$$

$_n) = m(h_n) + m(g_n - g_n \vee \varepsilon - \varepsilon)$

$||g_n - g_n \vee \varepsilon - \varepsilon|| \leq \varepsilon$

se de continuité sur m montrent qu'on peut rendre
etit que l'on veut en choisissant ε assez petit
d. La condition (j') ci-dessus et la condition (i)
é du théorème permettent d'affirmer l'existence

d'un prolongement de Daniell (cf. [7]), ce qui impl
d'une mesure stochastique x à valeurs dans L_p^E , d'or
et telle que $m(h) = \int h \cdot dx$ pour tout élément h d

4°/ Le fait que la condition (i) du 2°/ de l'énoncé est
satisfaite si E est de dimension finie se déduit de
dans le 1°/ de la preuve du théorème B-4.

5°/ Il reste à prouver le 3°/ du théorème ; la propriété
qui y est indiquée se déduit de [2] corollaire 3 du
de ce que l'espace des mesures de Radon stochastiques
sous-espace fermé de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, L_p)$.

D-4 - <u>Théorème</u>

On suppose que $E = \mathbb{R}$ et que Ω est un espace
Soit $\mathcal{K}$ l'espace des fonctions réelles définies et conti
On désigne par $\mathcal{M}$ l'espace des formes bilinéaires définie
continues si on munit $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ de leurs topologies uni
faisant à la condition suivante :

(i) si $h \in \mathcal{H}$, $F \in \mathcal{F}$ et $h \cdot 1_F = h$, la mesure de
(sur Ω) $m(h, .)$ ne charge pas $\Omega \setminus F$

On dira qu'un élément m de $\mathcal{M}$ est dominé par P si,
élément h de $\mathcal{H}$, la mesure de Radon (sur Ω) m (
par P.

1°/ Soit x une mesure stochastique d'ordre 1 à valeurs da
l'application réelle définie sur $(\mathcal{H} \times \mathcal{K})$ par

$$m(h,k) = E\left[k \cdot \int h \cdot dx\right]$$

alors m appartient à $\mathcal{M}$ et est dominée par P.

, soit m un élément de $\mathcal{M}$ dominé par P.

te une mesure stochastique (unique) x d'ordre 1, à

$_{p}^{\mathbb{R}}$ *et telle que, pour tout élément (h,k) de* $(\mathcal{H} \times \mathcal{K})$,

$) = E \; [k \, . \int h \, . \, dx]$

bornée de $\mathcal{M}$ *est relativement compacte pour la topologie*

ence simple.

/ est une conséquence immédiate du théorème D-3 qui

n un élément de $\mathcal{M}$. Soit $\mathcal{K}'$ le dual fort de $\mathcal{K}$:

ication $\bar{m}$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$ définie par, quel que soit

$< \bar{m}\,(h), k > \; = m\,(h,k)$

application $\bar{m}$, faiblement continue par hypothèse,

inue (cf. [2] chapitre IV, paragraphe 5, proposition 7).

re considérée comme une application continue de $\mathcal{H}$

). On peut alors appliquer le théorème D-3 qui précède.

, le 3°/ se prouve comme le 3°/ du théorème D-3 qui

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.G. BARTLE : *A general bilinear vector integ*
Studia Math. 15, p. 337-352 (19

[2] N. BOURBAKI : *Espaces vectoriels topologiques*
Hermann. Paris 1967.

[3] W. MATUSZEWSKA and W. ORLICZ : *A note on modula*
Bull. Acad. Polo
Math. Vol XVI, N

[4] M. METIVIER : *Advances in the theory of stoch*
Invited lecture to appear in 7t
on Information Theory.

[5] M. METIVIER : *Un théorème de Riesz pour les m*
A paraître aux C.R.A.S.

[6] J. PELLAUMAIL : *Sur l'intégrale stochastique et*
de Doob-Meyer.
Astérisque N° 9, Société Mathém

[7] J. PELLAUMAIL : *Intégrale de Daniell à valeurs*
Rev. Roum. Math. Pures et Appl.
p. 1227-1236, 1971.

[8] G. PISIER : *Séminaire Maurey-Schwartz.*
1973-1974, exposé N° VI, Ecole

[9] M. SION : *Outer measures with values in a*
Proc. London Math. Soc. (3) 19,

[10] P. TURPIN : *Suites sommables dans certains*
mesurables.
C.R.A.S. t. 280, série A, 1975,

[11] P. TURPIN : *Convexité dans les espaces vect*
généraux.
Thèse - Orsay 1974.

- : -