MICHEL MÉTIVIER

Mesures et intégrales stochastiques pour des champs aléatoires

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A1_0>

MESURES ET INTEGRALES STOCHASTIQUES
POUR DES CHAMPS ALEATOIRES

-=-=-

Par Michel METIVIER

il qui suit définit la notion d'intégrale stochastique pour
xés par un ensemble d'indices qui est un espace localement
quelconque.

n de mesure stochastique due à J. PELLAUMAIL (cf. [5]) est
théorème de J. PELLAUMAIL et Y. GLORENNEC (cf. [3]) sur la
re mesures stochastiques et applications linéaires continues
rocessus adaptés à trajectoires continues à support compact
démonstration s'applique immédiatement au cas particulier

I - DEFINITIONS GENERALES

1 - Situation

- On se donne T localement compact métrisable.
- $\mathfrak{J}$ est un semi-anneau de parties de T qui son
intérieurs constituent une base de la topolo
- $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ est un espace probabilère donné un
- A chaque $t \in T$ est associée une tribu $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$
on pose :

$$\mathfrak{F}_I = \bigcap_{t \in I} \mathfrak{F}_t$$

2 - Hypothèse sur les tribus

On supposera toujours les hypothèses suivantes

$\forall I \in \mathfrak{J}$ $\exists\ t_o \in \bar{I}$ tel que $\mathfrak{F}_{t_o} \subset \mathfrak{F}_I$

Un tel point t_o est appelé point initial de I

$\forall I \in \mathfrak{J}$ existe un ouvert $O \supset I$ avec $\mathfrak{F}_I = \bigcap_{t \in}$

3 - Champs aléatoires ou processus stochastique

3-1 : On appellera champ aléatoire sur T ou pro
une famille $(x_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires su
par T.

hamp adapté :

 champ aléatoire sera dit adapté si :

$$\forall t \qquad X_t \in \mathcal{F}_t$$

ribu des prévisibles :

 appellera **rectangle prévisible** toute partie I x F de T x Ω
 On notera $\mathcal{R}$ l'ensemble des rectangles prévisibles. On appel-
évisible" tout élément de la tribu de parties de T x Ω engen-

roposition 1

ut processus à trajectoires continues et adapté est prévi-

émonstration

oit une suite (f_n) de recouvrements ouverts de $\bar{I} \in \mathcal{J}$, tels
 et diamètre (O) $\leq \frac{1}{n}$.

oit $\Phi_n = (\varphi_O^n)_{O \in f_n}$ une partition de l'unité sur $\bar{I}$ associée
oint initial de O. On pose :

$$X^n(t,\omega) = \sum_{O \in f_n} X_{t_O}(\omega)\, \varphi_O^n(t)$$

me $\varphi_O^n(\cdot)$ est nulle en dehors de O, et approximable unifor-
ctions **étagées** sur I, nulles en dehors de O, comme égale-
e simple sur Ω de variables aléatoires étagées $\mathcal{F}_{t_O}$ mesu-
irement prévisible.

Pour chaque ω soit α_ω un module de contin
sur $\bar{I}$.

$$\forall\ t \in \bar{I} \qquad X^n(t,\omega) - X(t,\omega) = \sum_{O \in f_n} (X_{t_O}(\omega) - X_t(\omega$$

soit :

$$1_I(t)\ .\ |X^n(t,\omega) - X(t,\omega)| \leq \alpha_\omega(\tfrac{1}{n})$$

D'où la convergence de $X^n(t,\omega)$ vers $X(t,\omega)$ partout sur I
la prévisibilité de X.

Proposition 2

Tout processus prévisible est adapté.

Démonstration

Il est immédiat de vérifier que $\mathcal{R}$ est un
$I_1 x F_1 \in \mathcal{R}$ et $I_2 x F_2 \in \mathcal{R}$ on a $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_{I_1} \cup \mathcal{F}_{I_2} \subset \mathcal{F}_{I_1 \cap I_2}$

d'où $$F_1 \cap F_2 \times I_1 \cap I_2 \in \mathcal{R},$$

et par suite la stabilité de $\mathcal{R}$ pour $\cap$.

De même si $I_1 x F_1 \subset I_2 x F_2$ on a :

$$I_2 x F_2 - I_1 x F_1 = (I_2 \setminus I_1) x F_2 \cup (I_1 x F_2 \setminus$$

Comme $I_2 - I_1 = \bigcup_{i=1}^{n} J_i \ ,\ J_i \in \mathcal{J} \ ,\ F_2 \in \mathcal{F}_{I_2} \subset \mathcal{F}_{I_1}$ et
on exprime $I_2 x F_2 - I_1 x F_1$ comme une union finie d'éléments d

Les éléments de $\mathcal{R}$ sont trivialement adapt
résulte immédiatement d'un argument de classe monotone. ■

ion 3

des prévisibles est engendrée par l'ensemble des processus
ires continues et à support compact.

ation

essus adaptés à trajectoires continues étant prévisibles
tion 1, il suffit de montrer que tout rectangle prévisible
a tribu engendrée par les processus continus adaptés à tra-
s à support compact. Or si O est un ouvert contenant I tel
on peut considérer une suite (O_n) décroissante d'ouverts
que $I = \bigcap_n O_n$. Comme $1_{O_n} = \sup_k \varphi_{nk}$ pour une suite convé-
continues $(\varphi_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ à supports dans O_n, les processus
t) étant par ailleurs adaptés, les processus $1_{O_n xF}$, et par
1_{IxF} appartiennent à la tribu engendrée par les processus
ires continues à support compact. D'où la proposition. ■

sures stochastiques :

appelle mesure stochastique d'ordre p une mesure μ définie
ans $L^P(\Omega,\mathcal{F},P)$ possédant la propriété suivante :

$$\mu(IxF) = 1_F \cdot \mu(Ix\Omega) \quad (\text{dans } L^P(\Omega,\mathcal{F},P) \qquad (S)$$

fonction sur $\mathcal{P}$, additive, à valeurs dans L^P).

notera $\int X d\mu$ l'intégrale d'un processus prévisible borné
valeurs dans $L^P(\Omega, ,P)$. Pour la définition d'une telle
[4] ou[1]). On rappelle seulement que si X est borné ≥ 0
$\int X_n d\mu = \int X d\mu$ (limite dans L^P).

3-6 : Mesures de Radon Stochastiques :

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des processus adaptés
trajectoires sont continues et tendent vers zéro à l'in
$||\cdot|| = \sup_{Ix\Omega} |.|$.

On appelle mesure de Radon stochastique
cation linéaire continue ℓ de $\mathcal{C}$ dans $L^P(\Omega,\mathcal{F},P)$ posséda

$$\varphi \in \mathcal{C},\ F \in \mathcal{F}, \text{ et } 1_F.\varphi \in \mathcal{C} \Rightarrow \ell(1_F.\varphi) = 1_F.\ell$$

II - THEOREME FONDAMENTAL

1 - Enoncé du théorème

Si μ est une mesure stochastique d'ordre p,
ℓ_μ de C dans L^P, définie par :

$$\ell_\mu(\varphi) = \int \varphi d\mu$$

est une mesure stochastique.

$\mu \to \ell_\mu$ est une isomètre algébrique de l'espa
les mesures stochastiques, sur l'espace vectoriel de t
Radon stochastiques.

2 - Lemme 1

Si X et Y sont prévisibles bornés, avec $0 \leq$

$F \in \mathcal{F}$ et $1_F.Y$ prévisible $\Rightarrow 1_F.X$ prévi

Démonstration

$$1_F.X = \inf(1_F Y, X)$$

évisible borné et μ une mesure stochastique :

prévisible $\Longrightarrow \int 1_F . X \, d\mu = 1_F . \int 1_F X \, d\mu$ p. 1

n

simplifier $< h,g > \; = \; \int h.gdP$.

la proposition nous montrons que si X est prévisible

$1_F . X = X$, alors pour tout $H \in \mathcal{F}$

$$P(H \cap F) = 0 \implies < 1_H \, , \, \int X d\mu > \; = \; 0$$

$$< 1_H \, , \, \int X d\mu > \; = \int X d\mu_H$$

éelle

$$\mu_H(A) = < 1_H, \, \mu(A) >$$

tion de cette mesure, nous avons finalement à montrer

:

$$P(H \cap F) = 0 \Longrightarrow \int X dm_H = 0$$

r que, pour la mesure positive m_H sur $\mathcal{P}$, la mesure in-

t nulle. S'il n'en était pas ainsi on pourrait trouver

e (A_n) extraite de l'anneau et engendrée par $\mathcal{R}$, telle

t $m_H(A_n) > \delta$. Or nous allons montrer que :

$$= \phi \Longrightarrow \lim_n m_H(A_n) = 0 \qquad (3\text{-}1)$$

par remarquer que chaque élément de $\mathcal{R}$, et donc de $\mathcal{A}$

ur m_H par des unions finies d'ensembles prévisibles

C est un compact de T.

L'implication (3-1) sera donc vraie si on prouve que pour

prévisibles de ce type on a :

$$(T \times H) \cap \bigcap_n \tilde{A}_n = \phi \Longrightarrow \lim_n m_H(\tilde{A}_n) = 0$$

Soit alors $\qquad H_n = \{ \, \omega : \bigcap_{k \leq n} \tilde{A}_k(\omega) \neq \phi \, \}$

On a d'une part $\tilde{A}_n \subset H_n \times T$

et d'autre part puisque les $(\tilde{A}_k(\omega))_k$ forment pour tout $\omega \in$

compacts d'intersection vide :

$$H \cap \bigcap_n H_n = \phi.$$

Enfin, pour tout rectangle prévisible $R \subset \tilde{A}_n$:

$$\mu(R) = 1_{H_n} \, . \, \mu(R_n)$$

et par suite :

$$m_H(\tilde{A}_n) = \sup_{R \subset \tilde{A}_n} | < 1_{H_n} \, . \, \mu(R), \, 1_H > |.$$

Comme la famille $\{ \, \mu(R) \, : \, R \subset \tilde{A}_n \, \}$ est bornée dans L^p, p >

$E(1_{H \cap H_n}) \to 0$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} m_H(\tilde{A}_n) = 0 \quad ∎$$

4 - Démonstration du Théorème

Le fait que ℓ_μ soit une mesure de Radon-Stochast

d'après la proposition précédente et les propriétés de cor

grale.

Pour montrer la réciproque il nous faut associer

Radon stochastique une mesure stochastique μ telle que pou

$$< \ell(f), v > \; = \int f \, d < \mu, v) >$$

construire une mesure μ, unique à valeurs dans L^p telle
Nous montrerons ensuite que c'est une mesure stochastique.
era.

donc la forme linéaire continue sur $\mathcal{C}$

$$\ell_v(\varphi) = < \ell(\varphi), v >$$

monter qu'on peut lui associer une mesure réelle μ_v

,

$$\ell_v(\varphi) = \int \varphi \, d\mu_v .$$

théorème de prolongement de DANIELL classique, il suffit
oute suite $\varphi_n \downarrow 0$ dans $\mathcal{C}$, on a :

$$\lim_{n} \sup_{\substack{g \in \mathcal{C} \\ 0 \leq g \leq \varphi_n}} | \ell_v(g) | = 0 \qquad (4\text{-}2)$$

ue en effet que la partie positive ℓ_v^+ et la partie néga-
sition de Rieg de ℓ_v se prolongent en des mesures posi-

$$F_{n,\varepsilon} = \{ \omega : \exists t \ \varphi_n(t,\omega) > \varepsilon \}$$

continuité des trajectoires de φ_n, et la séparabilité

$$1_{F_{n,\varepsilon}}(\omega) \,.\, (\varphi_n(t,\omega) \vee \varepsilon - \varepsilon) = \varphi_n(t,\omega) \vee \varepsilon - \varepsilon$$

$\omega) \rightsquigarrow 1_{F_{n,\varepsilon}}(\omega) \,.\, (\varphi_n(t,\omega) \vee \varepsilon - \varepsilon)$ est prévisible,

Comme $0 \leq g \leq \varphi \Rightarrow 0 \leq g \vee \varepsilon - \varepsilon \leq \varphi_n \vee \varepsilon - \varepsilon$, le l
montre que :

$1_{F_{n,\varepsilon}} (g \vee \varepsilon - \varepsilon)$ est prévisible

$$\ell(1_{F_{n,\varepsilon}} \,.\, (g \vee \varepsilon - \varepsilon)) = 1_{F_{n,\varepsilon}} \ell(1_{F_{n,\varepsilon}} \,.\, (g \vee \varepsilon -$$

Par suite :

$$\ell(g) = 1_{F_{n,\varepsilon}} \ell(g \vee \varepsilon - \varepsilon) + \ell(g - g \vee$$

$\forall v \in L^q$

$$< \ell(g), v > = < \ell(g \vee \varepsilon - \varepsilon), 1_{F_{n,\varepsilon}} \,.\, v > + \ell(g$$

$$| < \ell(g), v > | \leq || \ell(g \vee \varepsilon - \varepsilon) ||_p \,.\, || 1_{F_{n,\varepsilon}} \,.\, v ||_q +$$

La continuité de ℓ, le fait que :

$$|| g \vee \varepsilon - \varepsilon || \leq || \varphi_n \vee \varepsilon - \varepsilon || \leq || \varphi_p \vee \varepsilon -$$

et :

$$|| g - g \vee \varepsilon + \varepsilon || \leq \varepsilon$$

donnent, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\substack{0 \leq g \leq \varphi_n \\ g \in \mathcal{C}}} | < \ell(g), v > | \leq \text{Constante } \varphi \, || 1_{F_{n,\varepsilon}} \,.\, v |$$

La condition $\varphi_n \downarrow 0$ impliquant :

$$\forall \varepsilon \qquad \bigcap_n F_{n,\varepsilon} = \phi$$

On a démontré la relation (4-2).

μ_v la mesure réelle associée à la forme linéaire ℓ_v.
A) étant clairement linéaire pour tout $A \in \mathcal{P}$, on notera
$)^*$ (dual algébrique de L^q) associé à cette forme linéaire.

édiatement que si pour un $v \in L^q$ et $\alpha > 0$ on a :

$$\sup_{\substack{0 \leq f \leq 1 \\ \varphi \in \mathcal{C}}} < \mu(\varphi), v > \;\leq \alpha$$

$$< \mu(A), v > = \mu_v(A) \leq \alpha$$

que dans l'espace $(L^q)^*$, $\mu(A)$ appartient à l'enveloppe
$\mathcal{C}$ $0 \leq \varphi \leq 1\} \subset L^p \subset (L^q)^*$ pour la topologie $\sigma((L^q)^*, L^q)$.

) : $\varphi \in \mathcal{C}$, $0 \leq \varphi \leq 1$ } est continue dans une boule de
t compacte pour $\sigma(L^p, L^q)$ on a $\mu(A) \in L^p$.

donc construit une application additive de $\mathcal{P}$ dans L^p,
$\in L^q$ $< \mu, v >$ soit une mesure réelle vérifiant (4-1).
de PETTIS sur σ additive faible et σ additive forte,
esure à valeurs de L^p, pour laquelle (4-1) est vraie.

uver que $\forall\, IxF \in \mathcal{R}$ on a :

$$\mu(IxF) = 1_F\, \mu(IxF)$$

suite croissante telle que $\varphi_n \uparrow 1_I$ $\varphi_n \in \mathcal{C}$

t comme dans le lemme $(t,\omega) \rightsquigarrow 1_F(\omega)\varphi_n(t)$ est adapté à
s à support compact, donc dans $\mathcal{C}$. On en déduit immé-

$) \; \ell(1_F \cdot \varphi_n) = 1_F \lim_n (L_p) \int 1.\varphi_n d\mu = 1_F\, \mu(1x\Omega)$.

III - MESURES STOCHASTIQUES PRODUITS

1 - Bases de champs aléatoires - Bases produits

Considérons 2 systèmes :

$$(\Omega, \mathcal{F}, P, T_1, \mathcal{J}_1 (\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{J}_1} , (\mathcal{F}_t)_{t \in T_1})$$

et :

$$(\Omega, \mathcal{F}, P, T_2, \mathcal{J} (\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{J}_2} , (\mathcal{F}_t)_{t \in T_2})$$

tel que définis en I-1 et avec les propriétés I-2

Posons $T = T_1 x T_2$ $\qquad \mathcal{J} = \{ I_1 x I_2 : I_1 \in \mathcal{J}, \; I_2 \in$

$$\mathcal{F}_{(t_1,t_2)} = \mathcal{F}_{t_1} \vee \mathcal{F}_{t_2}$$

$$\mathcal{F}_{I_1 x I_2} = \bigcap_{(t_1,t_2) \in I_1 x I_2} \mathcal{F}_{(t_1}$$

Il est immédiat que $(\Omega, \mathcal{F}, P, T, \mathcal{J}, (\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{J}}, (\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{J}} (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ s

Enfin si t_1 est un point initial de I_1, t_2 un point initial

$$\mathcal{F}_{(t_1,t_2)} = \mathcal{F}_{t_1} \vee \mathcal{F}_{t_2} = \mathcal{F}_{I_1} \vee \mathcal{F}_{I_2} \subset \mathcal{F}_{I_1 x I}$$

D'où (t_1,t_2) est un point initial de $I_1 x I_2$.

Si on appelle base de champ aléatoire un système $(\Omega, \mathcal{F}, P, T,$
tel que défini en (I-1) et vérifiant les hypothèses de I-2

$$\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, P, T_1 x T_2 = T \; (\mathcal{F}_{I_1 x I_2}), \; (\mathcal{F}_t$$

est appelé base produit des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ définies par (1-
tivement. On notera $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \underset{s}{\otimes} \mathcal{B}_2$

<u>ochastiques produits</u>

= 1,2) est une mesure stochastique d'ordre $p_i > 2$ définie
s prévisibles d'une base $\mathcal{B}_i$, on dit qu'une mesure stochas-
vec $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ définie sur la tribu $\mathcal{P}$ des prévisibles de
st la mesure stochastique produit de μ_1 et μ_2 si pour tout
$_2$ on a :

$$ {}_2 \times F_1 \cap F_2) = \mu_1(I_1 x F_1) \cdot \mu_2(I_2 x F_2) \in L^p \qquad (2\text{-}1)$$

gles prévisibles particuliers $I_1 x I_2 \times (F_1 \cap F_2)$ engendrant
$\mathcal{P}$ (puisque les ensembles $F_1 \cap F_2$ engendrent $\mathcal{F}_{I_1} \vee \mathcal{F}_{I_2}$), si
μ_1 et μ_2 existe,elle est unique.

2

$_2$ sont 2 mesures stochastiques d'ordre p_1 et $p_2 > 2$ sur
sociées au même espace fondamental $(\Omega,\mathcal{F},P)$, et si μ_2
ée, il existe une mesure stochastique produit unique μ
$\otimes_s \mathcal{B}_2$, d'ordre p avec $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$.

<u>ion</u>

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

gles $I_1 x F_1 x I_2 x F_2$ engendrant la tribu $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ dans
facile de voir que **l'application**

$$I_1 x F_1 x I_2 x F_2 \rightsquigarrow < \mu_1(I_1 x F_1) . \mu_2(I_2 x F_2) , v >$$

esure réelle $\tilde{\mu}_v$ sur $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$.

Mais si $F_1 \cap F_2 = \phi$ on a $\tilde{\mu}_v(I_1 x F_1 x I_2 x F_2) = 0$. Si Δ est la di
la mesure intérieure de $T_1 x T_2 x \complement \Delta$ pour μ_v est donc nulle. S
de façon naturelle $T_1 x T_2 x \Delta$ et $T_1 x T_2 x \Omega$, par l'application b
$(t_1, t_2, (\omega,\omega)) \overset{\Psi}{\longleftrightarrow} (t_1, t_2, \omega)$, la trace de $I_1 x I_2 x F_1 x F_2$ sur Δ s
$I_1 x I_2 x F_1 \cap F_2$, la tribu trace sur $T_1 x T_2 x \Delta$ de $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ s'ident
des prévisibles $\mathcal{P}$ de $\mathcal{B}$, et par suite, l'image par Ψ de la
est une mesure μ_v sur $\mathcal{P}$ prolongeant la fonction μ_v définie
$I_1 x I_2 x F_1 \cap F_2$ par :

$$\mu_v(I_1 x I_2 x F_1 x F_2) = < \mu_1(I_1 x F_1) \cdot \mu_2(I_2 x F_2) , v >$$

On achève la démonstration de l'existence de μ e
l'application $A \rightsquigarrow \mu(A)$ à valeurs dans $(L^q)^*$ (Dual algébri
par $< \mu(A), v > = \mu_v(A)$, et en utilisant la réflexivité de
fin de la démonstration du théorème 1.

REFERENCES

A general bilinear vector Integral
Studia Math. 15 p. 337-352 (1956)

Linear Operators Part I - Interference

C Ann. Inst. Id. Poincaré
Vol. X n° 3 (1974) p. 355-367

Mesures vectorielles et Intégrale stochastique.
Séminaire Rennes - Juin 1972

Sur l'Intégrale Stochastique et la décomposition de
Doob-Meyer. Asterisque 1973 n° 9.