Pierre Calladine

Critère de récurrence pour les marches aléatoires dans les groupes abéliens dénombrables

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 15-19
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A13_0>

RECURRENCE POUR LES MARCHES ALEATOIRES
LES GROUPES ABELIENS DENOMBRABLES

(Pierre CALLADINE)

er et Kesten, dans [1] ont donné le critère suivant :
abélien dénombrable discret, μ une probabilité
, Γ le groupe dual de G , P la mesure de Haar
ui est compact) $\hat{\mu}$ la transformée de Fourier de μ :
currente $\Longleftrightarrow \int_\Gamma \mathcal{R}e\left[\frac{1}{1-\mu(\gamma)}\right] dP(\gamma) = +\infty$ (1)
e est de donner, dans le cas où G est une torsion
sont d'ordre fini) des critères s'exprimant directe-
. Les notations ci-dessus seront utilisées dans la
un groupe abélien dénombrable de torsion, μ une
ique sur G .
utiliserons le lemme suivant, dont la démonstration

.- Si G est un groupe abélien de torsion, dénom-
ne suite croissante $(G_n)_{n\geq 0}$ de sous-groupes finis
$G_o = \{0\}$, $|G_n/G_{n-1}| = \alpha_n$ où $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est une suite
, et telle que $G = \bigcup_{n\geq 0} G_n$.
ite $(G_n)_{n\geq 0}$ n'est évidemment pas unique, mais l'en-
prises par (α_n) ne dépend pas de $(G_n)_{n\geq 0}$. Nous
o fixée dans la suite.
$\Gamma_n = \{\gamma \in \Gamma / \gamma(g) = 1 , \forall g \in G_n\}$.
ite $(\Gamma_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de sous-
que $\bigcap_{n\geq 0} \Gamma_n = \{e\}$ où e est l'élément neutre de

(voir [3])

$$\int_\Gamma \mathcal{R}e\left[\frac{1}{1-\hat{\mu}(\gamma)}\right] dP(\gamma) = \sum_{n\geq 0}\int_{\Gamma_n-\Gamma_{n+1}} \mathcal{R}e\left[\frac{1}{1-\hat{\mu}(\right.$$

Nous démontrons les deux résultats suivants :

Théorème 1.- (condition suffisante de récurr

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1-\mu(G_n))}\left(1-\frac{1-\mu(G_{n+1})}{1-\mu(G_n)}\right)\left(1-\frac{\cos 2}{\alpha_{n+1}}\right.$

alors μ *est récurrente.*

Si la suite (α_n) *est bornée (S) devient*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1-\mu(G_n))}\left(1-\frac{1-\mu(G_{n+1})}{1-\mu(G_n)}\right) = +$$

Théorème 2.- (condition nécessaire de récurr

Si μ *vérifie la condition (A) suivante :*

$$\exists C > 0 , \exists n_o \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_o \quad \frac{\mu(G_{n+1})-\mu(G_n)}{1-\mu(G_n)} \geq$$

la récurrence de μ *implique la condition* (

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1-\mu(G_n))} \quad \frac{1}{(1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_{n+1}})} = +$$

(N) devient lorsque (α_n) *est bornée (N')*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1-\mu(G_n))} = +\infty$$

On peut préciser ces critères dans des cas particuli

Démonstration.- Pour obtenir (S), il faut

$\int_{\Gamma_n-\Gamma_{n+1}} \mathcal{R}e\left[\frac{1}{1-\hat{\mu}(\gamma)}\right] dP(\gamma)$; pour obtenir (N) il faut

. Pour $\gamma \in \Gamma$, $1-\hat{\mu}(\gamma) = \sum_{g\in G} \mu(g)(1-\gamma(g))$

. Si $\gamma \in \Gamma_n$, $1-\hat{\mu}(\gamma) = \sum_{g\notin G_n} \mu(g)(1-\gamma(g))$ et

$$|1-\hat{\mu}(\gamma)|^2 \leq 4 \left|\sum_{g\notin G_n} \mu(g)\right|^2 = 4\ |1$$

$-\hat{\mu}(\gamma)) \geqslant \sum_{g\in G_{n+1}-G_n} (1-\mathcal{R}e(\gamma(g)))\mu(g)$.

$-\Gamma_n$, γ est constant sur les classes de G_{n+1}

ue $G_{n+1}/G_n \simeq Z/\alpha_{n+1}\mathbb{Z}$ $(\alpha_n = |G_n/G_{n-1}|)$, pour

est de la forme $\exp(\frac{2i\pi k}{\alpha_{n+1}})$ où $1 \leqslant k \leqslant \alpha_{n+1}-1$.

$\Gamma_n-\Gamma_{n+1}$, $\forall g \in G_{n+1}-G_n$, $1-\mathcal{R}e(\gamma(g)) \geqslant 1 - \cos\frac{2\pi}{\alpha_{n+1}}$

$$e(1-\hat{\mu}(\gamma)) \geqslant (1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_{n+1}})(\mu(G_{n+1})-\mu(G_n)) \qquad (4)$$

$$]dP(\gamma) = \int_{\Gamma_n-\Gamma_{n+1}} \frac{\mathcal{R}e(1-\hat{\mu}(\gamma))}{|1-\hat{\mu}(\gamma)|^2}\, dP(\gamma)$$

$$\geqslant \int_{\Gamma_n-\Gamma_{n+1}} \frac{(1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_{n+1}})(\mu(G_{n+1})-\mu(G_n))}{4(1-\mu(G_n))^2}\, dP(\gamma)$$

$$\frac{{}_{+1}-1}{\cdot\cdot\alpha_{n+1}} = \frac{\alpha_{n+1}-1}{\alpha_{n+1}}\,\frac{1}{|G_n|} \qquad \frac{1}{2} \leqslant \frac{\alpha_{n+1}-1}{\alpha_{n+1}} \leqslant 1 \ .$$

suffisante (S)

$$\frac{1}{{}_n|(1-\mu(G_n))}\,(1 - \frac{1-\mu(G_{n+1})}{1-\mu(G_n)})(1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_{n+1}}) = +\infty$$

${}_{\geqslant 0}$ est bornée, $1-\cos\frac{2\pi}{n+1} \geqslant k > 0$, d'où (S') .

s'écrire

$$) \geqslant (1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_{n+1}})(1-\mu(G_n))\ \frac{\mu(G_{n+1})-\mu(G_n)}{1-\mu(G_n)}$$

vérifié, pour $n \geqslant n_o$

$$-)dP(\gamma) \leqslant \int_{\Gamma_n-\Gamma_{n+1}} \frac{1}{\mathcal{R}e(1-\hat{\mu}(\gamma))}\, dP(\gamma)$$

$$\leqslant \frac{1}{C(1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_{n+1}})(1-\mu(G_n))}\cdot\frac{\alpha_{n+1}-1}{\alpha_{n+1}}\ \frac{1}{|G_n|}$$

nce de la série ne dépend pas des n_o premiers termes

implique (N) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1-\mu(G_n))}\ \frac{1}{(1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_{n+1}})} = +\infty$$

qui implique (N') lorsque (α_n) est bornée.

. <u>Cas particulier</u>

La méthode employée ici permet de retrouver f

sultats obtenus dans [2] , dans des cas particuliers

<u>Exemple</u> : Soit $G = H \oplus (\bigoplus_{k=1}^{+\infty} Z/\beta_k\mathbb{Z})$ où (β_k) est u

premiers, et μ une probabilité sur G apériodique,

facteurs directs H, $Z/\beta_k\mathbb{Z}$ $(k = 1,\dots)$ (H est un g

la suite $(G_n)_{n\geqslant 0}$ on peut prendre une suite telle qu

$G_{n_o+m} = H \oplus (\bigoplus_{k=1}^{m} Z/\beta_k\mathbb{Z})$ $(\alpha_n = \beta_{n-n_o}$ $n > n_o)$

$$G = G_{n_o} \oplus (\bigoplus_{k=n_o+1}^{+\infty} Z/\alpha_n\mathbb{Z})$$

$$\Gamma = \hat{G}_{n_o} \times (\prod_{k=n_o+1}^{+\infty} Z/\alpha_k\mathbb{Z})$$

Pour $\gamma\in\Gamma$, $g\in G$, $\gamma = (\gamma_{n_o},\gamma_{n_o+1},\dots)$ $g = (g_{n_o},g_{n_o+1},$

Si $\gamma\in\Gamma_n - \Gamma_{n+1}$ $(n \geqslant n_o)$ $\gamma = (1,1,\dots 1, \gamma_{n+1},$

$$1-\hat{\mu}(\gamma) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (\sum_{\substack{g\in Z/\alpha_t\mathbb{Z} \\ g\neq 0}} \mu(g)(1-\gamma_k($$

Si $g\in Z/\alpha_k\mathbb{Z}$ $\gamma_k\in Z/\alpha_k\mathbb{Z}$ $\gamma_k(g) = \exp(\frac{2ip\pi}{\alpha_k})$ (1

d'où $$\mathcal{R}e(1-\hat{\mu}(\gamma)) \geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_k})(\mu(G_k)-\mu($$

Une condition suffisante de récurrence est donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1-\ (G_n))}\ \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left[(1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_k})(\mu(G_k)-\mu(G_k\right.}{(1-\mu(G_n))}$$

Si (α_n) est bornée, puisque $\sum_{k=n+1}^{+\infty}[\mu(G_n)-\mu(G_{n-1})] =$

re suffisant de récurrence est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1- (G_n))} = + \infty$$

hypothèses de (S"), sans que la condition (A) soit

e, pour n assez grand

$$] \, dP(\gamma) \leqslant \frac{\alpha_{n+1}-1}{\alpha_1 \cdots \alpha_{n+1}} \quad \frac{1}{\sum_{k=n+1}^{\infty} (1-\cos \frac{2\pi}{\alpha_k})(\mu(G_k)-\mu(G_{k-1}))}$$

ssaire de récurrence est donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1-\mu(G_n))} = + \infty$$

rs une condition nécessaire et suffisante de récurrence.

REFERENCES

d KESTEN H. *Random walk on countable infinite abelian* s. Acta Math. 5(1963), 237-264

PITT J. *Recurrence criteria for random walks on coun- abelian groups.*Illinois J. of Maths 18 (1974), 1-19

ROSS K. *Abstract Harmonic Analysis.* Springer-Verlag 1 (Berlin)

THEOREME CENTRAL LIMITE ET THEOREME CENTRAL LIMITE

SUR UN GROUPE DE LIE NILPOTENT

par H. HENNION

Le but de ce travail est de donner des dém plètes des théorèmes limites obtenus par V.N. Tutubal de prolonger l'un d'eux en un théorème central limite n'a pas été possible jusqu'ici d'en déduire des lois pour les marches aléatoires par application du princi

Hypothèses générales et notations.-

1. G est le groupe de Lie nilpotent de c munissant $\mathbb{R}^3$ du produit

$$(x,y,z)(x',y',z') = (x+x',y+y',z+z'+\frac{1}{2}(x$$

2. On considère sur G la distance invari à gauche (induisant la topologie initiale) définie pa

$$\sigma,\rho \in G \qquad d(\sigma,\rho) = q(\sigma^{-1}\rho)$$

où

$$q(\tau) = \sup\{|x|,|y|,|z|^{1/2}\} \qquad \text{si } \tau =$$

3. Les éléments aléatoires $(U_n,V_n,W_n)_n$ d sements successifs d'une marche aléatoire droite issu la position à l'instant n de cette marche est

$$(X_n,Y_n,Z_n) = (U_1,V_1,W_1)\dots(U_n,V_n,W_n)$$

avec

$$X_n = U_1 + \dots + U_n$$

$$Y_n = V_1 + \dots + V_n$$

$$Z_n = W_1 + \dots + W_n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (X_{i-1}V_i-Y$$