PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

P. ROUGEROL

P. CREPEL

Théorèmes de renouvellement pour les marches aléatoires sur les groupes localement compacts

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A12_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ES DE RENOUVELLEMENT POUR LES MARCHES ALEATOIRES
SUR LES GROUPES LOCALEMENT COMPACTS

(P. BOUGEROL - P. CREPEL)

t article constitue une rédaction de l'exposé fait par
au séminaire de Théorie du Potentiel à Paris, le 23
ne prétend pas à l'originalité, mais espère faire un survol
ents obtenus par les probabilistes dans le domaine

idère un groupe localement compact à base dénombrable
e point à l'infini du compactifié d'Alexandrov de G .
$_K^+(G)$) l'espace des fonctions continues à support com-
s) sur G .
ne la mesure de Haar à gauche sur G .
ussi, pour $a \in G$, σ_a(resp. τ_a) l'application qui à
sur G fait correspondre la fonction $x \mapsto f(ax)$
).

ignera dans la suite une probabilité apériodique sur
-groupe fermé engendré par le support de μ est G
pelons que si l'on pose $P(x,.) = \mu * \varepsilon_x$, alors P
ransition d'une marche aléatoire gauche de loi μ .

μ^{*n} et $U(x,.) = u * \varepsilon_x = \sum_{n \geq 0} P^n(x,.)$

(On notera $\hat{P}$, $\hat{U}$ ... les mêmes quantités lorsqu'el
non plus à la probabilité μ , mais à l'image $\hat{\mu}$ de
té par l'application $x \mapsto x^{-1}$).

I désigne l'opérateur identité : $f \mapsto f$

Présentation du problème.-

- On s'intéresse au problème formulé de mani
comme suit :

*Soit f une fonction assez régulière, trouv
de l'équation de Poisson (E) : $(I-P)g = f$, et étudi
de $g(x)$ quand $x \to \Delta$.*

- Rappel : on sait que si μ est apériodiqu
ment sont possibles pour l'étude de u :

* ou bien u est une mesure de Radon (on d
che de loi μ est transitoire)
* ou bien $u(A) = +\infty$ pour tout ouvert non
dit alors que la marche de loi μ est

- Nous distinguerons ces deux cas dans la su

1) Dans le cas où μ est transitoire (cf
problème essentiel est le suivant : si
$Uf = \sum_{n \geq 0} P^n f$ est solution uniformément continue à d
Nous nous contenterons alors d'étudier les valeurs d
semble des mesures de Radon $U(x,.)$ quand $x \to \Delta$

Rappelons à ce sujet les résultats classique
tenant compte du fait que, si $d \geq 3$, toutes les ma
toires, et que, si $d \leq 2$, certaines marches sont r
nes sont transitoires).

as transitoire :

téristiques de la loi	comportement de $Uf(x)$ quand $x \to \Delta$
$\|x\| \mu(dx) < \infty$ t $c = \int x\, \mu(dx)$, alors si μ est transitoi- sons $c > o$	$Uf(x) \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \to +\infty \\ \dfrac{m(f)}{c} & \text{si } x \to -\infty \end{cases}$
$\|x\| \mu(dx) = +\infty$ upposée transitoire	$Uf(x) \to o$
pposée transitoire	$Uf(x) \to o$
μ quelconque	$Uf(x) \to o$

as où μ est récurrente (cf. chapitre II), on ne sait
er les solutions de l'équation de Poisson, même sous
de régularité sur f .

si l'on suppose que μ est récurrente au sens de
si l'on fait sur μ l'hypothèse supplémentaire
.q. μ^{*n_o} non étrangère par rapport à m] , alors
permet sous des hypothèses convenables sur f de
de Poisson et d'étudier le comportement à l'infini

I - MÉTHODES ET RESULTATS DE LA THEORIE DU RE
TRANSITOIRE SUR LES GROUPES LOCALEMEN

1.- Méthode de Feller

Historiquement, le problème fut d'abord
puis pour les groupes abéliens par des méthodes uti
formée de Fourier cf(1) (2); nous n'en dirons rien c
inaugurée par Feller permet non seulement de résoud
d'atteindre une classe beaucoup plus large de group

Considérons les deux hypothèses distinc
suivantes

- H_1 . G est abélien
- H_2 .. G est un groupe unimodulaire
  .. μ est étalée
  .. les fonctions harmoniques bornées pour P
  tantes

On voit aisément que sous H_1 ou H_2
d'adhérences de $U(x,.)$ quand $x \longrightarrow \Delta$ (point à
tifié d'Alexandrov de G) sont des multiples de la

A l'aide de la théorie du potentiel (en
lisant le fait que U satisfait au principe du max
que

Théorème.- Sous H_1 ou H_2 l'ensemble $\{U(x,.)$,
la mesure nulle comme valeur d'adhérence à l'infini.
une autre valeur d'adhérence, ce sera un multiple de
(cf. (3)-(4)-(5))

On déduit de ce théorème trois corollai

1.- Cas des groupes abéliens

. S'il existe sur G , groupe abélien, u
telle que $U(x,.)$ ne tend pas vers zéro quand x

G est de la forme $\mathbb{R} \oplus K$ ou $\mathbb{Z} \oplus K$ et si ψ
ion de G dans R (resp. Z) il y a deux cas

$|\psi(x)|\ d\mu(x) = \infty$ et alors $(x,.) \to 0$

$|\psi(x)|\ d\mu(x) < +\infty$, notons alors $\lambda = \int_G \psi(x)\ d\mu(x)$

$(x,.) = \frac{1}{\lambda}\, x$ (mesure de Haar normalisée) , $\lim\limits_{x\to-\infty} U(x,.) = 0$

$(x,.) = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} U(x,.) = \frac{1}{|\lambda|}\, x$ (mesure de Haar normalisée)

nilpotents (5)

μ une probabilité étalée apériodique sur un groupe
tion compacte, si G n'est pas isomorphe à l'exten-
d'un groupe compact, $U(x,.) \to 0$ quand $x \to \Delta$.

s de type R (5)

G un groupe de Lie connexe unimodulaire moyennable
ients, si μ est étalée apériodique, et si G n'est
r $\mathbb{R}$ d'un groupe compact, $U(x,.) \to 0$ quand $x \to \Delta$.

où G possède un sous groupe distingué compact K
isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$, si π désigne la surjective
ur $G/_K$, le comportement de $U(x,.)$ se déduit du
tentiel de loi $\pi(\mu)$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

ale

diant le rayon spectral de l'opérateur P considéré
(G,m), on démontre que si G n'est pas moyennable
r borné sur L^2 . En utilisant le fait que si Uf
ive à support compact Uf est uniformément continue
nt :

Théorème.- Si G n'est pas moyennable, $U(x,.) \to 0$
(cf. (6))

3.- Méthode des fonctions barrières

Cette méthode s'appuie sur le lemme sui

Lemme.-

Supposons qu'il existe, pour tout compa
fonction borélienne v définie sur G à valeur dan

$$\lim_{\lambda\to\Delta} v(\lambda) = 0 \ , \ \sup_{\lambda\in K} v(\lambda) > 0$$

$$\forall \lambda \notin K \qquad \int v(\lambda x)\ d\mu(x) \le v(\lambda)$$

Alors, $\forall f \in C_K^+(G)$, $\exists \gamma \in R$ tel que $\forall \lambda \in G$, $|Uf(\lambda)|$

Ce lemme provient de la théorie des dif
l'appellation "fonction barrière". En construisan
satisfaisantes on démontre les deux théorèmes suiva

Théorème 1.-

Soit G un groupe de Lie nilpotent sim
dimension supérieure ou égale à 3 . S'il existe δ
un moment d'ordre $1 + \delta$, $U(x,.) \to 0$ quand $x \to \Delta$

Théorème 2.-

Soit $G = SO(d) \times \mathbb{R}^d$, $d \ge 3$, le groupe
de $\mathbb{R}^d$. Soit μ une probabilité apériodique sur G

$$\int_{SO(d)\times\mathbb{R}^d} ||y||^{2+\delta}\ d\mu(x,y) < +$$

pour un δ strictement positif.

Alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$\forall h \in C_K^+(G)$, $\exists C \ge 0$ tel que $|Uh(x,y)| \le \dfrac{C}{||y||^\alpha}$

$\left[g \in G \right.$ est noté (x,y) avec $x \in So(d)$ et $\left. y \in \mathbb{R}^d \right]$

Guivarc'h

pe de la méthode

érons le groupe $G = \left\{ \begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&0\end{pmatrix} , a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$.

ont démontré, sous des hypothèses d'apériodicité,
ocier à μ deux classes de fonctions $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$
t ν une probabilité transitoire sur $\mathbb{R}^3$ apério-

$\forall f \in \mathcal{C}', \exists g \in \mathcal{C}$ tel que $\mu^{*n}(f) \leq \nu^{*n}(g)$.

ux classes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ s'avèrent assez riches pour
ment du potentiel de μ en fonction de celui de ν ,
que ν est apériodique sur $\mathbb{R}^3$, que le potentiel
'infini.

t cette méthode Keane et Guivarc'h ont démontré que

G un groupe localement compact nilpotent à géné-
i G n'est pas extension par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ d'un
noyau potentiel de toute probabilité apériodique
'infini.

iliste

lisant des méthodes dues à Spitzer, on démontre que
ert relativement compact K vérifiant

$$\sup_{x \in G} U(x K x^{-1}) < +\infty$$

rique, le potentiel tend vers zéro à l'infini.

rque que les seules classes de groupes dont on
le renouvellement sont les groupes abéliens,
nts, les groupes non-moyennables.

Notons que Laure Elie (10) a démontré qu'i
babilités sur le groupe affine de la droite "ax+b"
U (x,.) a une infinité de valeurs d'adhérences possi
d'une mesure de Haar quand x tend vers Δ . On est
d'une théorie générale du renouvellement.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

1. H. Kesten - F. Spitzer *"Random walks on coutabl groups"* Acta Mathematica 74 (1963)

2. S. Port - C. Stone *"Potential theory of random groups"* Acta Mathematica 122 (1969)

3. W. Feller *"An introduction to probability theo cation"* II Wiley (1962)

4. C. Herz *"Théorèmes de renouvellement"* Ann. Ins

5. A. Brunel - D. Revuz *"Sur la théorie du renouv groupes non abéliens"* à paraître dans Israe

6. Y. Derriennic - Y. Guivarc'h *"Théorème de reno groupes non moyennables"* C.R.A.S. t. 277 (1

7. B. Roynette - M. Sueur *"Marches aléatoires sur tent"* Zeit. für Wahrscheinlichkeitstheorie

8. B. Roynette *"Marches aléatoires sur le groupe de R^d "* Zeit. für Wahrscheinlichkeitstheor

9. M. Keane - Y. Guivarc'h *"Un théorème de renouv groupes nilpotents"* Séminaire KGB Astérisq

10. L. Elie *"Théorème de renouvellement pour certa lubles"* à paraître

THEORIE DU RENOUVELLEMENT RECURRENT

s seulement un bref résumé de trois (gros) articles (12) qui traitent la question en détail (nous affai-
sultats afin de les rendre plus accessibles).

ion de Poisson.-

chaîne de Markov P associée à une marche récurrente on peut trouver une fonction h comprise entre 0
teur positif W_h tel que $^{(*)}$:

$$(A)\quad \begin{cases} P + P\,W_h = W_h + \dfrac{Ph}{m(h)} \otimes m \\ P + W_h\,P = W_h + \dfrac{1}{m(h)} \otimes (h.m)P \end{cases}$$

(G) ; si $m(f) = 0$, alors $(I-P)(I+W_h)f = f$, donc
olution uniformément continue à droite, bornée de
f. 11)
est un noyau de convolution et $I+W_h$ n'en est pas
h
n voudrait se débarrasser de la condition $m(f) = 0$.

ors amené à associer à P et à h une fonction γ_h
h , on associe $\check{\gamma}_h$) telle que le noyau
$A = I + W_h - 1 \otimes \check{\gamma}_h \,.\, m - \gamma_h \otimes m$
un noyau de convolution
tel que $g = Af$ est solution de (E) pour toute fonc-
$f \in C_K(G)$.
er aussi que, sous de bonnes conditions, le choix
n'est pas très important).

fonction sur G et ν une mesure sur G , l'opéra-
défini par $(\varphi \otimes \nu)(x,A) = \varphi(x).\nu(A)$.

- "Unicité" des solutions de l'équation de P

On peut montrer le résultat suivant :

Si $f \in C_K$, si $(I-P)g_1 = (I-P)g_2 = f$ et si $\forall a \in G$
est borné, alors :

$$g_1 - g_2 = k + X \quad \text{où} \begin{cases} k \text{ est une cons} \\ X \text{ est un carac} \\ \quad G \text{ tel que} \\ \quad m\text{-intégrabl} \end{cases}$$

✱ Marches de types I, I', II :

On dira qu'une marche est de type II s'i
tère réel (additif) X (qu'on normalisera convenabl
$P|X| - |X|$ soit m-intégrable.

- une marche est de type II ssi
  1°) G est une extension d'un groupe comp
  2°) $\sigma^2 = \int X^2 \, d\mu < \infty$

- une marche est de type I' ssi
  1°) elle n'est pas de type II
  2°) il existe un sous groupe G_0 disting
  G/G_0 ait deux éléments et que la mar
  G_0 soit de type II

- une marche qui n'est ni de type II, ni de t
  de type I

N.B. Nous appellerons
- groupes de type II : les extensions d'un group
  ou $\mathbb{Z}$ (ex : $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$)

e_type_I' : les extensions d'ordre 2 des précédents (mais qui ne soient pas du type précédent) (ex : symétries et translations de $\mathbb{R}$)

e_type_I : les autres groupes récurrents (ex : $\mathbb{R}^2$, déplacements du plan)

ité

C_K^+ , on a $\sum_{k=1}^{n} P^k f = +\infty$, par contre si $f \in C_K$,

peut que $\sum_{k=1}^{n} P^k f$ converge quand n tend vers l'in-

as, on dit que la chaîne est normale.

ident, à partir de (A) , que si $f \in C_K$ et $m(f) = 0$

$W_h f - P^n W_h f$.

e la normalité se ramène donc à l'étude quand $n \to \infty$

ellement

$f \in C_K$, alors

$$(x) + W_h f(x) - \underbrace{\int \hat{\gamma}_h \cdot f \cdot dm - \gamma_h(x)\, m(f)}_{\text{constante}}$$

$\downarrow$
(si $x \to \Delta$)

onc que, lorsque $x \to \Delta$, deux problèmes se posent.

omportement de $Af(x)$:

$f) = 0$: étude du comportement de $W_h f(x)$

: étude du comportement de $\gamma_h(x)$. ($W_h f$ est uniformé-

ontinue à droite, bornée)

ultats sont alors consignés dans le tableau général

Récurrence du groupe	Classification des groupes	Croissance	Exemples de groupes	Marches transitoires (comportement de U) $x \to \Delta$	Marches … (compor…
Groupes compacts (toutes marches récurrentes)	compacts	0	cercle		sans …
Groupes récurrents non compacts (il existe des marches récurrentes et des marches transitoires)	groupe de type I (extension d'un groupe compact par R ou Z)	pol. deg 1	$\mathbb{R}, \mathbb{Z}$	- Si l'espérance est infinie : $Uf(x) \to 0$ $(x \to \Delta)$ - Si l'espérance E est finie ($E > 0$ par ex) $Uf(x) \to \begin{cases} 0 & (x \to +\infty) \\ \frac{m(f)}{E} & (x \to -\infty) \end{cases}$	- Si $\sigma^2 = \infty$ (type I) $\to$ - Si $\sigma^2 < \infty$ (type II) $\nearrow$
	groupe de type I' (extension d'ordre 2 des précédents)	pol. deg 1	transl. et sym. de R ou Z	Conj $Uf(x) \to 0$ $(x \to \Delta)$	- Si $\sigma^2 = \infty$ (type I) $\to$ - Si $\sigma^2 < \infty$ (type I')
	groupe de type I (autres groupes récurrents non compacts)	pol. deg 1,2	$\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}^2$ dépl. du plan	Conj $Uf(x) \to 0$ $(x \to \Delta)$ démontré pour les groupes abéliens, et dans le cas général (sous condition d'étalement)	$W_h f(x)$ … $\gamma(x)$ …
Groupes transitoires (toutes marches transitoires)	moyennables	pol deg ≥3	- $\mathbb{R}^d$ $d \geq 3$ - dépl. de $\mathbb{R}^d$ - nilpotents	Conj : $Uf(x) \to 0$ $x \to \Delta$ démontré pour $\mathbb{R}^d$, pour les groupes nilpotents transitoires, pour les déplacements de $\mathbb{R}^d$ (sous une condition de moment ou d'étalement), pour certains groupes unimodulaires (sous condition	
		exp	groupe affine de $\mathbb{R}$ "$ax+b$"	situations très diverses : exemple de résultat : selon le signe de l'intégrale $\int \log a(g)\, \mu(dg)$ $Uf(x) \to 0$ $(x \to \Delta)$ ou $Uf(x)$ a une infinité de valeurs d'adhérence obtenues à partir d'une mes. invariante de Haar.	
	non moyennables	exp	- $SL(n, \mathbb{R})$ - groupe libre à r générateurs	$Uf(x) \to 0$ $(x \to \Delta)$	

démonstrations

ons un bref squelette des démonstrations de la nor-

W_h f) et du premier problème du renouvellement

quand $a \to \Delta$)

est écrit de manière un peu télégraphique, et sert

à lire les articles de Brunel et Revuz).

e pour étudier la marche P , on a intérêt à étu-

a marche $\hat{P}$.

ns parallèles : tableau page suivante

BIBLIOGRAPHIE

tentiel markovien récurrent des chaînes de Harris"
. Four. (1972)

Revuz *"Marches aléatoires récurrentes sur les*
lement compacts" I, II et III . à paraître aux
'E.N.S.

DEMONSTRATIONS PARALLELES

Normalité (comportement de $P^n W_h f$)	Renouvellemen
1ère étape : $P^n W_h f$, $\hat{P}^n \hat{W}_h f$ borné; $W_h P^n f$, $\hat{W}_h \hat{P}^n f$ borné sur les compacts; unif. équi-continu sur tout compact	$\sigma_a W_h f$, $\sigma_{a^{-1}} W_h f$ borné $W_h \sigma_a f$, $W_h \sigma_{a^{-1}} f$ borné su les compacts
Conséquence de la 1ère étape : De toute suite, on peut extraire une suite n_j t.q. les quatre quantités convergent simultanément sur tout compact et pour tout $f \in C_K$	idem : suite
2ème étape : $\lim_j P^{n_j} W_h f = C^{te}$	$\lim_n \sigma_{a_n} W_h f = C^{t}$ (facile pour le ty pour le type I,
3ème étape : $W_h P^{n_j} f(x) \longrightarrow \gamma^s(x).m(f)$ où $\gamma^s \geq 0$ unif. cont. à droite vérifie : . $(I-\tau_a)\gamma^s$ borné . $P\gamma^s - \gamma^s = \frac{Ph}{m(h)}$ en fait γ^s ne dépend pas de s i.e. $W_h P^n f \longrightarrow \gamma(x).m(f)$ $P^n W_h f \longrightarrow \int f.\hat{\gamma}\, dm$ (par dualité)	$W_h \sigma_{a_n} f \longrightarrow \Gamma^s($ où Γ^s dépend $\Gamma^s = \gamma \pm \frac{x}{\sigma^2}$ ty $\Gamma^s = \gamma$ ty $\sigma_a W_h f \longrightarrow \int f \gamma$; $\longrightarrow \int(\hat{\gamma} \pm$

b) Marches de type II comportement de γ : (.

c) Marches de type I' : (...)

d) Marche de type I : (...)