PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

P. ROUGEROL

P. CREPEL

Théorèmes de renouvellement pour les marches aléatoires sur les groupes localement compacts

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A12_0>

THEOREMES DE RENOUVELLEMENT POUR LES MARCHES ALEATOIRES SUR LES GROUPES LOCALEMENT COMPACTS

(P. BOUGEROL - P. CREPEL)

Introduction.-

Le présent article constitue une rédaction de l'exposé fait par l'un des auteurs au séminaire de Théorie du Potentiel à Paris, le 23 janvier 1975. Il ne prétend pas à l'originalité, mais espère faire un survol des résultats récents obtenus par les probabilistes dans le domaine cité en titre.

Notations.-

- On considère un groupe localement compact à base dénombrable G. On note Δ le point à l'infini du compactifié d'Alexandrov de G. On note $C_K(G)$ $(C_K^+(G))$ l'espace des fonctions continues à support compact (et positives) sur G.

m désigne la mesure de Haar à gauche sur G.

On note aussi, pour $a \in G$, σ_a(resp. τ_a) l'application qui à une fonction f sur G fait correspondre la fonction $x \mapsto f(ax)$ (resp. $x \mapsto f(xa)$).

- μ désignera dans la suite une probabilité apériodique sur G. (i.e. le sous-groupe fermé engendré par le support de μ est G tout entier). Rappelons que si l'on pose $P(x,.) = \mu * \varepsilon_x$, alors P est le noyau de transition d'une marche aléatoire gauche de loi μ. On notera

$$u = \sum_{n \geq 0} \mu^{*n} \quad \text{et} \quad U(x,.) = u * \varepsilon_x = \sum_{n \geq 0} P^n(x,.)$$

(On notera $\hat{P}$, $\hat{U}$ ... les mêmes quantités lorsqu'elles sont relatives, non plus à la probabilité μ, mais à l'image $\hat{\mu}$ de cette probabilité par l'application $x \mapsto x^{-1}$).

I désigne l'opérateur identité : $f \mapsto f$

Présentation du problème.-

- On s'intéresse au problème formulé de manière un peu vague comme suit :

Soit f une fonction assez régulière, trouver les solutions de l'équation de Poisson (E) : $(I-P)g = f$, et étudier le comportement de $g(x)$ quand $x \to \Delta$.

- Rappel : on sait que si μ est apériodique, deux cas seulement sont possibles pour l'étude de u :

* ou bien u est une mesure de Radon (on dit alors que la marche de loi μ est transitoire)
* ou bien $u(A) = +\infty$ pour tout ouvert non vide A de G (on dit alors que la marche de loi μ est récurrente).

- Nous distinguerons ces deux cas dans la suite

1) Dans le cas où μ est transitoire (cf. chapitre I), le problème essentiel est le suivant : si $f \in C_K(G)$, $Uf = \sum_{n \geq 0} P^n f$ est solution uniformément continue à droite bornée de (E). Nous nous contenterons alors d'étudier les valeurs d'adhérence de l'ensemble des mesures de Radon $U(x,.)$ quand $x \to \Delta$.

Rappelons à ce sujet les résultats classiques pour $G = \mathbb{R}^d$ (en tenant compte du fait que, si $d \geq 3$, toutes les marches sont transitoires, et que, si $d \leq 2$, certaines marches sont récurrentes et certaines sont transitoires).

Tableau : $G = \mathbb{R}^d$, cas transitoire :

dimension	caractéristiques de la loi	comportement de $Uf(x)$ quand $x \to \Delta$
$d = 1$	1) $\int \lvert x \rvert \, \mu(dx) < \infty$ Soit $c = \int x \, \mu(dx)$, alors $c \neq o$ si μ est transitoire, disons $c > o$	$Uf(x) \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \to +\infty \\ \dfrac{m(f)}{c} & \text{si } x \to -\infty \end{cases}$
	2) $\int \lvert x \rvert \, \mu(dx) = +\infty$ μ supposée transitoire	$Uf(x) \to o$
$d = 2$	μ supposée transitoire	$Uf(x) \to o$
$d \geq 3$	μ quelconque	$Uf(x) \to o$

2) <u>Dans le cas où</u> μ <u>est récurrente</u> (cf. chapitre II), on ne sait pas en général trouver les solutions de l'équation de Poisson, même sous de bonnes hypothèses de régularité sur f .

Par contre, si l'on suppose que μ est récurrente au sens de Harris, c'est-à-dire si l'on fait sur μ l'hypothèse supplémentaire d'étalement $\left[\exists n_o \text{ t.q. } \mu^{*n_o} \text{ non étrangère par rapport à } m \right]$, alors on a une théorie qui permet sous des hypothèses convenables sur f de résoudre l'équation de Poisson et d'étudier le comportement à l'infini des solutions.

I - <u>METHODES ET RESULTATS DE LA THEORIE DU RENOUVELLEMENT TRANSITOIRE SUR LES GROUPES LOCALEMENT COMPACTS</u>

1.- <u>Méthode de Feller</u>

Historiquement, le problème fut d'abord résolu pour $\mathbb{Z}$, puis pour les groupes abéliens par des méthodes utilisant la transformée de Fourier cf(1) (2); nous n'en dirons rien car une méthode inaugurée par Feller permet non seulement de résoudre ces cas mais d'atteindre une classe beaucoup plus large de groupes.

Considérons les deux hypothèses distinctes H_1 et H_2 suivantes

- H_1 . G est abélien
- H_2 .. G est un groupe unimodulaire
  .. μ est étalée
  .. les fonctions harmoniques bornées pour P et $\hat{P}$ sont constantes

On voit aisément que sous H_1 ou H_2 les seules valeurs d'adhérences de $U(x,.)$ quand $x \longrightarrow \Delta$ (point à l'infini du compactifié d'Alexandrov de G) sont des multiples de la mesure de Haar.

A l'aide de la théorie du potentiel (en particulier en utilisant le fait que U satisfait au principe du maximum) on démontre que

<u>Théorème</u>.- Sous H_1 ou H_2 l'ensemble $\{U(x,.), x \in G\}$ admet toujours la mesure nulle comme valeur d'adhérence à l'infini. Il y a au plus une autre valeur d'adhérence, ce sera un multiple de la mesure de Haar (cf.(3)-(4)-(5))

On déduit de ce théorème trois corollaires importants :

1.- <u>Cas des groupes abéliens</u>

. S'il existe sur G , groupe abélien, une probabilité μ telle que $U(x,.)$ ne tend pas vers zéro quand x tend vers Δ , G

. *Si G est de la forme $\mathbb{R} \oplus K$ ou $\mathbb{Z} \oplus K$ et si ψ désigne la projection de G dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Z}$) il y a deux cas possibles*

a) $\int_G |\psi(x)|\, d\mu(x) = \infty$ *et alors* $(x,.) \to 0$

b) $\int_G |\psi(x)|\, d\mu(x) < +\infty$, *notons alors* $\lambda = \int_G \psi(x)\, d\mu(x)$

Si $\lambda > 0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} U(x,.) = \frac{1}{\lambda}\, x$ *(mesure de Haar normalisée)* , $\lim\limits_{x\to-\infty} U(x,.) = 0$

Si $\lambda < 0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} U(x,.) = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} U(x,.) = \frac{1}{|\lambda|}\, x$ *(mesure de Haar normalisée)*

2.-Cas des groupes nilpotents (5)

Soit μ une probabilité étalée apériodique sur un groupe nilpotent à génération compacte, si G n'est pas isomorphe à l'extension par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ d'un groupe compact, $U(x,.) \to 0$ quand $x \to \Delta$.

3.- Cas des groupes de type R (5)

Soit G un groupe de Lie connexe unimodulaire moyennable ainsi que ses quotients, si μ est étalée apériodique, et si G n'est pas l'extension par $\mathbb{R}$ d'un groupe compact, $U(x,.) \to 0$ quand $x \to \Delta$.

N.B. Dans le cas où G possède un sous groupe distingué compact K tel que $G/_K$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$, si π désigne la surjective canonique de G sur $G/_K$, le comportement de $U(x,.)$ se déduit du comportement du potentiel de loi $\pi(\mu)$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

2.- Analyse spectrale

En étudiant le rayon spectral de l'opérateur P considéré cette fois sur $L^2(G,m)$, on démontre que si G n'est pas moyennable U est un opérateur borné sur L^2. En utilisant le fait que si Uf est continue positive à support compact Uf est uniformément continue à droite, on obtient :

Théorème.- Si G n'est pas moyennable, $U(x,.) \to 0$ quand $x \to \Delta$ (cf. (6))

3.- Méthode des fonctions barrières

Cette méthode s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme.-

Supposons qu'il existe, pour tout compact K de G, une fonction borélienne v définie sur G à valeur dans $[0,1]$ telle que

$$\lim_{\lambda\to\Delta} v(\lambda) = 0 \,,\quad \sup_{\lambda\in K} v(\lambda) > 0$$

$$\forall \lambda \notin K \qquad \int v(\lambda x)\, d\mu(x) \leq v(\lambda)$$

Alors, $\forall f \in C_K^+(G)$, $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall \lambda \in G$, $|Uf(\lambda)| \leq \gamma\, v(\lambda)$

Ce lemme provient de la théorie des diffusions ainsi que l'appellation "fonction barrière". En construisant des fonctions v satisfaisantes on démontre les deux théorèmes suivants : (7) - (8)

Théorème 1.-

Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe de dimension supérieure ou égale à 3 . S'il existe $\delta > 0$ tel que μ ait un moment d'ordre $1 + \delta$, $U(x,.) \to 0$ quand $x \to \Delta$.

Théorème 2.-

Soit $G = SO(d) \times \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$. Soit μ une probabilité apériodique sur G telle que

$$\int_{SO(d)\times\mathbb{R}^d} ||y||^{2+\delta}\, d\mu(x,y) < +\infty$$

pour un δ strictement positif.

Alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$\forall h \in C_K^+(G)$, $\exists C \geq 0$ tel que $|Uh(x,y)| \leq \dfrac{C}{||y||^\alpha}$ pour $|y|$ assez grand.

$[g \in G$ est noté (x,y) avec $x \in So(d)$ et $y \in \mathbb{R}^d]$

4.- Méthode Keane-Guivarc'h

Principe de la méthode

Considérons le groupe $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$.

Keane et Guivarc'h ont démontré, sous des hypothèses d'apériodicité, qu'on pouvait associer à μ deux classes de fonctions $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ et ν une probabilité transitoire sur $\mathbb{R}^3$ apériodique tels que

$$\forall f \in \mathcal{C}', \ \exists g \in \mathcal{C} \quad \text{tel que} \quad \mu^{*n}(f) \leq \nu^{*n}(g).$$

Ces deux classes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ s'avèrent assez riches pour donner le comportement du potentiel de μ en fonction de celui de ν, c'est-à-dire, puisque ν est apériodique sur $\mathbb{R}^3$, que le potentiel tend vers zéro à l'infini.

Suivant cette méthode Keane et Guivarc'h ont démontré que (9)

Théorème.- Soit G un groupe localement compact nilpotent à génération compacte. Si G n'est pas extension par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ d'un groupe compact, le noyau potentiel de toute probabilité apériodique tend vers zéro à l'infini.

5.- Méthode probabiliste

En utilisant des méthodes dues à Spitzer, on démontre que s'il existe un ouvert relativement compact K vérifiant

$$\sup_{x \in G} U(x\, K\, x^{-1}) < +\infty$$

et si μ est symétrique, le potentiel tend vers zéro à l'infini.

6.- Conclusion

On remarque que les seules classes de groupes dont on connaît entièrement le renouvellement sont les groupes abéliens, les groupes nilpotents, les groupes non-moyennables.

Notons que Laure Elie (10) a démontré qu'il existait des probabilités sur le groupe affine de la droite "ax+b" pour lesquelles $U(x,.)$ a une infinité de valeurs d'adhérences possibles non multiples d'une mesure de Haar quand x tend vers Δ. On est donc encore loin d'une théorie générale du renouvellement.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

1. H. Kesten - F. Spitzer *"Random walks on coutably infinite abelian groups"* Acta Mathematica 74 (1963)
2. S. Port - C. Stone *"Potential theory of random walks on abelian groups"* Acta Mathematica 122 (1969)
3. W. Feller *"An introduction to probability theory and its application"* II Wiley (1962)
4. C. Herz *"Théorèmes de renouvellement"* Ann. Inst. Four. 15,(1965) 169 188
5. A. Brunel - D. Revuz *"Sur la théorie du renouvellement pour les groupes non abéliens"* à paraître dans Israel Journal of Math.
6. Y. Derriennic - Y. Guivarc'h *"Théorème de renouvellement pour les groupes non moyennables"* C.R.A.S. t. 277 (1/10/73), 613
7. B. Roynette - M. Sueur *"Marches aléatoires sur un groupe nilpotent"* Zeit. für Wahrscheinlichkeitstheorie 30, (1974) 129-138
8. B. Roynette *"Marches aléatoires sur le groupe des déplacements de R^d"* Zeit. für Wahrscheinlichkeitstheorie 31 (1974), 25-33
9. M. Keane - Y. Guivarc'h *"Un théorème de renouvellement pour les groupes nilpotents"* Séminaire KGB Astérisque n° 4
10. L. Elie *"Théorème de renouvellement pour certains groupes résolubles"* à paraître

II - THEORIE DU RENOUVELLEMENT RECURRENT

Nous donnons seulement un bref résumé de trois (gros) articles de Brunel et Revuz (12) qui traitent la question en détail (nous affaiblirons même les résultats afin de les rendre plus accessibles).

<u>Solution de l'équation de Poisson</u>.-

- Pour une chaîne de Markov P associée à une marche récurrente au sens de Harris, on peut trouver une fonction h comprise entre 0 et 1, et un opérateur positif W_h tel que (*) :

$$(A)\begin{cases} P + P\,W_h = W_h + \dfrac{Ph}{m(h)} \otimes m \\ P + W_h\,P = W_h + \dfrac{1}{m(h)} \otimes (h.m)P \end{cases}$$

Soit $f \in C_K(G)$; si $m(f) = 0$, alors $(I-P)(I+W_h)f = f$, donc $g(I+W_h)f$ est une solution uniformément continue à droite, bornée de l'équation (E). (cf. 11)

Mais 1) P est un noyau de convolution et $I+W_h$ n'en est pas un

2) On voudrait se débarrasser de la condition $m(f) = 0$.

- On est alors amené à associer à P et à h une fonction γ_h (de même à $\acute{P}$ et h, on associe $\acute{\gamma}_h$) telle que le noyau

$$A = I + W_h - 1 \otimes \hat{\gamma}_h \,.\, m - \gamma_h \otimes m$$

1) soit un noyau de convolution

2) soit tel que $g = Af$ est solution de (E) pour toute fonction $f \in C_K(G)$.

(N.B. on peut montrer aussi que, sous de bonnes conditions, le choix de la fonction h n'est pas très important).

(*) Soient φ une fonction sur G et ν une mesure sur G, l'opérateur $\varphi \times \nu$ est défini par $(\varphi \otimes \nu)(x,A) = \varphi(x).\nu(A)$.

- "Unicité" des solutions de l'équation de Poisson :

On peut montrer le résultat suivant :

Si $f \in C_K$, si $(I-P)g_1 = (I-P)g_2 = f$ et si $\forall a \in G$ $(I-\tau_a)(g_1-g_2)$ est borné, alors :

$$g_1 - g_2 = k + X \quad \text{où} \begin{cases} k & \text{est une constante} \\ X & \text{est un caractère réel continu de } G \text{ tel que } P|X|-|X| \text{ soit } m\text{-intégrable} \end{cases}$$

✱ <u>Marches de types I, I', II</u> :

On dira qu'une marche est de type II s'il existe un caractère réel (additif) X (qu'on normalisera convenablement) t.q. $P|X|-|X|$ soit m-intégrable.

- <u>une marche est de type II ssi</u>

1°) G est une extension d'un groupe compact par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$

2°) $\sigma^2 = \int X^2 \, d\mu < \infty$

- <u>une marche est de type I' ssi</u>

1°) elle n'est pas de type II

2°) il existe un sous groupe G_0 distingué dans G t.q. G/G_0 ait <u>deux éléments</u> et que <u>la marche induite sur G_0</u> soit de <u>type II</u>

- <u>une marche qui n'est ni de type II, ni de type I', est dite de type I</u>

N.B. Nous appellerons

- <u>groupes de type II</u> : les extensions d'un groupe compact par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ (ex : $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$)

- groupes de type I' : les extensions d'ordre 2 des précédents (mais qui ne soient pas du type précédent) (ex : symétries et translations de $\mathbb{R}$)

- groupes de type I : les autres groupes récurrents (ex : $\mathbb{R}^2$, déplacements du plan)

Normalité

Si $f \in C_K^+$, on a $\sum_{k=1}^{n} P^k f = +\infty$, par contre si $f \in C_K$, $m(f) = 0$, il se peut que $\sum_{k=1}^{n} P^k f$ converge quand n tend vers l'infini.

Dans ce cas, on dit que la chaîne est normale.

Il est évident, à partir de (A) , que si $f \in C_K$ et $m(f) = 0$ alors $\sum_{k=1}^{n} P^k f = W_h f - P^n W_h f$.

L'étude de la normalité se ramène donc à l'étude quand $n \to \infty$ de $P^n W_h f$.

★ Renouvellement

Soit $f \in C_K$, alors

$$Af(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ (si } x \to \Delta)}}{f(x)} + W_h f(x) - \underbrace{\int \hat{\gamma}_h \cdot f \cdot dm}_{\text{constante}} - \gamma_h(x)\, m(f)$$

On voit donc que, lorsque $x \to \Delta$, deux problèmes se posent pour étudier le comportement de $Af(x)$:

1) si $m(f) = 0$: étude du comportement de $W_h f(x)$

2) sinon : étude du comportement de $\gamma_h(x)$. ($W_h f$ est uniformément continue à droite, bornée)

- Les résultats sont alors consignés dans le tableau général (ci-après).

Récurrence du groupe	Classification des groupes	Croissance	Exemples de groupes	Marches transitoires (comportement de U) $x \to \Delta$	Marches récurrentes Harris (comportement de W_h, γ) $x \to \Delta$
Groupes compacts (toutes marches récurrentes)	compacts	0	cercle		sans intérêt
Groupes récurrents non compacts (il existe des marches récurrentes et des marches transitoires)	groupe de type II (extension d'un groupe compact par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$)	pol. deg 1	$\mathbb{R}, \mathbb{Z}$	- Si l'espérance est infinie : $Uf(x) \to 0 \quad (x \to \Delta)$ - Si l'espérance E est finie ($E > 0$ par ex) $Uf(x) \to \begin{cases} 0 & (x \to +\infty) \\ \frac{m(f)}{E} & (x \to -\infty) \end{cases}$	- Si $\sigma^2 = \infty$ (type I) → $\begin{cases} W_h f(x) \to \int \hat{\gamma} \cdot f \cdot dm \\ \gamma(x) \text{ a deux valeurs d'adhérence} \end{cases}$ - Si $\sigma^2 < \infty$ (type II) → $\begin{cases} W_h f(x) \to \int (\hat{\gamma} \pm \frac{X}{\sigma^2}) f \cdot dm \quad (\text{si } x \to \pm\infty) \\ \gamma(x)/\lvert X(x)\rvert \to \frac{1}{\sigma^2} \quad (x \to \Delta) \end{cases}$
	groupe de type I' (extension d'ordre 2 des précédents)	pol. deg 1	transl. et sym. de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$	Conj $Uf(x) \to 0 \quad (x \to \Delta)$	- Si $\sigma^2 = \infty$ (type I) → $\begin{cases} W_h f(x) \to \int \hat{\gamma} \cdot f\, dm \\ \gamma(x) \to +\infty \end{cases}$ $(x \to \Delta)$ - Si $\sigma^2 < \infty$ (type I') $\begin{cases} W_h f(x) \to \int (\hat{\gamma} \pm \frac{\hat{X}}{\sigma^2}) f \cdot dm \quad (\text{si } x \to \pm\infty) \\ \gamma(x)/\lvert X(x)\rvert \to \frac{1}{\sigma^2} \quad (x \to \Delta) \end{cases}$
	groupe de type I (autres groupes récurrents non compacts)	pol. deg 1,2	$\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}^2$ dépl. du plan	Conj $Uf(x) \to 0 \quad (x \to \Delta)$ démontré pour les groupes abéliens, et dans le cas général (sous condition d'étalement)	$\begin{cases} W_h f(x) \to \int \hat{\gamma} \cdot f\, dm \\ \gamma(x) \to +\infty \end{cases}$
Groupes transitoires (toutes marches transitoires)	moyennables	pol deg ≥3	- $\mathbb{R}^d$ $d \geq 3$ - dépl. de $\mathbb{R}^d$ - nilpotents	Conj : $Uf(x) \to 0 \quad x \to \Delta$ démontré pour $\mathbb{R}^d$, pour les groupes nilpotents transitoires, pour les déplacements de $\mathbb{R}^d$ (sous une condition de moment ou d'étalement), pour certains groupes unimodulaires (sous condition)	
	moyennables	exp	groupe affine de $\mathbb{R}$ "ax+b"	situations très diverses : exemple de résultat : selon le signe de l'intégrale $\int \log a(g)\, \mu(dg)$ $Uf(x) \to 0 \quad (x \to \Delta)$ ou $Uf(x)$ a une infinité de valeurs d'adhérence obtenues à partir d'une mes. invariante ≠ Haar.	
	non moyennables	exp	- $SL(n, \mathbb{R})$ - groupe libre à r générateurs	$Uf(x) \to 0 \quad (x \to \Delta)$	

Idée des démonstrations

Nous donnons un bref squelette des démonstrations de la normalité (étude de $P^n W_h f$) et du premier problème du renouvellement (étude de $\sigma_a W_h f$ quand $a \to \Delta$)

(Ce qui suit est écrit de manière un peu télégraphique, et sert plutôt d'invitation à lire les articles de Brunel et Revuz).

On notera que pour étudier la marche P, on a intérêt à étudier en même temps la marche $\hat{P}$.

Démonstrations parallèles : tableau page suivante

BIBLIOGRAPHIE

11. J. Neveu *"Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris"* Annales Inst. Four. (1972)

12. A. Brunel - D. Revuz *"Marches aléatoires récurrentes sur les groupes localement compacts"* I, II et III . à paraître aux Annales de l'E.N.S.

DEMONSTRATIONS PARALLELES

Normalité (comportement de $P^n W_h f$)	Renouvellement (comportement de $\sigma_a W_h f$)
1ère étape : $P^n W_h f$, $\hat{P}^n \hat{W}_h f$ borné $W_h P^n f$, $\hat{W}_h \hat{P}^n f$ borné sur les compacts } unif. équi-continu sur tout compact	$\sigma_a W_h f$, $\sigma_{a^{-1}} W_h f$ borné $W_h \sigma_a f$, $W_h \sigma_{a^{-1}} f$ borné sur les compacts } unif. équi-continu sur tout compact
Conséquence de la 1ère étape : De toute suite, on peut extraire une suite n_j t.q. les quatre quantités convergent simultanément sur tout compact et pour tout $f \in C_K$	idem : suite a_n
2ème étape : $\lim_j P^{n_j} W_h f = C^{te}$	$\lim_n \sigma_{a_n} W_h f = C^{te}$ $\begin{cases}\text{type I}\\ \text{type II}\end{cases}$ (facile pour le type II, difficile pour le type I, faux pour type I')
3ème étape : $W_h P^{n_j} f(x) \longrightarrow \gamma^s(x).m(f)$ où $\gamma^s \geq 0$ unif. cont. à droite vérifie : . $(I-\tau_a)\gamma^s$ borné . $P\gamma^s - \gamma^s = \dfrac{Ph}{m(h)}$ en fait γ^s ne dépend pas de s i.e. $W_h P^n f \longrightarrow \gamma(x).m(f)$ $P^n W_h f \longrightarrow \int f.\hat{\gamma}\, dm$ (par dualité)	$W_h \sigma_{a_n} f \longrightarrow \Gamma^s(x).m(f)$ où Γ^s dépend de s et vaut $\begin{cases}\Gamma^s = \gamma \pm \dfrac{X}{\sigma^2} & \text{type II} \quad x \to \pm\infty \\ \Gamma^s = \gamma & \text{type I}\end{cases}$ $\sigma_a W_h f \begin{cases}\longrightarrow \int f\,\gamma\, dm \quad (x \to \Delta) \text{ type I} \\ \longrightarrow \int\left(\hat{\gamma} \pm \dfrac{X}{\sigma^2}\right) f.dm \quad (x \to \pm\infty) \text{ type II}\end{cases}$

b) Marches de type II comportement de γ : (...)
c) Marches de type I' : (...)
d) Marche de type I : (...)
} voir (2)