

P. LASCAUX

P. LESANT

Éléments finis non-conformes pour le problème de la flexion des plaques minces

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1974, fascicule S4

« Journées éléments finis », , p. 1-58

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1974__S4_A6_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

CENTRE D'ETUDES DE LIMEIL

B.P. n° 27

94190 - VILLENEUVE St GEORGES

FRANCE

ELEMENTS FINIS NON-CONFORMES POUR LE PROBLEME
DE LA FLEXION DES PLAQUES MINCES

P. LASCAUX
P. LESAIT

Le, 10 octobre 1974

I - INTRODUCTION

On étudie la convergence et la précision des solutions approchées du problème de la flexion des plaques minces par des méthodes d'éléments finis utilisant des éléments non conformes. Ces éléments sont l'élément triangulaire quadratique de Morley /15/, deux éléments triangulaires récemment introduits par Fraeijs de Veubeke /9/, trois familles d'éléments triangulaires et une famille d'éléments quadrilatéraux construits en généralisant les éléments précédents, l'élément rectangulaire d'Adini /1/ et l'élément triangulaire de Zienkiewicz /3/.

Une condition nécessaire de convergence est le patch test d'Irons /10/. Les trois premiers éléments passent le patch test pour des polynômes de degré ≤ 2 quelle que soit la position relative des mailles. L'élément de Zienkiewicz le passe uniquement si les triangles sont générés par trois familles de droites parallèles. Le rectangle d'Adini passe le patch test pour des polynômes de degré ≤ 2 quelle que soit la taille respective des rectangles, et il passe un super patch test /22/, ainsi nommé par Strang /19/, quand tous les rectangles sont égaux.

On se penche tout particulièrement sur des conditions suffisantes pour qu'un élément passe un (super) patch test, et on montre que ces conditions suffisantes entraînent la convergence de l'élément.

On obtient les résultats de convergence suivants : soit u la solution exacte et soit u_h la solution approchée obtenue sur un maillage formé d'éléments de dimension $\leq h$, alors :

$$\|u - u_h\|_2 \leq c h (|u|_3 + h |u|_4) ,$$

$$\|u - u_h\|_0 \leq c h^2 (|u|_3 + h |u|_4) ,$$

pour les trois premiers éléments,

$$\|u - u_h\|_2 \leq c h |u|_3 ,$$

$$\|u - u_h\|_1 \leq c h^2 |u|_3 ,$$

pour le triangle de Zienkiewicz et l'élément d'Adini, et

$$\| u - u_h \|_2 \leq c h^2 |u|_4$$

pour l'élément d'Adini, lorsque tous les rectangles sont égaux.

Pour les familles d'éléments satisfaisant un super patch test, on pourra obtenir, si les éléments finis sont continus :

$$\| u - u_h \|_2 \leq c h^s |u|_{s+2}$$

$$\| u - u_h \|_1 \leq c h^{s+1} |u|_{s+2} \quad , \quad \text{et dans certains cas}$$

$$\| u - u_h \|_0 \leq c h^{s+2} |u|_{s+3} \quad , \quad \text{où}$$

s est un entier tel que $1 \leq s \leq r$, r entier.

Si les éléments finis ne sont pas continus, on aura :

$$\| u - u_h \|_2 \leq c h^s (|u|_{s+2} + h |u|_{s+3}) \quad ,$$

$$\| u - u_h \|_0 \leq c h^{s+1} (|u|_{s+2} + h |u|_{s+3}) \quad .$$

Dans ces inégalités, c est une constante indépendante de h et $\| \cdot \|_k$ (resp. $| \cdot |_k$) est l'équivalent discret de la norme (resp. semi-norme) sur l'espace de Sobolev H^k .

Nous avons supposé que les domaines approchés et exacts étaient identiques, ce qui est une importante restriction si on veut utiliser les éléments de Zienkiewicz ou d'Adini /22/, mais qui a assez peu d'importance dans les autres cas. Les démonstrations pour obtenir les majorations d'erreur sont faites dans le cas de la plaque encadrée mais on peut montrer /22/ que les résultats sont encore valables pour d'autres conditions aux limites.

Le plan de cet article est le suivant :

Au paragraphe II, on introduit les notations et les équations des plaques et on donne des majorations générales de l'erreur.

Au paragraphe III, on donne des conditions suffisantes pour qu'un élément passe le patch test ou un "super patch test" et les majorations de l'erreur qui découlent de ces conditions.

Au paragraphe IV, on décrit des familles d'éléments satisfaisant les conditions du paragraphe III. Ces familles comprennent en particulier l'élément de Morley et les éléments de Fraeijs de Veubeke.

Aux paragraphes V et VI, on décrit les éléments d'Adini et de Zienkiewicz, qui ne satisfont pas les conditions du paragraphe III, mais qui passent cependant le patch test.

II - POSITION DU PROBLEME ET ESTIMATIONS GENERALES DE L'ERREUR

Le problème de la flexion des plaques minces peut s'écrire de la façon suivante [13]. Soit Ω un domaine borné dans le plan (x,y) , et soit Γ la frontière de Ω , Ω va représenter le plan de la plaque. On s'intéresse au calcul du déplacement u dans une direction perpendiculaire au plan de la plaque ainsi qu'aux rotations $-\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$ autour des axes des x et des y respectivement, sous l'action d'une force f .

On notera s une abscisse curviligne le long de Γ , $\frac{\partial}{\partial n}$ la dérivée le long de la normale extérieure à Γ et $\frac{\partial}{\partial s}$ la dérivée tangentielle le long de Γ . On définit le produit scalaire (f,g) par :

$$(f,g) = \int_{\Omega} f(x,y) g(x,y) dx dy \text{ et la norme correspondante par :}$$

$$\|g\|_{0,\Omega} = (g,g)^{1/2}$$

Soit m un entier ≥ 0 , on considère l'espace de Sobolev :

$$H^m(\Omega) = \left\{ v ; v \in L^2(\Omega) , \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) , |\alpha| \leq m \right\}$$

muni de la norme $\| \cdot \|_{m,\Omega}$ et de la semi norme $| \cdot |_{m,\Omega}$ définis par :

$$\|v\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} ,$$

$$|v|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} ,$$

où α est un multi-indice tel que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_i \geq 0$,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{et} \quad \partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha_2} .$$

L'espace suivant sera particulièrement important :

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ v ; v \in H^2(\Omega) , v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\} .$$

Pour l'espace de Sobolev $H_0^2(\Omega)$, la semi norme $|\cdot|_{2,\Omega}$ est une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{2,\Omega}$.

On pose :

$$(2.1) \quad \langle u, v \rangle (x, y) = \Delta u \cdot \Delta v + (1-\sigma) \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right),$$

où la constante σ désigne le coefficient de Poisson tel que $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}$.

La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est définie par :

$$(2.2) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \langle u, v \rangle (x, y) \, dx \, dy.$$

Le problème de la plaque encastree peut être formulé de la façon suivante /13/ :

Trouver $u \in H_0^2(\Omega)$ tel que :

$$(2.3) \quad a(u, v) = (f, v) \quad \text{pour tout } v \in H_0^2(\Omega)$$

La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est H_0^2 elliptique puisque :

$$(2.4) \quad a(v, v) = \sigma |\Delta v|_{0,\Omega}^2 + (1-\sigma) |v|_{2,\Omega}^2 \quad \text{pour tout } v \in H_0^2(\Omega).$$

Puisque cette forme est aussi continue sur l'espace $H_0^2(\Omega)$, le problème (2.3) admet une solution unique $u \in H_0^2(\Omega)$ et de plus, on peut dire que $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ si $\bar{\Omega}$ est un polygone convexe (/11/, /12/).

On a la formule de Green suivante :

$$(2.5) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta^2 u \cdot v \, dx \, dy + \int_{\rho} (\Delta u - (1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}) \frac{\partial v}{\partial n} \, ds - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} (\Delta u) \cdot v \, ds + (1-\sigma) \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial s} \frac{\partial v}{\partial s} \, ds.$$

Si la solution u du problème (2.3) est assez régulière, alors elle est aussi solution du problème :

$$(2.6) \quad \Delta^2 u = f \quad \text{dans } \Omega$$

$$(2.7) \quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

La solution est ainsi indépendante du coefficient de Poisson σ .

Il est aussi possible d'envisager d'autres types de conditions aux limites :

$$\text{Soit } v = \left\{ v \in H^2(\Omega) ; v = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}.$$

Trouver $u \in V$ tel que :

$$(2.8) \quad a(u, v) = (f, v) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Par la formule de Green (2.5), le problème précédent s'interprète comme un problème de plaque simplement posée :

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ \Delta u - (1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u - (1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

Dans le cas d'une plaque rectangulaire A B C D, la condition au limite (2.11) signifie que la composante :

$$M_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{resp. } M_y = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) \quad \text{du moment fléchissant autour}$$

des arêtes BC et DA (resp. AB et CD) est nulle.

D'autres types de conditions aux limites peuvent être envisagées, par exemple, le cas d'une plaque rectangulaire posée, ou encastrée le long de deux côtés opposés.

Nous allons maintenant définir une approximation du problème (2.3) par des méthodes d'éléments finis.

Définition 2.1 : Soit $P(\ell)$ l'espace des polynômes en x et y de degré inférieur ou égal à ℓ . Soit $Q(\ell)$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à ℓ , par rapport à chaque variable.

On considère une triangulation \mathcal{T}_h de $\bar{\Omega}$ en éléments K de frontière ∂K , triangulaires ou rectangulaires. A chaque élément K , on associe un ensemble de degrés de liberté (correspondants aux déplacements et à leurs dérivées premières en certains points), et un espace de fonctions de forme P_K de dimension finie. On suppose que les fonctions de P_K sont au moins deux fois continûment différentiables et que P_K contient l'espace $P(2)$ de telle sorte qu'un premier critère heuristique de convergence (/21/) est satisfait.

On définit les paramètres géométriques suivants :

$$h(K) = \text{diamètre de } K \quad , \quad h = \sup_{K \in \mathcal{T}_h} \{ h(K) \} \quad ,$$

$$\rho(K) = \sup \{ \text{diamètres des cercles inscrits dans } K \} \quad .$$

On supposera toujours dans ce qui suit que l'on a $\frac{h(K)}{\rho(K)} \leq \lambda$, où λ est une constante > 0 indépendante de K et de h .

Soit V_h un espace de dimension finie constitué de fonctions définies sur $\bar{\Omega}$, continues aux degrés de liberté des éléments K de \mathcal{T}_h , dont les restrictions à chaque élément K appartiennent à P_K et égales à zéro aux degrés de liberté attachés à la frontière Γ . Un deuxième critère heuristique de convergence (/21/) nécessiterait que les fonctions de V_h soient continûment différentiables sur $\bar{\Omega}$. Au contraire, nous allons considérer, comme cela est souvent fait en pratique, un espace V_h de fonctions non nécessairement continûment différentiables sur $\bar{\Omega}$. On dit que l'on utilise alors des éléments non-conformes ou incompatibles (/10/, /19/, /20/, /21/). On considère la forme bilinéaire suivante :

$$(2.12) \quad a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \langle u_h, v_h \rangle (x, y) \, dx \, dy \quad , \quad \text{pour } u_h, v_h \in V_h.$$

Le problème approché va s'écrire :

$$3) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \quad \text{telle que} \\ a_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h \quad . \end{array} \right.$$

Remarque 2.1 : Il est très naturel de définir ainsi le problème approché, puisque en pratique la matrice de rigidité du problème est formée par assemblage des différents éléments.

Soit :

$$\|v_h\|_h = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left(\left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2}\right)^2 \right) dx dy \right)^{1/2} \text{ pour } v_h \in V_h.$$

On a alors :

$$a_h(v_h, v_h) \geq (1 - \sigma) \|v_h\|_h^2 \text{ pour tout } v_h \in V_h.$$

Si l'hypothèse suivante est satisfaite :

$\|\cdot\|_h$ est une norme sur l'espace V_h ,

alors le problème (2.13) a une solution unique $u_h \in V_h$.

Nous allons maintenant donner des estimations générales de l'erreur sur les contraintes (mesurée par la norme $\|\cdot\|_h$) et sur les déplacements (mesurée par la norme $\|\cdot\|_{0,\Omega}$). Nous donnerons une condition nécessaire heuristique de convergence appelée patch test et nous montrerons des conditions suffisantes pour que le patch test soit satisfait. Nous montrerons ensuite comment ces conditions suffisantes peuvent mener à des majorations de l'erreur, de façon simple. On considérera ensuite différents types d'éléments : l'élément triangulaire quadratique de Morley (/15/) appelé par la suite T.Q.M., deux éléments triangulaires (F.V.1 et F.V.2) introduits par FRAEIJIS de VEUBEKE (/9/) et des généralisations de ces éléments utilisant des polynômes de degré plus élevé, l'élément rectangulaire d'Ari Adini (/1/) et l'élément triangulaire de Zienkiewicz (/2/). On a les résultats suivants : (/19/, /20/).

Théorème 2.1 : On suppose que l'hypothèse (2.15) est satisfaite et soit $u_h \in V_h$ la solution du problème (2.13) et u la solution du problème (2.3). On a :

$$16) \|u - u_h\|_h \leq C \left(\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_h + \sup_{w \in V_h} \frac{|E_h(u, w)|}{\|w\|_h} \right),$$

où C est une constante > 0 indépendante de h et où

$$E_h(u, w) = \begin{cases} E_1(u, w) & \text{si } V_h \subset C^0(\bar{\Omega}) \\ E_1(u, w) + E_2(u, w) + E_3(u, w) & \text{si } V_h \not\subset C^0(\bar{\Omega}) \end{cases}, \text{ avec}$$

$$E_1(u, w) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \frac{\partial w}{\partial n} ds,$$

$$E_2(u, w) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} - (1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial s} \frac{\partial w}{\partial s} ds,$$

$$E_3(u, w) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \frac{\partial}{\partial n} (\Delta u) w ds$$

Démonstration : On considère l'expression X_h définie par :

$$X_h = a_h(u_h - v, u_h - v) \text{ pour tout } v \in V_h.$$

$$\text{On a : } X_h \geq (1-\sigma) \|u_h - v\|_h^2$$

$$X_h = (f, u_h - v) - a_h(v, u_h - v) = a_h(u - v, u_h - v) + (f, u_h - v) - a_h(u, u_h - v).$$

$$\text{Mais : } (f, u_h - v) - a_h(u, u_h - v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\Delta^2 u \cdot (u_h - v) - \langle u, u_h - v \rangle) dx dy.$$

En appliquant la formule de Green (2.5) à chaque élément $K \in \mathcal{T}_h$, on obtient :

$$(f, u_h - v) - a_h(u, u_h - v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \left\{ \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \frac{\partial}{\partial n} (u_h - v) + \frac{\partial}{\partial n} (\Delta u) \cdot (u_h - v) - (1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial s} \frac{\partial}{\partial s} (u_h - v) \right\} ds,$$

ce qui conduit directement à l'inégalité (2.16).

Remarque 2.2 : Les expressions $E_1(u, w)$ et $E_2(u, w)$ ont un sens pour tout $w \in V_h$ et $u \in H^3(\Omega)$. L'expression $E_3(u, w)$ a un sens pour tout $w \in V_h$ et $u \in H^4(\Omega)$.

Définition 2.2 : Dans le cas des éléments non-conformes, le deuxième critère heuristique de convergence (continuité aux interfaces entre les éléments) sera remplacé par un critère moins contraignant appelé Patch Test (/10/, /19/). Ecrit dans sa forme globale, le Patch Test consiste à montrer que :

$$E_h(u, w) \equiv 0 \text{ pour tout } u \in P(2) \text{ et } w \in V_h .$$

Cette définition devient locale si on remplace w par les différentes fonctions de base de V_h .

Nous verrons par la suite que tous les éléments mentionnés plus haut satisfont le "Patch Test", qui est en fait une condition nécessaire de convergence. Dans certains cas, il sera possible d'obtenir des propriétés de convergence plus fine, si un "Super Patch Test" est satisfait.

Définition 2.3 : On dira qu'un élément satisfait un Super Patch Test si :

$$E_h(u, w) \equiv 0 \text{ pour tout } w \in V_h \text{ et } u \in P(\ell) \text{ avec } \ell > 2 .$$

Pour obtenir les estimations d'erreurs, nous aurons besoin du lemme suivant (/4/) :

Lemme 2.1 : Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 avec une frontière assez régulière, soient k et ℓ deux entiers et soit W un espace de fonctions satisfaisant $P(\ell) \subset W \subset H^{\ell+1}(\Omega)$; on considère l'espace W muni de la norme $\|\cdot\|_{\ell+1, \Omega}$. Soit $A : H^{k+1}(\Omega) \times W \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire et continue telle que :

$$A(u, v) = 0 \text{ pour tout } u \in P(k), v \in W,$$

$$A(u, v) = 0 \text{ pour tout } u \in H^{k+1}(\Omega), v \in P(\ell).$$

Alors il existe une constante $C = C(\Omega)$ telle que :

$$(2.17) \quad |A(u, v)| \leq C \|A\| |u|_{k+1, \Omega} |v|_{\ell+1, \Omega} \text{ pour tout } u \in H^{k+1}(\Omega), v \in W.$$

Nous allons maintenant donner une estimation de l'erreur commise sur les déplacements et leurs dérivées premières. Nous utiliserons le résultat suivant pour le problème biharmonique, qui est valable dès que Ω a une frontière suffisamment régulière (/14/).

18) Pour tout $g \in H^{-l}(\Omega)$, pour $l = 0, 1$, le problème suivant :

Trouver φ telle que :

$$\Delta^2 \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

a une solution unique dans l'espace $H^{4-l}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ et on a :

$$\|\varphi\|_{4-l, \Omega} \leq C \|g\|_{H^{-l}(\Omega)} \quad \text{pour } l = 0, 1.$$

Théorème 2.2 : On suppose que l'hypothèse (2.15) est satisfaite soit $u_h \in V_h$ la solution du problème (2.13) et soit u la solution du problème (2.3). On a alors :

$$(2.18) \quad \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C \sup_{\varphi \in H^k(\Omega)} \left\{ \inf_{\varphi_h \in V_h} \frac{|E(u, u_h, \varphi, \varphi_h)|}{\|\varphi\|_{k, \Omega}} \right\} \quad \text{pour } k = 3 \text{ or } 4,$$

avec :

$$E(u, u_h, \varphi, \varphi_h) = a_h(u - u_h, \varphi - \varphi_h) + E_h(\varphi, u - u_h) + E_h(u, \varphi - \varphi_h).$$

si on a de plus : $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$, alors :

$$(2.20) \quad \|u - u_h\|_{1, \Omega} \leq C \sup_{\varphi \in H^3(\Omega)} \left\{ \inf_{\varphi_h \in V_h} \frac{|E(u, u_h, \varphi, \varphi_h)|}{\|\varphi\|_{3, \Omega}} \right\}.$$

Démonstration : On utilise l'argument de dualité suivant (/12/, /17/) :

$$(2.21) \quad \|u - u_h\|_{l, \Omega} = \sup_{g \in H^{-l}(\Omega)} \frac{|(u - u_h, g)|}{\|g\|_{H^{-l}(\Omega)}}$$

avec $l = 0$ ou 1 lorsque $v_h \in C^0(\bar{\Omega})$ et $l = 0$ lorsque $v_h \notin C^0(\bar{\Omega})$.

Soit alors φ la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta^2 \varphi = g & \text{dans } \Omega \\ \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} .$$

En utilisant la formule de Green, on peut écrire :

$$(u-u_h, g) = (u-u_h, \Delta^2 \varphi) = a_h(u-u_h, \varphi) + E_h(\varphi, u-u_h) .$$

D'autre part, pour tout $\varphi_h \in V_h$, on a :

$$a_h(u-u_h, \varphi_h) = -E_h(u, \varphi_h) = -E_h(u, \varphi_h - \varphi) .$$

A partir des deux dernières égalités, on obtient :

$$(2.22) \quad (u-u_h, g) = a_h(u-u_h, \varphi - \varphi_h) + E_h(\varphi, u-u_h) + E_h(u, \varphi_h - \varphi) .$$

Les égalités (2.21) et (2.22) et l'hypothèse (2.18) entraînent les inégalités (2.19) et (2.20).

Dans le paragraphe suivant, nous allons donner des conditions suffisantes pour que le Patch Test et même un super Patch Test soient satisfaits, et voir comment ces conditions suffisantes peuvent mener à des majorations de l'erreur. Les résultats trouvés pourront ensuite s'appliquer à certaines familles d'éléments finis, mais ne s'appliqueront pas, en particulier, aux éléments d'Adini et de Zienkiewicz.

III - CONDITIONS SUFFISANTES DE CONVERGENCE

Nous allons faire maintenant les hypothèses suivantes sur les éléments finis K utilisés :

- H_0 { Pour toute fonction w appartenant à l'espace des fonctions de forme P_K et pour toute arête S appartenant à la frontière ∂K de l'élément K , le vecteur $\int_S \vec{D}w \, ds$ ne dépend que des degrés de liberté attachés à cette arête.
- H_r { Soit r un entier ≥ 1 , pour toute fonctions w appartenant à P_K et pour toute arête S appartenant à la frontière ∂K de l'élément K , les quantités $\int_S s^\alpha \vec{D}w \, ds$, pour tout entier α , avec $0 \leq \alpha \leq r$, et $\int_S s^{\alpha-1} w \, ds$, pour tout entier α avec $1 \leq \alpha \leq r$, sont entièrement déterminées par les degrés de liberté attachés à l'arête S .
- H { Pour toute arête S appartenant à la frontière ∂K de l'élément K , les valeurs des fonctions de P_K en au moins deux points de cette arête sont des degrés de libertés pour l'élément K .

Remarque 3.1 : Soit K un élément fini triangulaire ou quadrilatéral pour lequel les valeurs des fonctions de P_K aux sommets de l'élément soient des degrés de liberté, alors l'hypothèse H est évidemment satisfaite, et de plus, une partie de l'hypothèse H_0 est aussi vérifiée : en effet pour toute arête S d'extrémités A et B , on a :

$$\int_S \frac{\partial w}{\partial s} \, ds = w(B) - w(A) .$$

Soit S_h l'ensemble de toutes les arêtes non contenues dans la frontière Γ et soit \bar{S}_h l'ensemble de toutes les arêtes S contenues dans Γ . Nous allons montrer.

Lemme 3.1 : Soit V_h un espace de dimension finie construit à partir d'un élément K , comme au paragraphe II. Une condition suffisante pour que $\| \cdot \|_h$ soit une norme sur l'espace V_h est que l'élément K

satisfasse soit les hypothèses H et H_r, pour un entier r ≥ 0, soit l'hypothèse H_r, pour un entier r ≥ 1.

Démonstration : On suppose que l'hypothèse H_r est satisfaite, pour r ≥ 0. Soit v ∈ V_h tel que ||v||_h = 0. On a donc $\vec{Dv} \in (P(0))^2$ sur chaque élément K.

D'après l'hypothèse H₀, $\int_A^B \vec{Dv} ds$ ne dépend que des degrés de liberté attachés à l'arête AB, donc prend la même valeur pour les 2 éléments adjacents le long de AB. On en déduit la continuité de \vec{Dv} le long de l'arête AB. Le vecteur \vec{Dv} appartient donc à $(P(0))^2$ sur Ω . Les conditions aux limites imposées au fonction de V_h impliquent que $\vec{Dv} = 0$ sur Ω . Donc v est une constante sur chaque élément K.

On suppose maintenant que l'hypothèse H_r est satisfaite pour r ≥ 1. L'intégrale $\int_A^B v ds$ prend la même valeur pour les 2 éléments adjacents le long de AB. La fonction v est donc constante sur Ω , et cette constante est nulle d'après les conditions aux limites imposées aux fonctions de V_h.

Si les hypothèses H et H_r, r ≥ 0, sont satisfaites, on aboutit à la même conclusion en utilisant la continuité des fonctions de V_h en 2 points sur chaque arête.

Lemme 3.2 : Une condition suffisante pour qu'un élément fini passe le Patch Test est que l'hypothèse H₀ soit satisfaite. On a donc :

$$(3.1) \quad E_h(u,w) = 0 \quad \text{pour tout } u \in P(2) \text{ et } w \in V_h .$$

Démonstration : Pour toute arête S ∈ S_h, soient K et K' les éléments de S_h adjacents le long de S, et soient w et w' les restrictions à K et K' d'une fonction quelconque w ∈ V_h. Soient $\frac{\partial}{\partial n}$ et $\frac{\partial}{\partial n'}$, les dérivées normales à l'arête S dirigées vers l'extérieur de K et K'. On a :
On a $\frac{\partial}{\partial n} = - \frac{\partial}{\partial n'}$. L'expression E_h(u,w) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad E_h(u, w) = & \sum_{s \in S_h} \left\{ \int_S \left(\frac{\partial}{\partial n} (\Delta u) \cdot w + \frac{\partial}{\partial n'} (\Delta u), w' \right) ds - \right. \\
 & - \int_S (1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial^2 u'}{\partial n'^2} \frac{\partial w'}{\partial s} \right) ds + \\
 & + \int_S (1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \left(\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial w'}{\partial n'} \right) ds + \\
 & + \sum_{s \in \bar{S}_h} \int_S \left(\frac{\partial}{\partial n} (\Delta u) \cdot w - (1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial s} \frac{\partial w}{\partial s} + \right. \\
 & \left. + ((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u) \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds .
 \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse H_0 , $\int_S \vec{Dw} ds$ est égal à $\int_S \vec{Dw}' ds$, pour $s \in S_h$. Si $s \in \bar{S}_h$, la définition de l'espace V_h implique, en utilisant l'hypothèse H_0 que $\int_S \vec{Dw} ds = 0$. On en déduit donc l'égalité (3.1), en utilisant le fait que $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n'}$.

Remarque 3.2 : D'après la démonstration précédente, on voit que les conditions aux limites imposées lors de la définition de l'espace V_h jouent un rôle primordial dans l'annulation des termes de bord. En effet, dans le cas de la plaque encastree (problème 2.13), les degrés de liberté correspondants à des valeurs de la fonction, ou de ses dérivées premières sont fixés égaux à zéro sur la frontière Γ . Par contre, dans le cas de la plaque simplement posée (problème (2.9), (2.10), (2.11)), on n'impose la nullité que pour les degrés de liberté correspondants aux valeurs de la fonction ou (et) de ses dérivées tangentielles sur Γ , (on essaie de satisfaire "au mieux" la condition $u = 0$ sur Γ). On n'aura plus cette fois-ci l'égalité (3.1), à cause des termes de bords. Si on décompose $E_h(u, w)$ en :

$$E_h(u, w) = \sum_{s \in S_h} \left\{ \cdot \right\} + \sum_{s \in \bar{S}_h} \left\{ \cdot \right\}, \text{ on aura : } \sum_{s \in S_h} \left\{ \cdot \right\} = 0$$

pour tout $u \in P(2)$ et $w \in V_h$. L'expression : $\sum_{s \in S_h} \left\{ \cdot \right\}$ ne sera nulle que si u est la solution exacte du problème (on a alors $\Delta u - (1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0$ sur Γ) ; il faut cependant remarquer que dans les majorations de l'erreur

(inégalités (2.16) et (2.19)) l'expression $E_h(u,w)$ est écrite pour $u =$ solution exacte.

Remarque 3.3 : Lorsque l'inclusion $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$ est satisfaite, l'hypothèse H est trivialement vérifiée ; de même les hypothèses H_0 et H_r sont en parties satisfaites, en ce qui concerne les quantités :

$$\int_S \frac{\partial w}{\partial s} ds, \quad \int_S s^\alpha \frac{\partial w}{\partial s} ds \quad \text{et} \quad \int_S s^{\alpha-1} w ds,$$

pour tout entier α avec $1 \leq \alpha \leq r$. On n'a plus alors qu'à considérer les termes de dérivées normales, qui apparaissent dans l'expression $E_1(u,w)$.

Lemme 3.3 : Une condition suffisante pour qu'un élément fini passe un "super Patch-Test" d'ordre r est que l'hypothèse H_r soit satisfaite. On a alors :

$$(3.3) \quad E_h(u,w) = 0 \text{ pour tout } u \in P(2+r) \text{ et } w \in V_h.$$

Démonstration : Il suffit de considérer l'expression (3.2) et d'utiliser l'hypothèse H_r et la définition de l'espace V_h .

Remarque 3.4 : Tout ce qui a été dit dans la remarque 3.2 peut encore s'appliquer dans le cas du super Patch Test.

Lemme 3.4 : On suppose que l'inclusion $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$ et l'hypothèse H_r sont satisfaites, pour un entier $r \geq 0$. Pour tout entier α tel que $1 \leq \alpha \leq r+1$, on a alors :

$$(3.4) \quad E_h(u, w-w_h) \leq C h^\alpha |u|_{\alpha+2, \Omega} \|w-w_h\|_h, \text{ pour tout } u \in H^{\alpha+2}(\Omega), w \in H^2(\Omega) \text{ et } w_h \in V_h.$$

Démonstration : Pour toute arête $S \in S_h \cup \bar{S}_h$, on note π_ℓ^S et par la suite π_ℓ l'opérateur de projection dans $L^2(S)$ sur les polynômes de $P(\ell)$, défini par :

$$\pi_\ell v \in P(\ell),$$

$$(3.5) \quad \int_S (\pi_\ell v - v) w \, ds = 0 \text{ pour tout } w \in P(\ell).$$

On peut alors écrire :

$$E_h(u, w-w_h) = E_1(u, w-w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} ((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u) \frac{\partial}{\partial n} (w-w_h) \, ds.$$

Par abus de notation, on pose : $g(s) = (1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u$.

On a alors, grâce à l'hypothèse H_r et au lemme 3.2, pour $1 \leq \alpha \leq r+1$:

$$(3.6) \quad E_h(u, w-w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (g - \pi_{\alpha-1} g) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial n} (w-w_h) - \pi_0 \frac{\partial}{\partial n} (w-w_h) \right) \, ds.$$

$$\text{Soit } X_K = \int_{\partial K} (g - \pi_{\alpha-1} g) \left(\frac{\partial}{\partial n} (w-w_h) - \pi_0 \frac{\partial}{\partial n} (w-w_h) \right) \, ds.$$

On a : $X_K \equiv 0$ pour tout $g \in P(\alpha-1)$ et $w-w_h \in H^2(K)$,

$X_K \equiv 0$ pour tout $g \in H^\alpha(K)$ et $(w-w_h) \in P(1)$.

En utilisant le passage à un élément de référence comme dans /4/, /7/, /8/, /23/ et le lemme 2.1, on a :

$$(3.7) \quad |X_K| \leq C(h(K))^\alpha |u|_{\alpha+2, K} |w-w_h|_{2, K}.$$

En sommant sur toutes les arêtes, on en déduit le lemme 3.4.

Lemme 3.5 : On ne suppose plus que l'inclusion $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$ soit nécessairement satisfaite. On suppose que pour $r \leq 1$ les hypothèses H_r et H sont satisfaites, ou que pour $r \geq 2$, l'hypothèse H_r est satisfaite. On a alors pour tout entier α tel que $1 \leq \alpha \leq r+1$:

$$(3.8) \quad E_h(u, w-w_h) \leq C(h^\alpha |u|_{\alpha+2, \Omega} + h^{\alpha+1} |u|_{\alpha+3, \Omega}) \|w-w_h\|_h,$$

pour tout $u \in H^{\alpha+3}(\Omega)$, $w \in H^2(\Omega)$ et $w_h \in V_h$.

Démonstration : L'expression E_h se compose cette fois-ci des trois termes $E_1 + E_2 + E_3$. Le terme $E_1(u, w-w_h)$ se majore comme dans le lemme précédent. Le terme $E_2(u, w-w_h)$ se majore de la même façon que le

terme $E_1(u, w-w_h)$, puisqu'il contient des dérivées du même ordre. Il reste donc à considérer :

$$E_3(u, w-w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \left(\frac{\partial}{\partial n} \Delta u \right) \cdot (w-w_h) \, ds .$$

Nous allons encore utiliser l'opérateur Π_ℓ défini dans le lemme précédent, et on utilisera la convention suivante :

$$\Pi_\ell v = 0 \quad \text{si } \ell < 0 .$$

Nous allons considérer les 2 cas suivants :

Si $r \geq 2$, l'hypothèse H_r permet d'écrire :

$$(3.9) \quad E_3(u, w-w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \left(\frac{\partial}{\partial n} (\Delta u) - \Pi_{\alpha-2} \frac{\partial}{\partial n} (\Delta u) \right) \cdot ((w-w_h) - \Pi_1(w-w_h)) \, ds ,$$

pour $1 \leq \alpha \leq r+1$.

Si $r \leq 1$, d'après l'hypothèse H , il existe sur chaque arête deux points en lesquels la fonction w_h est continue. D'autre part puisque $w \in H^2(\Omega)$, on a $w \in C^0(\bar{\Gamma}_L)$. Sur chaque arête S , on désigne alors par $\widetilde{w-w_h}$ l'interpolée de $w-w_h$ en les deux points de continuité de la fonction w_h . On a, grâce à l'hypothèse H_r :

$$(3.10) \quad E_3(u, w-w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \left(\frac{\partial}{\partial n} (\Delta u) - \Pi_{\alpha-2} \left(\frac{\partial}{\partial n} \Delta u \right) \right) \cdot ((w-w_h) - (\widetilde{w-w_h})) \, ds ,$$

pour $1 \leq \alpha \leq r+1$.

$$\text{Soit } Y_K = \begin{cases} \int_{\partial K} \left(\frac{\partial}{\partial n} \Delta u - \Pi_{\alpha-2} \left(\frac{\partial}{\partial n} \Delta u \right) \right) \cdot (w-w_h - \Pi_1(w-w_h)) \, ds & \text{pour } r \geq 2 \\ \int_{\partial K} \left(\frac{\partial}{\partial n} \Delta u - \Pi_{\alpha-2} \left(\frac{\partial}{\partial n} \Delta u \right) \right) \cdot (w-w_h - (\widetilde{w-w_h})) \, ds & \text{pour } r \leq 1 \end{cases}$$

On a $Y_K \equiv 0$ pour tout $u \in P(\alpha+1)$ et $w-w_h \in H^2(K)$

$Y_K \equiv 0$ pour tout $u \in H^{2+\alpha}(\partial K)$ et $w-w_h \in P(1)$.

En utilisant le passage à un élément de référence, le lemme 2.1 et l'iné-

galité suivante, valable pour tout $u \in H^1(\Omega)$ dès que l'ouvert Ω est assez régulier :

$$(3.11) \quad |u|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c(\Omega) \|u\|_{1,\Omega}^{1/2} |u|_{0,\Omega}^{1/2},$$

On peut écrire :

$$(3.12) \quad |Y_K| \leq C ((h(K))^\alpha |u|_{2+\alpha,K} + (h(K))^{\alpha+1} |u|_{3+\alpha,K}) |w-w_h|_{2,K}$$

En sommant sur toutes les arêtes, on en déduit le lemme 3.5.

Nous allons faire maintenant l'hypothèse de consistance suivante :

$$(3.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Soit un entier } k \geq 2. \text{ Pour tout entier } \ell \text{ tel que } 3 \leq \ell \leq k+1, \text{ il existe} \\ \text{un opérateur linéaire } r_h \in \mathcal{L}(H^\ell(\Omega); V_h) \text{ tel que :} \\ |r_h v - v|_{m,K} \leq C(h(K))^{\ell-m} |v|_{\ell,K}, \quad 0 \leq m \leq \ell \text{ pour tout } v \in H^\ell(\Omega) \\ \text{et pour tout } K \in \mathcal{T}_h, \text{ et où } C \text{ est une constante indépendante de } h. \end{array} \right.$$

Remarque 3.5 : Une condition nécessaire pratique pour que l'hypothèse (3.13) soit satisfaite est que l'on ait l'inclusion $P_K \subset P(k)$, pour $K \in \mathcal{T}_h$, où k est un entier tel que $k \geq 2$, cette condition est à rapprocher du premier critère heuristique de convergence [21] cité précédemment.

Nous allons donner maintenant les résultats de convergence suivants :

Théorème 3.1 : On suppose que l'hypothèse H_r est satisfaite pour un entier $r \geq 0$, que l'hypothèse (2.34) est satisfaite pour un entier $k \geq 2$ et que l'inclusion $V_h \subset C^0(\Omega)$ est vérifiée.
Soit s un entier quelconque tel que $1 \leq s \leq \inf(k-1, r+1)$. On suppose que la solution exacte $u \in H^{s+2}(\Omega)$. On a alors :

$$(3.14) \quad \|u - u_h\|_h \leq C h^s |u|_{s+2,\Omega},$$

$$(3.15) \quad \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C h^{s+1} |u|_{s+2,\Omega}.$$

De plus si on a : $2 \leq \inf(k-1, r+1)$, alors :

$$(3.16) \quad |u - u_h|_{0, \Omega} \leq C h^{s+2} |u|_{s+2, \Omega}$$

Démonstration : Nous allons utiliser les théorèmes 2.1 et 2.2, le lemme 3.4 et l'hypothèse de consistance (3.13).

D'après le théorème 2.1, on a :

$$(3.17) \quad \|u - u_h\|_h \leq C \left(\|u - r_h u\|_h + \sup_{w \in V_h} \frac{E_h(u, w)}{\|w\|_h} \right).$$

D'après l'hypothèse (2.34), on a, pour $3 \leq \ell \leq k+1$

$$\|u - r_h u\|_h \leq C h^{\ell-2} |u|_{\ell, \Omega}, \quad \text{dès que } u \in H^\ell(\Omega).$$

D'après le lemme 2.4, on a, pour $1 \leq \alpha \leq r+1$

$$E_h(u, w) \leq C h^\alpha |u|_{\alpha+2, \Omega} \|w\|_h, \quad \text{dès que } u \in H^{\alpha+2}(\Omega), \text{ pour tout}$$

$w \in V_h$. En combinant les trois dernières inégalités, on obtient l'inégalité (3.14).

D'après le théorème 2.2, on a :

$$(3.18) \quad \|u - u_h\|_{1, \Omega} \leq C \sup_{\varphi \in H^3(\Omega)} \left\{ \frac{E(u, u_h, \varphi, r_h \varphi)}{\|\varphi\|_{3, \Omega}} \right\}, \text{ avec}$$

$$(3.19) \quad E(u, u_h, \varphi, r_h \varphi) = a_h(u - u_h, \varphi - r_h \varphi) + E_h(\varphi, u - u_h) + E_h(u, \varphi - r_h \varphi).$$

D'après l'hypothèse (3.13) et l'inégalité (3.14), on a :

$$|a_h(u - u_h, \varphi - r_h \varphi)| \leq C h^{s+1} |u|_{s+2, \Omega} |\varphi|_{3, \Omega}$$

D'après le lemme 3.4, l'inégalité (3.14), et l'hypothèse (3.13), on a :

$$E_h(\varphi, u-u_h) \leq C h |\varphi|_{3,\Omega} \|u-u_h\|_h \leq C h^{s+1} |u|_{s+2,\Omega} |\varphi|_{3,\Omega} ,$$

$$E_h(u, \varphi-r_h \varphi) \leq C h^\alpha |u|_{\alpha+2,\Omega} \|\varphi-r_h \varphi\|_h \leq C h^{\alpha+1} |u|_{\alpha+2,\Omega} |\varphi|_{3,\Omega} ,$$

avec $1 \leq \alpha \leq r+1$.

En choisissant $\alpha = s$ dans la dernière inégalité, on en déduit l'inégalité (3.15).

D'après le théorème 2.2, on a :

$$|u-u_h|_{0,\Omega} \leq C \sup_{\varphi \in H^4(\Omega)} \left\{ \frac{E(u, u_h, \varphi, r_h \varphi)}{\|\varphi\|_{4,\Omega}} \right\}$$

D'après l'hypothèse (3.13), l'inégalité (3.14) et le fait que $k \geq 3$, on a :

$$a_h(u-u_h, \varphi-r_h \varphi) \leq C h^2 \|u-u_h\|_h |\varphi|_{4,\Omega} \leq C h^{s+2} |u|_{s+2,\Omega} |\varphi|_{4,\Omega} .$$

D'après l'hypothèse 3.13, le lemme 3.4, l'inégalité (3.14) et le fait que $k \geq 3$, on a :

$$E_h(u, \varphi-r_h \varphi) \leq C h^\alpha |u|_{\alpha+2,\Omega} \|\varphi-r_h \varphi\|_h \leq C h^{\alpha+2} |u|_{\alpha+2,\Omega} |\varphi|_{4,\Omega} ,$$

avec $1 \leq \alpha \leq r+1$.

D'après le lemme 3.4, l'inégalité 3.14 et le fait que r soit ≥ 1 , on a :

$$E_h(\varphi, u-u_h) \leq C h^2 |\varphi|_{4,\Omega} \|u-u_h\|_h \leq C h^{s+2} |\varphi|_{4,\Omega} |u|_{s+2,\Omega} .$$

En choisissant $\alpha = s$ dans l'avant dernière inégalité, on en déduit l'inégalité (3.16).

Remarque 3.6 : Si on a $k = 2$ et (ou) $r = 0$, on ne peut pas obtenir mieux que la majoration suivante :

$$|u-u_h|_{0,\Omega} \leq C h^2 |u|_{3,\Omega}$$

Cette majoration est en fait déjà incluse dans l'inégalité (3.15), car dans ce cas, on a : $s = 1 = k-1 = r+1$.

Théorème 3.2 : On suppose que l'hypothèse H_r est satisfaite pour un entier $r \geq 0$, que l'hypothèse (3.13) est satisfaite pour un entier $k \geq 2$, mais que l'inclusion $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$ n'est pas nécessairement vérifiée. Soit s un entier quelconque tel que $1 \leq s \leq \inf(k-1, r+1)$. On suppose que la solution exacte $u \in H^{s+3}(\Omega)$. On a alors :

$$(3.20) \quad \|u - u_h\|_h \leq C (h^s |u|_{s+2, \Omega} + h^{s+1} |u|_{s+3, \Omega}) ,$$

$$(3.21) \quad |u - u_h|_{0; \Omega} \leq C (h^{s+1} |u|_{s+2, \Omega} + h^{s+2} |u|_{s+3, \Omega}) .$$

Démonstration : D'après l'hypothèse (3.13), on a, pour $3 \leq \ell \leq k+1$

$$\|u - r_h u\|_h \leq C h^{\ell-2} |u|_{\ell, \Omega} , \text{ pour } u \in H^{\ell}(\Omega) .$$

D'après le lemme 3.5, on a, pour $1 \leq \alpha \leq r+1$

$$E_h(u, w) \leq C (h^{\alpha} |u|_{\alpha+2, \Omega} + h^{\alpha+1} |u|_{\alpha+3, \Omega}) \|w\|_h ,$$

dès que $u \in H^{\alpha+3}(\Omega)$, pour tout $w \in V_h$.

En combinant ces deux dernières inégalités avec l'inégalité (3.17), on obtient l'inégalité (3.20).

D'après l'hypothèse (3.13) et l'inégalité (3.14), on a :

$$a_h(u - u_h, \varphi - r_h \varphi) \leq C h^{s+1} |u|_{s+2, \Omega} |\varphi|_{3, \Omega}$$

D'après le lemme 3.5, l'inégalité (3.20) et l'hypothèse (3.13), on a :

$$E_h(\varphi, u - u_h) \leq C (h |\varphi|_{3, \Omega} + h^2 |\varphi|_{4, \Omega}) \|u - u_h\|_h , \text{ donc}$$

$$(3.22) \quad E_h(\varphi, u-u_h) \leq C (h |\varphi|_{3,\Omega} + h^2 |\varphi|_{4,\Omega}) (h^s |u|_{s+2,\Omega} + h^{s+1} |u|_{s+3,\Omega}) .$$

$$E_h(u, \varphi - r_h \varphi) \leq C (h^\alpha |u|_{\alpha+2,\Omega} + h^{\alpha+1} |u|_{\alpha+3,\Omega}) \cdot h |\varphi|_{3,\Omega} ,$$

avec : $1 \leq \alpha \leq r+1$.

En choisissant $\alpha = s$ dans la dernière inégalité et en combinant les trois dernières inégalités avec l'inégalité (3.18) et l'égalité (3.19), on obtient l'inégalité (3.21).

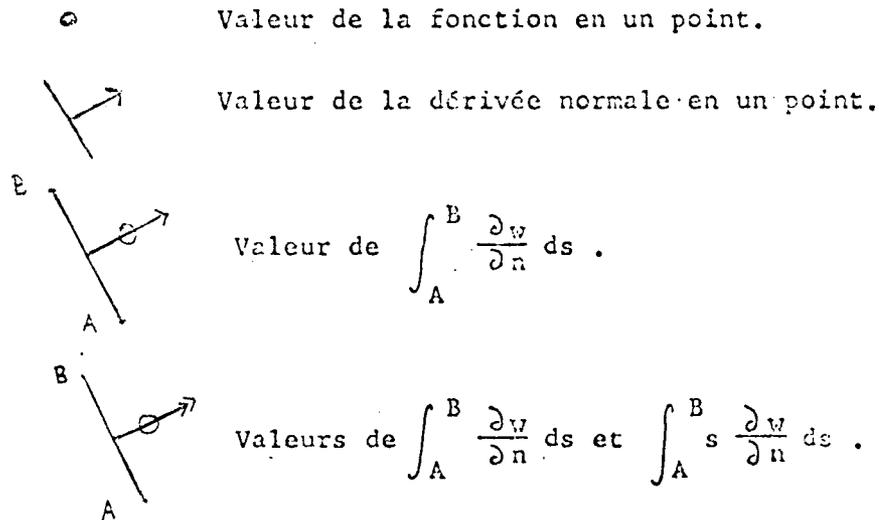
Remarque 3.7 : L'inégalité (3.22) montre qu'il n'est pas a priori possible de gagner plus qu'un ordre h entre les majorations (3.20) et (3.21).

Remarque 3.8 : Les hypothèses H et H_r , $r \geq 0$ sont en fait celles imposées par Fraeijs de Veubeke /9/ pour une famille d'éléments "statiquement admissibles et fortement diffusifs".

IV - QUELQUES ELEMENTS SATISFAISANT LES HYPOTHESES H et H_r pour $r \geq 0$

Nous allons décrire quelques éléments triangulaires ou quadrilatéraux, satisfaisant certaines des hypothèses du paragraphe précédent. Pour chacun de ces éléments, décrits sur des figures, nous donnerons le nombre N de degrés de liberté, l'espace P_K des fonctions de forme (dans certains cas on donnera les fonctions de forme, on indiquera quelles sont les hypothèses satisfaites (patch test ou "super patch-test) et l'ordre de convergence. Pour certains de ces éléments, le problème de l'unisolvance, c'est-à-dire trouver un polynôme P appartenant à P_K et prenant des valeurs données aux degrés de liberté, n'a pas encore été résolu ; dans ce cas, l'ordre de convergence est donné en supposant que ce problème admette une solution.

Nous utiliserons les notations suivantes :



etc.

Etant donné un triangle K de sommets A_i de coordonnées (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq 3$, on note :

λ_i = coordonnée barycentrique relative au sommet A_i , $1 \leq i \leq 3$,
 $b_1 = y_2 - y_3$, $c_1 = x_3 - x_2$, $d_1 = \frac{1}{2} (c_2 - c_3)$, $c_1 + \frac{1}{2} (b_2 - b_3)$, b_i , c_i et d_i
 pour $i = 2$ ou 3 étant définis par permutation circulaire,
 $l_i = (b_i^2 + c_i^2)^{1/2}$ = longueur du côté $A_j A_k$ opposé au sommet A_i , $1 \leq i \leq 3$

A_{jk} = milieu du côté $A_j A_k$

Δ = aire de l'élément K , et G = centre de gravité de K .

Etant donné une fonction P définie et une fois continûment différentiable sur K , on pose :

$$P_i = P(A_i) , \quad \frac{\partial P}{\partial n_i} = \frac{\partial P}{\partial n}(A_{jk}) , \quad \left[\frac{\partial P}{\partial n} \right]_i = \frac{1}{\ell_i} \int_{A_j}^{A_k} \frac{\partial P}{\partial n} ds ,$$

$1 \leq i \leq 3$, où $\frac{\partial P}{\partial n}$ est la dérivée normale au côté $A_j A_k$,

$$P_{jk} = P(A_{jk}) , \quad P_G = P(G) , \quad 1 \leq j \leq 3 , \quad k \neq j .$$

Nous allons rappeler les définitions suivantes :

Définition 4.1 : On considère la formule de quadrature du type interpolation utilisant k points , $k \geq 1$:

$$\int_a^b f(x) dx \sim \sum_{i=1}^k \omega_i f(x_i)$$

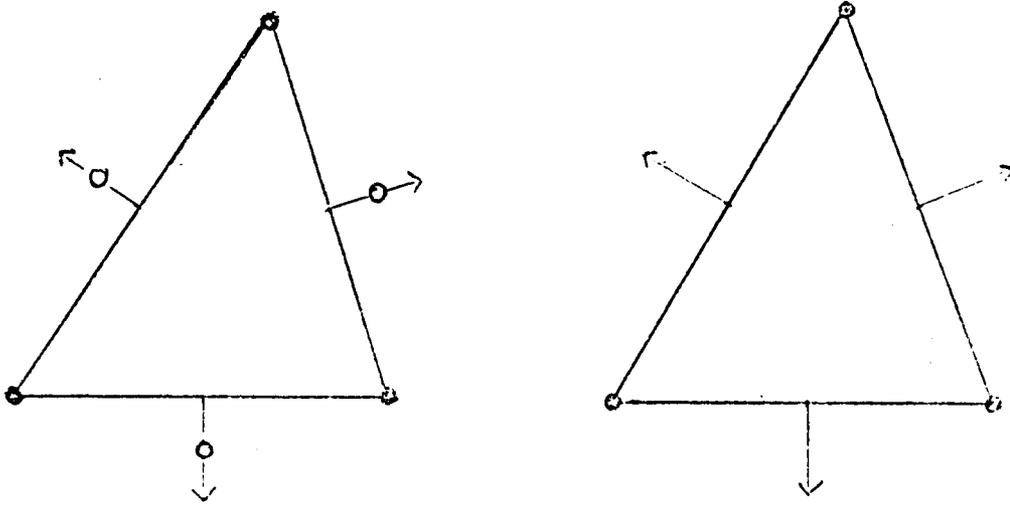
Il existe un ensemble de k points et de k poids tels que cette formule soit exacte pour les polynômes de $P(2k-1)$; ces k points sont appelés abscisses de Gauss.

Définition 4.2 : On considère la formule de quadrature du type interpolation utilisant k points, dont les extrémités de l'intervalle d'intégration, $k \geq 2$:

$$\int_a^b f(x) dx \sim \sum_{i=1}^k \omega_i f(x_i) , \quad \text{avec } x_1 = a , \quad x_k = b .$$

Il existe un ensemble de k points et de k poids unique tels que cette formule soit exacte pour les polynômes de $P(2k-3)$; ces k points sont appelés abscisses de Gauss-Lobatto.

Le premier élément décrit est l'élément T.Q.M. de Morley :



$$N = 6 \quad , \quad P_K = P(2)$$

Hypothèses H et H_0 , $V_h \not\subset C^0$.

$$\text{Erreurs } \|u - u_h\|_h = O(h) \quad , \quad |u - u_h|_{0, \Omega} = O(h^2)$$

Figure 4.1 - Élément de Morley

Les fonctions de forme sont données par :

$$P(x,y) = \sum_{i=1}^3 \Psi_i(x,y) P_i + \sum_{i=1}^3 \Psi_i(x,y) \frac{\partial P}{\partial n_i}, \quad \text{ou}$$

$$\Psi_i(x,y) = -2 \Delta \cdot \ell_i^{-1} \cdot \lambda_i(1-\lambda_i), \quad 1 \leq i \leq 3,$$

$$\Psi_1(x,y) = \lambda_1^2 + \alpha_2 \Psi_2 + \alpha_3 \Psi_3, \quad \text{avec } \alpha_i = \frac{b_1 b_i + c_1 c_i}{2 \Delta \cdot \ell_i}, \quad i = 2 \text{ ou } 3,$$

Ψ_2 et Ψ_3 étant définies par permutation circulaire.

Les 2 figures ci-dessus définissent le même élément. A partir de ces 2 figures, on peut construire 2 familles d'éléments.

La première famille d'éléments (figures 4.2, 4.3, 4.4) est issue de la figure 4.1, triangle de gauche.

L'espace des fonctions de forme est en principe constitué de polynômes de P(k) (éventuellement incomplets). Les degrés de liberté sont :

- i) les valeurs de la fonction en k points par côté, ces k points étant les abscisses de Gauss-Lobatto,
- ii) les valeurs de différentes moyennes de la dérivée normale le long de chaque côté :

$$\int s^\alpha \frac{\partial w}{\partial n} ds \quad \text{pour les entiers } \alpha \leq j.$$

Pour $k \leq 6$ on aura nécessairement $j \leq k-3$.

Pour $k \geq 7$ on peut peut-être choisir $j \geq k-2$ (il reste bien sûr à vérifier l'unisolvance),

- iii) les valeurs de la fonction en d'autres points, éventuellement.

Lemme 4.1 : Pour les éléments décrits ci-dessus, l'hypothèse H est toujours satisfaite, et l'hypothèse H_r est satisfaite avec : $r = \inf(j, k-2)$.

Démonstration : On considère l'intégrale suivante :

$$\int_A^B s^\alpha w \, ds, \text{ le long d'un côté AB, où } \alpha \text{ est un entier.}$$

Cette intégrale est calculée exactement, en utilisant les abscisses de Gauss-Lobatto, si $\alpha \leq k-3$.

Les quantités $\int_A^B s^\alpha w \, ds$, pour $\alpha \leq k-3$, ne dépendent donc que des degrés de liberté attachés à l'arête AB. Il en est de même pour les quantités :

$$\int_A^B s^\alpha \frac{\partial w}{\partial s} \, ds, \text{ pour } \alpha \leq k-2 \text{ car on a :}$$

$$\int_A^B s^\alpha \frac{\partial w}{\partial s} \, ds = (s^\alpha w)(B) - (s^\alpha w)(A) - \alpha \int_A^B s^{\alpha-1} w \, ds.$$

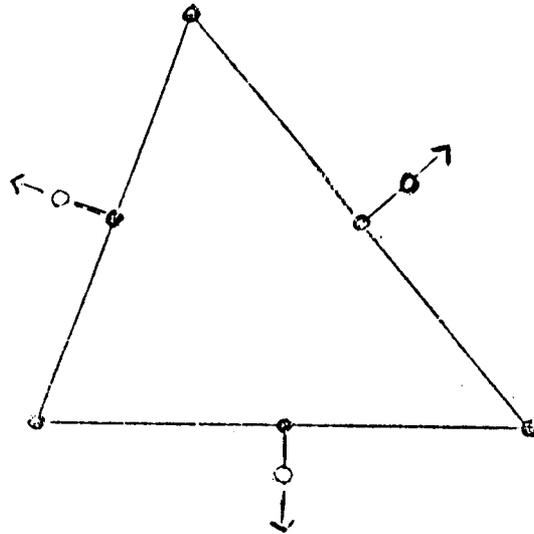
Les quantités $\int_A^B s^\alpha \frac{\partial w}{\partial n} \, ds$, pour $\alpha \leq j$ sont des degrés de liberté. Le lemme en découle immédiatement.

Remarque 4.1 : Bien qu'utilisant des dérivées normales, la définition de ces éléments peut être rendue affine* si $j \leq k-2$, car la donnée des valeurs aux k points de Gauss-Lobatto et des moyennes :

$\int_A^B s^\alpha \frac{\partial w}{\partial n} \, ds$ pour $\alpha \leq j$ entraînent la connaissance de $\int_A^B s^\alpha \vec{D}w \, ds$. Cette remarque peut être très utile pour la recherche des fonctions de forme.

* Voir Ciarlet et Raviart [6].

Elément Fraeijjs de Veubeke 1 (F V 1)



$$N = 9$$

$$P(2) \subset P_K \subset P(3)$$

Hypothèses H et H_0 , $V_h \notin C^0$

$$\text{Erreurs : } \|u - u_h\|_h = O(h) \quad , \quad |u - u_h|_{0,\Omega} = O(h^2)$$

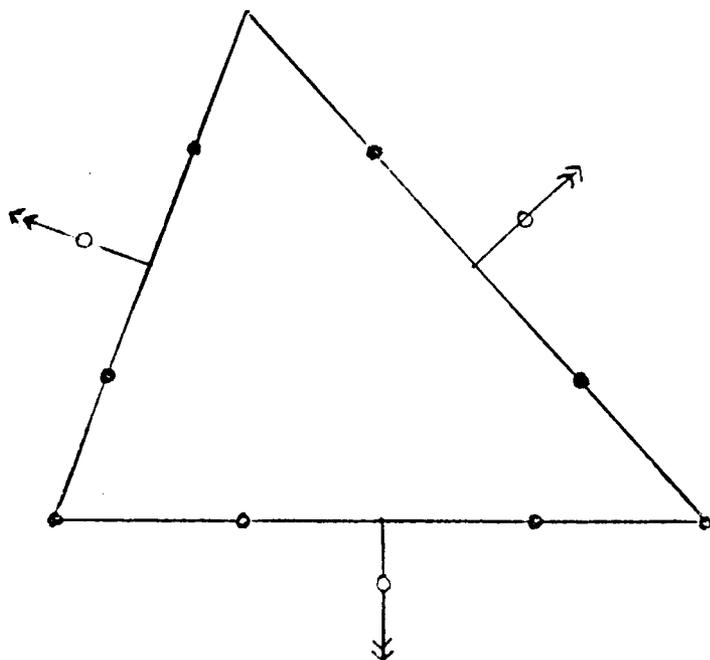
Figure 4.2 - Element F V 1

Les fonctions de forme sont données par :

$$P(x,y) = \sum_{i=1}^3 \Phi_i(x,y) P_i + \sum_{\substack{i \neq j \\ k=6-i-j}} (4 \lambda_k (1-\lambda_k)(1-2\lambda_k) + 4 \lambda_i \lambda_j - 12 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) P_{ij} \\ - \sum_{i=1}^3 \frac{2\Delta}{P_i} \lambda_i (2\lambda_i - 1) (\lambda_i - 1) \left[\frac{\partial P}{\partial n} \right]_i, \quad \text{où}$$

$$\Phi_1(x,y) = \lambda_1 \left(\lambda_1 - \frac{1}{2} \right) (\lambda_1 + 1) + 3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \frac{d_2}{l_2^2} \lambda_2 (2\lambda_2 - 1) (\lambda_2 - 1) \\ + \frac{d_3}{l_3^2} \lambda_3 (2\lambda_3 - 1) (\lambda_3 - 1),$$

les $\Phi_i(x,y)$, $i = 2$ et 3 , étant définis par permutation circulaire.



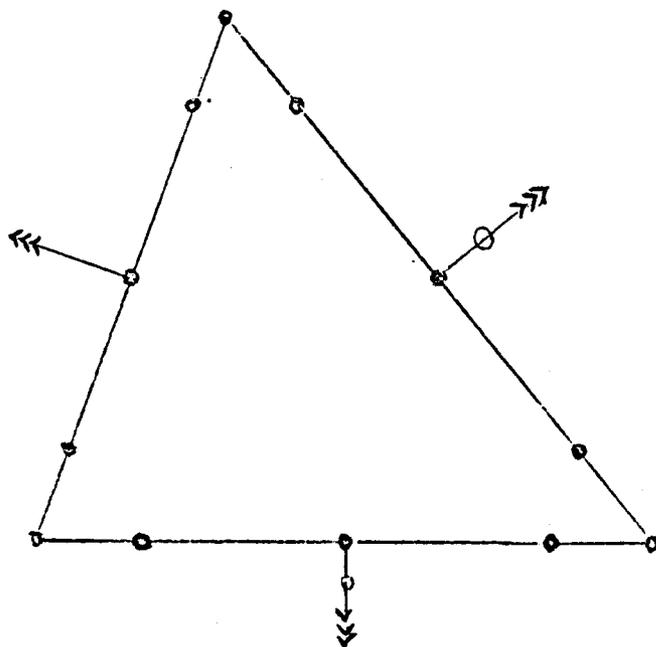
$$N = 15 \quad P_K = P(4)$$

Hypothèses H et H_1 , $v_h \notin C^0(\bar{\Omega})$

Unisolvance non vérifiée.

$$\text{Erreurs: } \|u - u_h\|_h = O(h^2) \quad , \quad |u - u_h|_{0,\Omega} = O(h^3) .$$

Figure 4.3



$N = 21$

$P_K = P(5)$

Hypothèses H et H_2 , $v_{ii} \notin C^0(\bar{\Omega})$

Unisolvance non vérifiée

Erreurs : $\|u - u_h\|_h = O(h^3)$, $|u - u_h|_{0,\Omega} = O(h^4)$

Figure 4.4

La deuxième famille d'éléments (figure 4.5, 4.6, 4.7) est issue de la figure 4.1, triangle de droite.

L'espace des fonctions de forme est en principe constitué de polynômes de $P(k)$ (éventuellement incomplets). Les degrés de liberté sont :

- i) les valeurs des dérivées normales en $k-1$ points par côté, ces $k-1$ points étant les abscisses de Gauss,
- ii) les valeurs de la fonction en j points par côté, $j \geq 2$, ces j points étant les abscisses de Gauss-Lobatto.

Pour $k \leq 6$ on aura nécessairement $j \leq k-1$.

Pour $k \geq 7$ on peut peut-être choisir $j \geq k$ (il reste bien sûr à vérifier l'unisolvance),

- iii) les valeurs de la fonction en d'autres points.

Lemme 4.2 : Pour les éléments décrits ci-dessus, l'hypothèse H_0 est toujours satisfaite et l'hypothèse H_r est satisfaite avec :

$$r = \inf \{ k-2, 2j-2-k \} .$$

Démonstration : Pour $k \geq 4$ on considère l'intégrale $\int_A^B s^\alpha w ds$,

le long d'un côté AB, où α est un entier. Cette intégrale est calculée exactement en utilisant les abscisses de Gauss-Lobatto :

si $\alpha \leq 2j-3-k$ (si $2j-3-k < 0$, on ne peut rien dire sur $\int_A^B w ds$).

Si $2j-3-k \geq 0$, les quantités $\int_A^B s^\alpha w ds$, pour $\alpha \leq 2j-3-k$ ne dépendent

que des degrés de libertés attachés à l'arête AB. Il en est de même pour

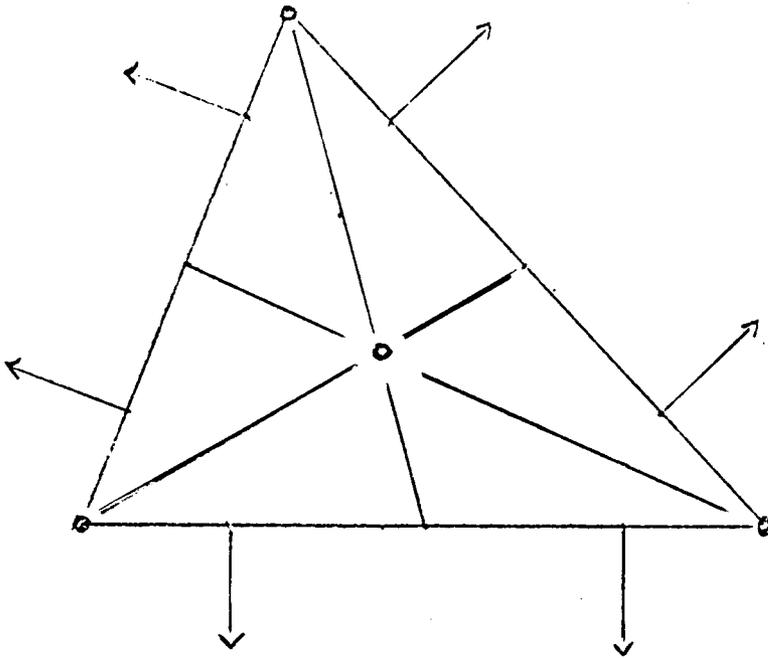
les quantités $\int_A^B s^\alpha \frac{\partial w}{\partial s} ds$ pour $\alpha \leq 2j-2-k$.

Pour $k = 3$, on vérifie aisément que l'hypothèse H_0 est satisfaite.

Les intégrales $\int_A^B s^\alpha \frac{\partial w}{\partial n} ds$, pour $\alpha \leq k-2$, sont calculées exactement

en utilisant les abscisses de Gauss, donc ne dépendent que des degrés de liberté attachés à l'arête AB.

Remarque 4.2 : La définition de ces éléments utilisant des dérivées normales ne pourrait devenir affine que pour $j \geq k+1$ donc pour $k \geq 8$. En pratique pour des valeurs de k raisonnables, la recherche des fonctions de formes risque donc d'être "longue".



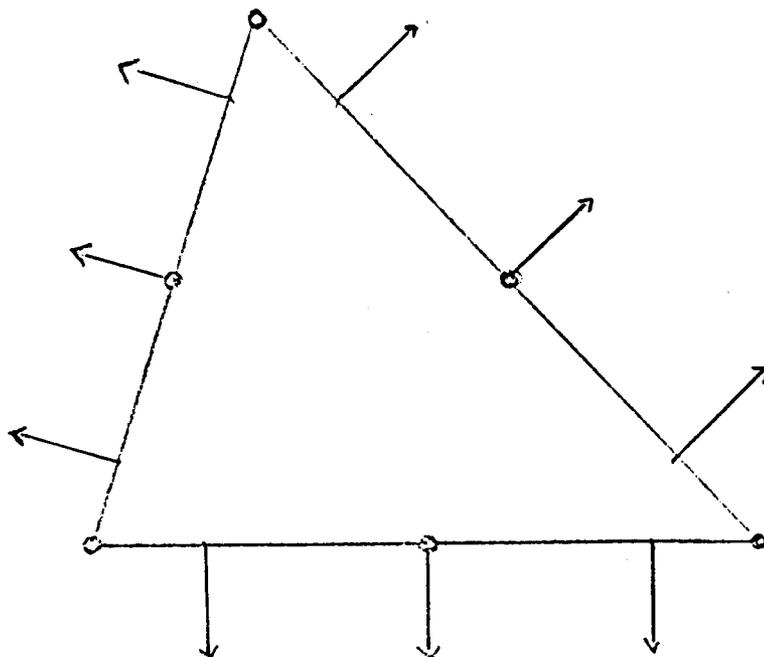
$$N = 10 \quad , \quad P_K = P(3)$$

Hypothèses H et H_0 , $v_h \in C^0(\bar{\Omega})$

Unisolvance vérifiée.

$$\text{Erreurs : } \|u - u_h\|_h = O(h) \quad , \quad |u - u_h|_{0,\Omega} = O(h^2)$$

Figure 4.5 Element F V 2



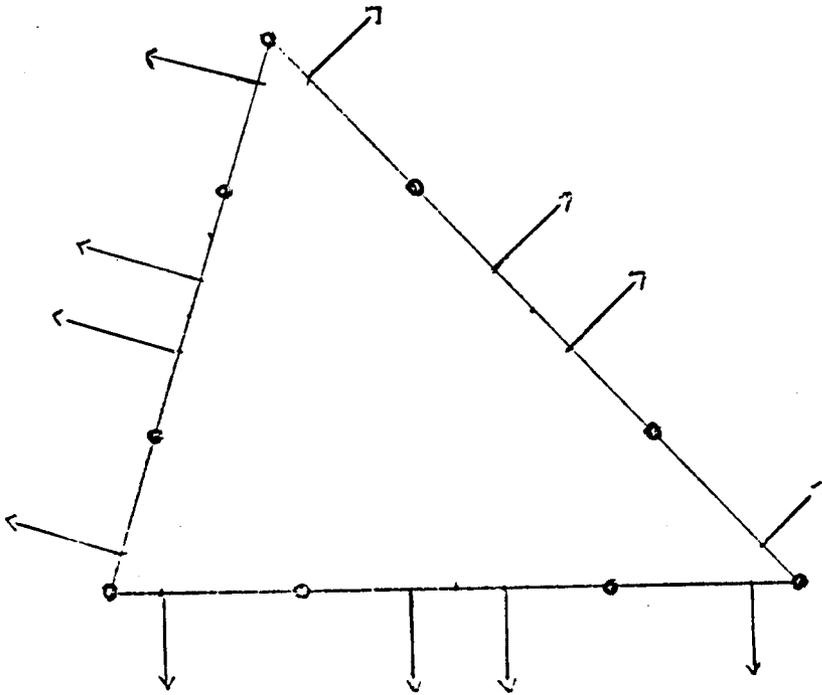
$N = 15$ $P = P(4)$

Hypothèses H et H_0 : $v_h \notin C^0(\bar{\Omega})$

Unisolvance non vérifiée.

Erreurs : $\|u - u_h\|_h = O(h)$, $|u - u_h|_{0,\Omega} = O(h^2)$

Figure 4.6



$$N = 21 \quad P_K = P(5)$$

Hypothèses H et H_1 , $v_u \notin C^0(\bar{\Omega})$

Unisolvance non vérifiée.

$$\text{Erreurs: } \|u - u_h\|_h = O(h^2) \quad , \quad |u - u_h|_{0,\Omega} = O(h^3)$$

Figure 4.7

Une troisième famille (figures 4.8 et 4.9) est constituée d'éléments de classe C° . L'espace des fonctions de forme est en principe l'espace $P(k)$, pour $k \geq 4$ (éventuellement incomplet). Les degrés de liberté sont :

- i) Les valeurs en $k+1$ points par côté,
- ii) Les valeurs de différentes moyennes de la dérivée normale le long de chaque côté :

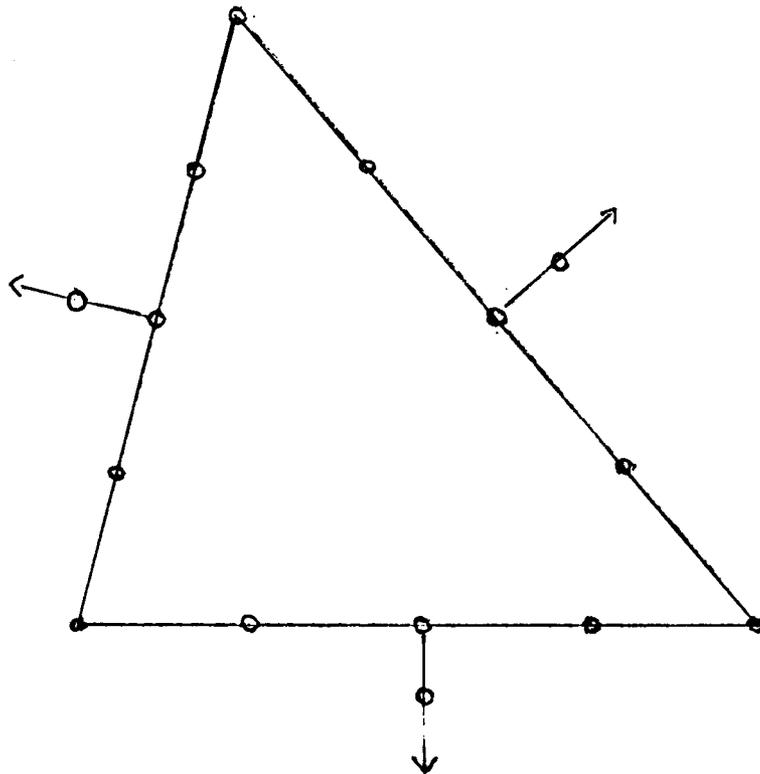
$$\int s^\alpha \frac{\partial w}{\partial n} ds \text{ pour les entiers } \alpha \leq j,$$

- iii) Les valeurs en d'autres points, éventuellement.

Lemme 4.3 : Pour les éléments décrits ci-dessus, l'hypothèse H_r est satisfaite pour $r = j$.

Démonstration : Il suffit d'utiliser la définition ii).

Remarque 4.3 : La définition de ces éléments peut toujours être rendue affine car il y a continuité de la fonction, donc des dérivées tangentielles le long des côtés.



$N = 15$

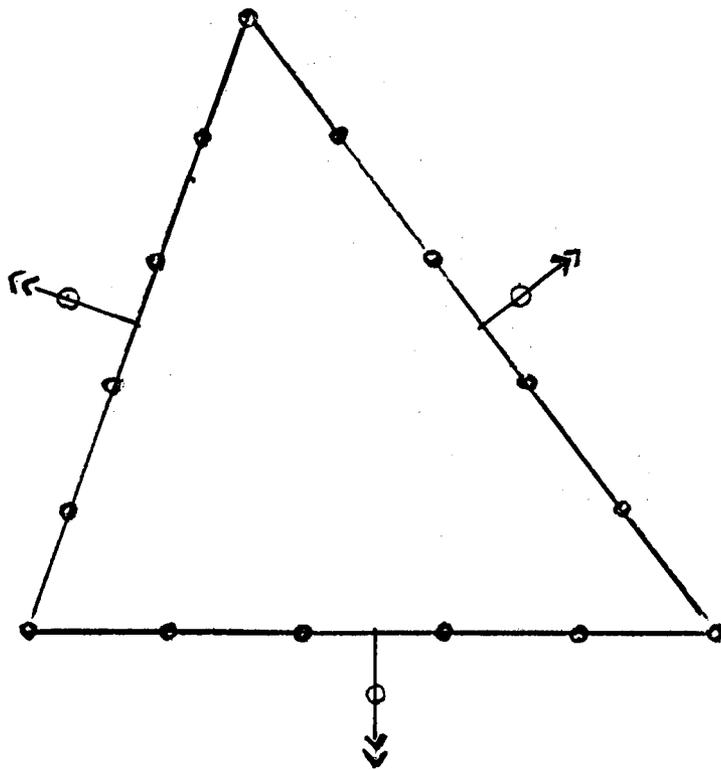
$P_K = P(4)$

Hypothèse H_0 , $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$

Unisolvance non vérifiée.

Erreur : $\|u-u_h\|_h = O(h)$, $|u-u_h|_{1,\Omega} = O(h^2)$

Figure 4.8



$$N = 21 \quad , \quad P_K = P(5)$$

Hypothèse H_1 ; $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$

Unisolvance non vérifiée

$$\text{Erreur } \|u - u_h\|_h = O(h) \quad , \quad |u - u_h|_{1,\Omega} = O(h^2)$$

$$|u - u_h|_{0,\Omega} = O(h^3)$$

Figure 4.9

Nous allons donner maintenant quelques éléments quadrilatéraux (figures 4.10 - 4.11 et 4.12).

L'espace des fonctions de forme P_K sera défini par :

$$P_K = \left\{ P ; P = \hat{P}_0 F_K^{-1}, \hat{P} \in \hat{Q} \right\},$$

où F_K est la transformation isoparamétrique qui envoie le carré de référence \hat{K} sur le quadrilatère K (figure 4.10) et où \hat{Q} sera en principe l'espace $Q(k)$ (éventuellement incomplet) pour un entier $k \geq 2$.

Les degrés de liberté sont :

- i) les valeurs de la fonction en k points par côté, ces k points étant les abscisses de Gauss-Lobatto,
- ii) les valeurs de différentes moyennes de la dérivée normale le long de chaque côté,

$$\int s^\alpha \frac{\partial w}{\partial n} ds \quad \text{pour les entiers } \alpha \leq k-2$$

- iii) les valeurs de la fonction en d'autres points.

Lemme 4.4 : Pour les éléments décrits ci-dessus, les hypothèses H et H_r , avec $r = k-2$, sont satisfaites.

Démonstration : Pour $k = 2$, la fonction est donnée en deux points sur chaque côté, ces deux points étant les extrémités de ce côté.

L'intégrale $\int \frac{\partial w}{\partial s} ds$ ne dépend donc que des degrés de liberté attachés à ce côté.

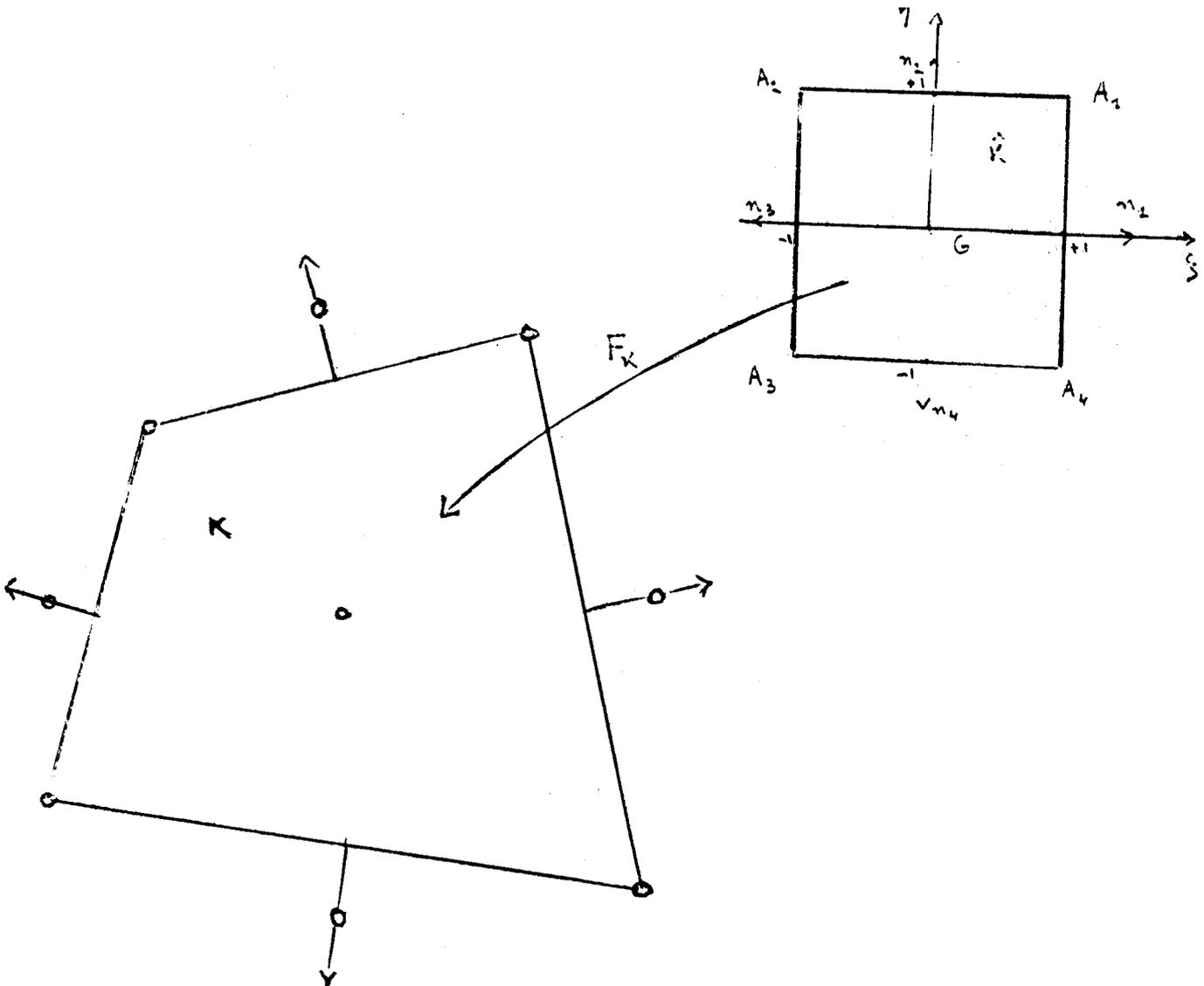
Il en est de même, par définition pour $\int \frac{\partial w}{\partial n} ds$.

Pour $k \geq 3$, l'intégrale $\int s^\alpha w ds$, pour les entiers $\alpha \leq k-3$, est calculée exactement en utilisant les valeurs aux abscisses de Gauss-Lobatto, donc elle ne dépend que des degrés de liberté attachés au côté considéré.

Il en est de même pour $\int s^\alpha \frac{\partial w}{\partial s} ds$, pour les entiers $\alpha \leq k-2$, et par définition pour $\int s^\alpha \frac{\partial w}{\partial n} ds$, $\alpha \leq k-2$.

Remarque 4.4 : La définition de ces éléments peut être rendue affine, car la donnée des valeurs de la fonction en k points de

Gauss-Lobatto et des intégrales $\int s^\alpha \frac{\partial w}{\partial n} ds$, $\alpha \leq k-2$, entraîne la connaissance de $\int s^\alpha \vec{D}w ds$, pour $\alpha \leq k-2$.



$N = 9$

$P_K = Q(2)$

Hypothèses H et H_0 , $v_h \in C^0(\bar{\Omega})$

Unisolvance vérifiée.

Erreurs: $\|u - u_h\|_h = O(h)$, $|u - u_h|_{0,\Omega} = O(h^2)$

Figure 4.10

Lorsque cet élément est le carré de référence $[-1,+1] \times [-1,+1]$ on peut écrire les fonctions de la forme de la façon suivante :

$$\varphi_1 = -\frac{1}{8}(\xi + \eta) + \frac{\xi\eta}{4} - \frac{\xi^2 + \eta^2}{4} + \frac{3}{8}\xi\eta(\xi + \eta) + \frac{3}{4}\xi^2\eta^2,$$

$$\varphi_G = 1 + (\xi^2 + \eta^2) - 3\xi^2\eta^2,$$

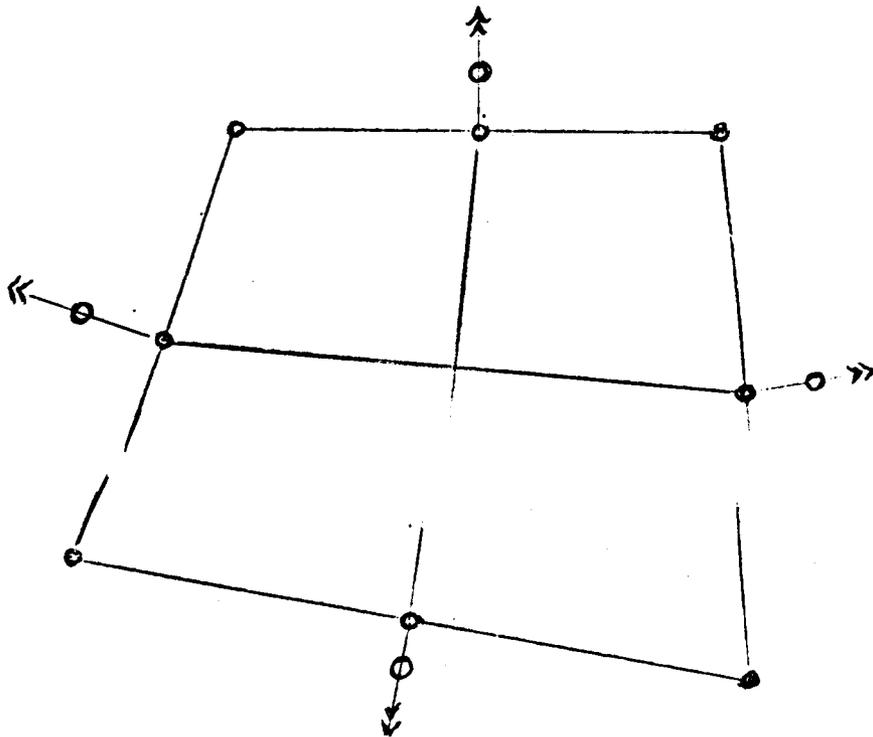
$$\varphi_{n_1} = \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{3}{4}\xi\eta^2 - \frac{3}{4}\xi^2\eta^2,$$

les autres fonctions de forme étant obtenues en changeant ξ et (ou) η en $-\xi$ (ou) $-\eta$, ou bien ξ en η et η en ξ .

La valeur au centre de gravité peut être éliminée de façon classique par la relation :

$$P_G = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 P_i - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 P_{n_i}$$

On a alors : $P(2) \subset \hat{Q} \subset Q(2)$.



$N = 16$ $P(K) = Q(3)$

Hypothèses H et H_1 , $v_h \notin C^0(\bar{\Omega})$

Unisolvance non vérifiée

Erreurs : $\|u - u_h\|_h = O(h^2)$, $|u - u_h|_{0,\Omega} = O(h^3)$

Figure 4.11

V - ELEMENT D'ADINI

Définition 5.1 : L'élément d'Adini /1/ se définit de la façon suivante :

- i) La forme géométrique est un rectangle (ou un parallélogramme),
- ii) Les degrés de liberté sont les valeurs de la fonction et de ses dérivées premières aux sommets du rectangle,
- iii) L'espace P_K des fonctions de forme est l'image par la transformation isoparamétrique F_K définie ci-dessous de l'espace :

$$\left\{ P(3) \cup \{\xi^3 \eta\} \cup \{\xi \eta^3\} \right\}.$$

Il existe un polynôme $P \in P_K$ unique prenant des valeurs données pour les degrés de liberté et les fonctions de forme s'exprimant aisément en coordonnées locales ξ, η si on utilise la transformation isoparamétrique F_K définie pour $-1 \leq \xi, \eta \leq +1$ par :

$$F_K : \begin{cases} x = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} x_1 + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} x_2 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} x_3 + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} x_4, \\ y = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} y_1 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} y_2 + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} y_3 + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} y_4, \end{cases}$$

où (x_i, y_i) sont les coordonnées des sommets A_i $1 \leq i \leq 4$.

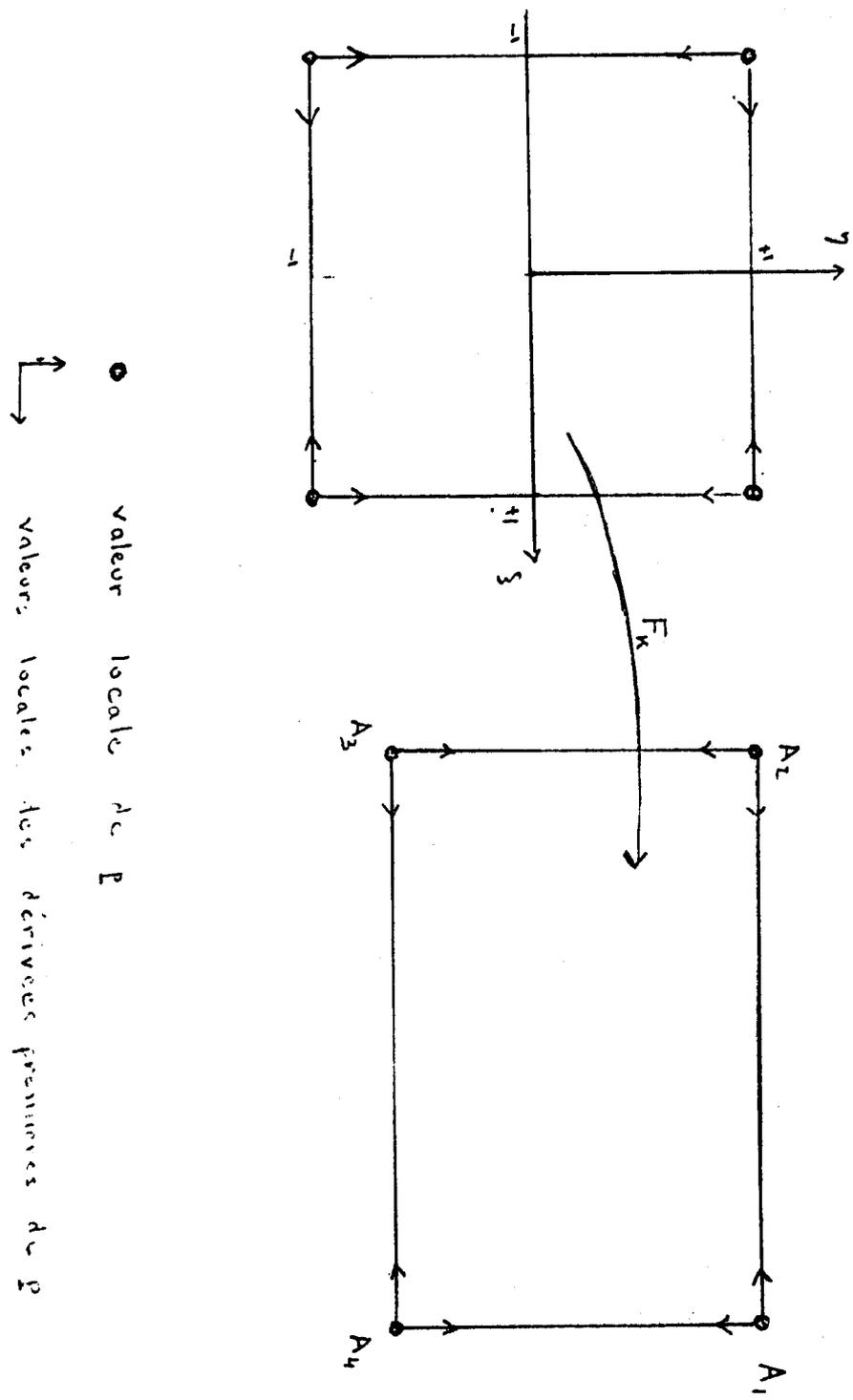


Figure 5.1 - Element d'Adini

Soient P_i les valeurs de $P \in P_K$ aux sommets A_i , $1 \leq i \leq 4$, on a :

$$P(x,y) = \sum_{i=1}^4 P_i \varphi_i(x,y) + \sum_{(i,j) \in I} \vec{DP} \cdot \vec{A_i A_j} \varphi_{i,j}(x,y), \text{ où}$$

$$I = \left\{ (i,j) ; i,j \leq 4, i \neq j, |i-j| = 1 \text{ ou } 3 \right\} \text{ et où}$$

$$\varphi_i(x,y) = \hat{\varphi}_i \circ F_K^{-1}, 1 \leq i \leq 4, \varphi_{i,j}(x,y) = \hat{\varphi}_{i,j} \circ F_K^{-1}, (i,j) \in I,$$

$$\hat{\varphi}_1(\xi, \eta) = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \left(1 + \frac{\xi+\eta}{2} - \frac{\xi^2+\eta^2}{2} \right),$$

$$\hat{\varphi}_{1,2}(\xi, \eta) = \frac{(1+\eta)(1+\xi)^2(1-\xi)}{16},$$

$$\hat{\varphi}_{1,4}(\xi, \eta) = - \frac{(1+\xi)(1+\eta)^2(1-\eta)}{16},$$

les autres fonctions de forme s'écrivant en changeant ξ en $-\xi$ et (ou) η en $-\eta$.

L'espace V_h sera l'espace des fonctions dont la restriction à chaque élément K appartient à P_K et qui sont continues ainsi que leurs dérivées premières aux sommets des rectangles. Aux sommets appartenant à la frontière Γ , les fonctions et leurs dérivées premières sont nulles. Les fonctions de V_h sont continues sur $\bar{\Omega}$ et nulles sur Γ . En utilisant la continuité des dérivées aux sommets, il est facile de montrer :

Lemme 5.1 : $\| \cdot \|_h$ est une norme sur V_h .

Le long d'une arête quelconque, $\frac{\partial v}{\partial n}$, pour $v \in P_n$, est un polynôme de degré ≤ 3 . L'hypothèse H_0 n'est donc pas satisfaite. Cependant, il est possible de montrer :

Lemme 5.2 : Pour toute fonction $u \in P(2)$ et pour tout $w \in V_h$, on a $E_h(u,w) = 0$. L'élément d'Adini passe donc le Patch Test.

Démonstration : On a, puisque $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$

$$(5.1) \quad \Gamma_h(u, w) \equiv L_1(u, w) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \frac{\partial w}{\partial n} ds .$$

Considérons séparément les arêtes parallèles à l'axe des x et à l'axe des y.

On a : $E_1 = E_x + E_y$, avec

$$E_x(u, w) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \frac{\partial w}{\partial x} n_x ds ,$$

$$E_y(u, w) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \frac{\partial w}{\partial y} n_y ds , \text{ pour } u \in H^3(\Omega), w \in V_h .$$

Soit $\frac{\tilde{\partial w}}{\partial x}$ la fonction continue dont la restriction à chaque élément K appartient à $Q(1)$, l'espace des polynômes de la forme

$q = a + bx + cy + dxy$, et qui prend les mêmes valeurs que $\frac{\partial w}{\partial x}$ aux sommets des éléments. On pose :

$$(5.2) \quad z_h = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\tilde{\partial w}}{\partial x} . \text{ On a}$$

$$E_x(u, w) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \cdot z_h n_x ds .$$

Nous allons montrer que :

$$(5.3) \quad \int_{\partial K} z_h n_x ds = 0 \text{ pour tout } w \in V_h \text{ et pour tout } K \in \mathcal{T}_h .$$

Sur l'élément de référence K, toute fonction w s'écrit :

$$w = P_0(\xi) + \eta P_1(\xi) + \eta^2 P_2(\xi) + \eta^3 P_3(\xi) , \text{ où}$$

P_0 et P_1 (resp. P_2 et P_3) sont des polynômes de degré ≤ 1 (resp ≤ 3)

On a :

$$\hat{z}_h(1, \eta) = \hat{z}_h(-1, \eta) = \frac{2}{\Delta x} \left(\frac{\partial P_2}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial P_3}{\partial \xi} \right) (\eta^2 - 1) .$$

D'autre part on a :

$$\int_{\partial K} z_h n_x ds = \frac{\Delta y}{2} \int_{-1}^{+1} (\hat{z}_h(1, \eta) - \hat{z}_h(-1, \eta)) d\eta .$$

On en déduit l'égalité (5.3).

Lorsque tous les rectangles sont égaux, on peut montrer le résultat suivant [22].

Lemme 5.3 : Si tous les rectangles sont égaux, on a :

$$(5.4) \quad E_h(u, w) = 0 \quad \text{pour tout } u \in P(3) \text{ et } w \in V_h .$$

L'élément d'Adini passe alors un Super Patch-Test.

On a les résultats de convergence suivants :

Théorème 5.1 : On suppose que la solution exacte u appartient à $H^3(\Omega)$. Soit u_h la solution du problème approché, on a :

$$(5.5) \quad \|u - u_h\|_h \leq c h |u|_{3, \Omega} ,$$

$$(5.6) \quad \|u - u_h\|_{1, \Omega} \leq c h^2 |u|_{3, \Omega} .$$

On suppose maintenant que u appartient à $H^4(\Omega)$ et que les rectangles sont égaux, on a alors :

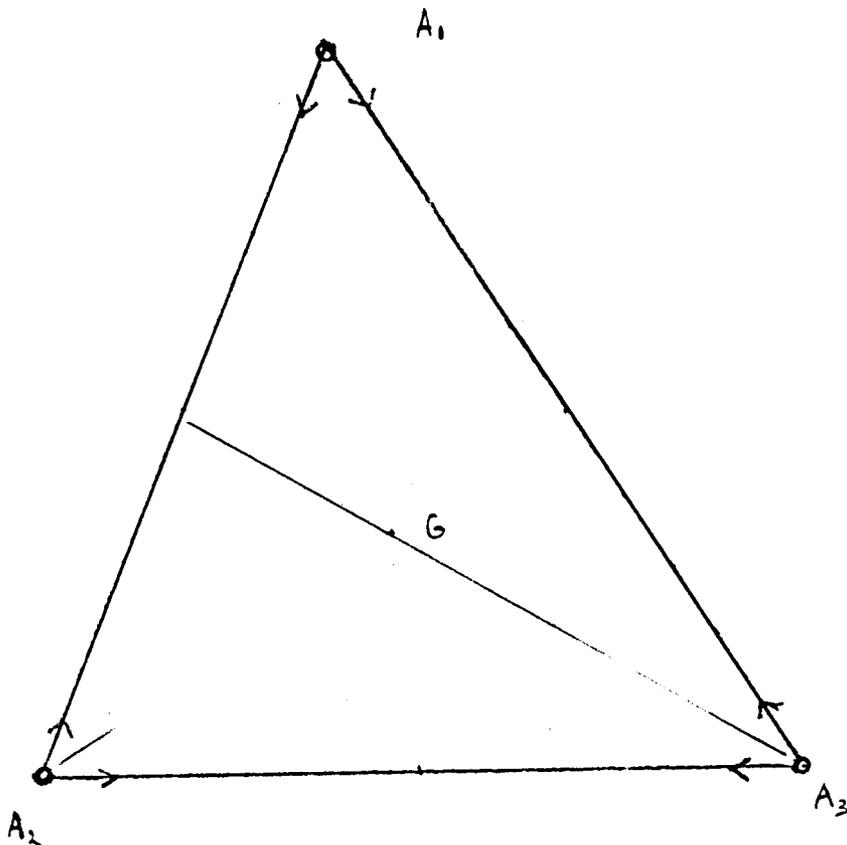
$$(5.7) \quad \|u - u_h\|_h \leq c h^2 |u|_{4, \Omega} .$$

Remarque 5.1 : Des essais numériques effectués avec des rectangles égaux permettent de vérifier la majoration (5.7). Ces mêmes essais donnent d'autre part une majoration en $O(h^4)$ pour $|u - u_h|_{0, \Omega}$.

VI - ELEMENT DE ZIENKIEWICZ

Définition 6.1 : L'élément triangulaire de Zienkiewicz [2] se définit de la façon suivante (figure 6.1) :

- 1) Les degrés de liberté sont les valeurs des fonctions et de leurs dérivées premières aux sommets des éléments.



• Valeur de P

↔ Valeurs des dérivées premières de P

Figure 6.1

Element de Zienkiewicz

ii) L'espace P_K des fonctions de forme est l'espace des polynômes P de $P(3)$ satisfaisant la relation :

$$(6.1) \quad P(G) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 P_i + \frac{1}{18} \sum_{\substack{1 \leq j, k \leq 3 \\ j \neq k}} DP_{j,k} \quad , \quad \text{où}$$

$$P_i = P(A_i) \quad , \quad 1 \leq i \leq 3 \quad ,$$

$$DP_{jk} = \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{A_j A_k} (A_j) \quad , \quad 1 \leq j, k \leq 3, j \neq k \quad .$$

Il existe un polynôme de P_K unique prenant des valeurs données aux degrés de liberté, et on a :

$$(6.2) \quad P(x, y) = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i^2 (3 - 2\lambda_i) + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3) P_i$$

$$+ \sum_{\substack{1 \leq j, k \leq 3 \\ j \neq k}} \frac{1}{2} \lambda_j \lambda_k (1 + \lambda_j - \lambda_k) DP_{j,k}$$

On a l'inclusion $P(2) \subset P_K \subset P(3)$.

L'espace V_h sera l'espace des fonctions continues pour les degrés de liberté des éléments, dont la restriction à chaque élément appartient à P_K , et nulles pour les degrés de liberté attachés à la frontière. On a : $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$. En utilisant la continuité aux degrés de libertés, on peut montrer /23/.

Lemme 6.1 : $\| \cdot \|_h$ est une norme pour l'espace V_h .

Le long d'une arête quelconque, $\frac{\partial v}{\partial n}$, pour $v \in P_K$, est un polynôme de degré ≤ 2 . L'hypothèse H_0 n'est donc pas satisfaite. Cependant, on peut montrer :

Lemme 6.2 : On suppose que les côtés des triangles sont parallèles à 3 directions données. On a alors :

$E_h(u, w) \equiv E(u, w) = 0$ pour tout $u \in P(2)$ et $w \in V_h$.

Démonstration : Considérons la figure 6.2. On pose :

$$|\overrightarrow{A_2 A_3}| = a, \quad |\overrightarrow{A_3 A_4}| = b, \quad |\overrightarrow{A_1 A_3}| = c, \quad \overrightarrow{s_{ij}} = \frac{\overrightarrow{A_i A_j}}{|\overrightarrow{A_i A_j}|} \text{ et}$$

A_{ij} = milieu du segment $A_i A_j$, pour toute arête $A_i A_j$,

$$m_a = \overrightarrow{A_1 A_{23}} \cdot \overrightarrow{s_{23}} \text{ et } \Delta = \text{aire des triangles.}$$

Pour toutes fonctions $u \in P(2)$, $w \in V_h$ et pour toute arête $A_i A_j$, on peut écrire, puisque les dérivées de w appartiennent à $P(2)$:

$$(6.3) \int_{A_i}^{A_j} (\Delta u - (1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}) \frac{\partial w}{\partial n} ds = A_i A_j (\Delta u - (1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s_{ij}^2})$$

$$(\frac{1}{6} \frac{\partial w}{\partial n}(A_i) + \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial n}(A_{ij}) + \frac{1}{6} \frac{\partial w}{\partial n}(A_j))$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée normale à l'arête $A_i A_j$.

Les dérivées premières de w étant continues aux sommets des éléments, on a :

$$(6.4) E_1(u, w) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \subset \partial K} \frac{2}{3} ((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s_L^2} - \Delta u) \frac{\partial w}{\partial n_L} \ell(L), \text{ pour}$$

tout $u \in P(2)$, $w \in V_h$, et où s_L est une abscisse curviligne le long de L ,

$\frac{\partial}{\partial n_L}$ est la dérivée normale à L extérieure à l'élément K , au milieu de

l'arête L et $\ell(L)$ est la longueur de l'arête L , pour tout $L \subset \partial K$, $K \in \mathcal{T}_h$.

Soit $P \in P_K$, où K est le triangle $A_1 A_2 A_3$. La dérivée normale à l'arête $A_2 A_3$ au point A_{23} est donnée par :

$$(6.5) \frac{\partial P}{\partial n} = \frac{a}{\Delta} (-\frac{1}{2} P_1 + \frac{P_2 + P_3}{4} - \frac{1}{8} DP_{12} - \frac{1}{8} DP_{13} - \frac{3}{8} DP_{21} - \frac{3}{8} DP_{31} + \frac{1}{4} DP_{23} + \frac{1}{4} DP_{32})$$

$$+ \frac{m_a}{\Delta} (\frac{3}{2} (P_2 - P_3) + \frac{1}{4} (DP_{23} - DP_{32})).$$

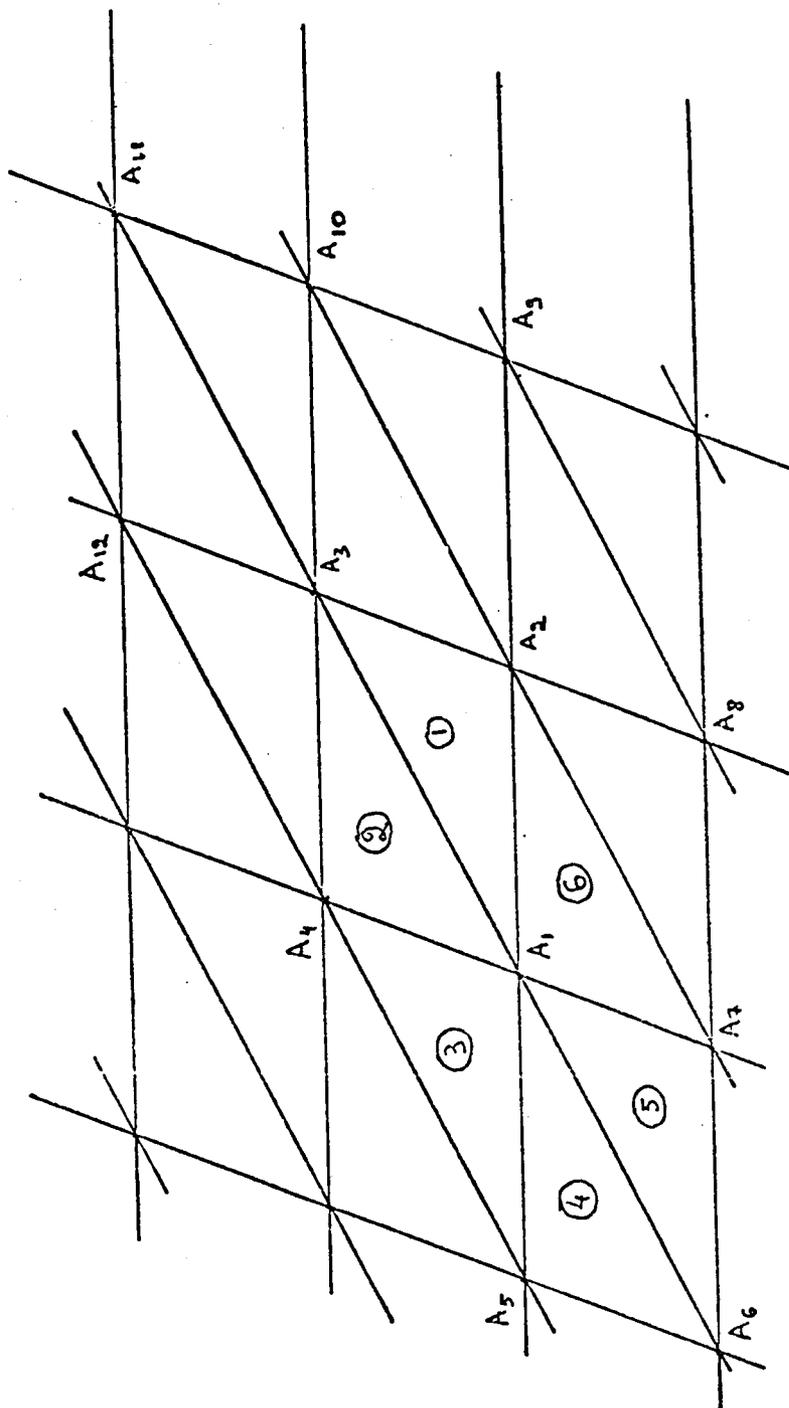


Figure 6.2 - Un assemblage d'éléments dont les arêtes sont parallèles à trois directions données

Dans l'égalité (6.4) nous ne considérerons que les arêtes parallèles à A_2A_3 et les fonctions w égales à zéro pour tous les degrés de liberté, sauf ceux qui sont attachés au sommet A_1 . On obtient :

$$E_1^a(u,w) = \frac{2}{3} a \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s_a^2} - \Delta u \right) \left(\frac{\partial w^1}{\partial n} (A_{23}) + \frac{\partial w^2}{\partial n} (A_{14}) + \frac{\partial w^3}{\partial n} (A_{14}) + \frac{\partial w^4}{\partial n} (A_{56}) + \frac{\partial w^5}{\partial n} (A_{17}) + \frac{\partial w^6}{\partial n} (A_{17}) \right) ,$$

où s_a est une abscisse curviligne dans la direction $A_2 A_3$ et w^i , $1 \leq i \leq 6$, sont les valeurs de w dans les triangles notés \textcircled{i} sur la figure 6.2. En utilisant la formule (6.5), on obtient :

$$\frac{\partial w^1}{\partial n} (A_{23}) = \frac{a}{\Delta} \left(-\frac{1}{2} P_1 - \frac{1}{8} DP_{12} - \frac{1}{8} DP_{13} \right) ,$$

$$\frac{\partial w^2}{\partial n} (A_{14}) = \frac{a}{\Delta} \left(\frac{1}{4} P_1 - \frac{3}{8} DP_{13} + \frac{1}{4} DP_{14} \right) + \frac{m_a}{\Delta} \left(-\frac{3}{2} P_1 - \frac{1}{4} DP_{14} \right) ,$$

$$\frac{\partial w^3}{\partial n} (A_{14}) = \frac{a}{\Delta} \left(\frac{1}{4} P_1 - \frac{3}{8} DP_{15} + \frac{1}{4} DP_{14} \right) + \frac{m_a}{\Delta} \left(\frac{3}{2} P_1 + \frac{1}{4} DP_{14} \right) ,$$

$$\frac{\partial w^4}{\partial n} (A_{56}) = \frac{a}{\Delta} \left(-\frac{1}{2} P_1 - \frac{1}{8} DP_{15} - \frac{1}{8} DP_{16} \right) ,$$

$$\frac{\partial w^5}{\partial n} (A_{17}) = \frac{a}{\Delta} \left(\frac{1}{4} P_1 - \frac{3}{8} DP_{16} + \frac{1}{4} DP_{17} \right) + \frac{m_a}{\Delta} \left(-\frac{3}{2} P_1 - \frac{1}{4} DP_{17} \right) ,$$

$$\frac{\partial w^6}{\partial n} (A_{17}) = \frac{a}{\Delta} \left(\frac{1}{4} P_1 - \frac{3}{8} DP_{12} + \frac{1}{4} DP_{17} \right) + \frac{m_a}{\Delta} \left(\frac{3}{2} P_1 + \frac{1}{4} DP_{17} \right) .$$

En sommant toutes ces égalités, on obtient $E_1^a(u,w) = 0$.

Cette égalité est aussi vraie pour les deux autres directions, ce qui termine la démonstration du Patch Test.

On peut montrer /22/ les résultats de convergence suivants :

Théorème 6.1 : On suppose que la solution exacte u appartient à $H^3(\Omega)$ et soit u_n la solution du problème approché. On suppose que

les triangles sont générés par trois familles de droites parallèles.

On a :

$$\|u-u_h\|_h \leq c h |u|_{3,\Omega} ,$$

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega} \leq c h^2 |u|_{3,\Omega} .$$

où c est une constante indépendante de h.

BIBLIOGRAPHIE

- /1/ ADINI A. ; CLOUGH R.W. - Analysis of plate bending by the finite element method - NSF Report G. 7337, 1961.
- /2/ AUBIN J.P. - Behavior of the error of the approximate solutions of boundary value problems for linear elliptic operators by Galerkin's and finite difference methods. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 21, 599-637, 1967
- /3/ BAZELEY G.P. ; CHEUNG Y.K. ; IRONS B.M. ; ZIENKIEWICZ O.C. Triangular elements in bending-conforming and nonconforming solutions. Proceedings Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson A.F.B., Ohio, 1965.
- /4/ CIARLET P.G. - Conforming and Nonconforming finite element methods for solving the plate problem. Proceedings Conference on the Numerical Solution of Differential Equations, University of Dundee, July 03-06, 1973.
- /5/ CIARLET P.G. - Quelques méthodes d'éléments finis pour le problème d'une plaque encadrée. Colloques IRIA, Méthodes de Calcul Scientifique et Technique, 66-85, Rocquencourt, 1973.
- /6/ CIARLET P.G. ; RAVIART P.A. - General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods. Arch. Rational Mech. Anal. 46, 177-199, 1972.
- /7/ CIARLET P.G. ; RAVIART P.A. - Error bounds for finite elements "with normal derivatives" (to appear).
- /8/ CROUZEIX M. ; RAVIART P.A. - Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. I (to appear).
- /9/ FRAEIJLS de VEUBEKE B. - Variational Principles and the Patch Test (to appear).
- /10/ IRONS B.M. ; RAZZAQUE A. - Experience with the patch test for convergence of finite elements. The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations (A.K. Aziz, Editor), 557-587 - Academic Press, New York, 1972.
- /11/ JOHNSON C. - On the convergence of a mixed finite element method for plate bending problems. Numer Math 21, 43-62, 1973.
- /12/ KONDRATEV V.A. - Boundary value problems for elliptic equations with conical or angular points. Trans. Moscow Math. Soc., 227-313, 1967.
- /13/ LANDAU L. ; LIFCHITZ E. - Theory of Elasticity - Pergamon Press 1970.
- /14/ LIONS J.L. ; MAGENES E. - Problèmes aux limites non-homogènes - Dunod, 1968.
- /15/ MORLEY L.S.D. - The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problems, Aero-Quart. 19, 149-169, 1968.
- /16/ MIYOSHI T. - Convergence of finite element solutions represented by a non-conforming basis, Kumamoto J. Sci. Math. 9, 11-20, 1972.

- /17/ NITSCHKE J. - Convergence of non conforming elements. Symposium on Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations, Madison, Wisconsin, April 1-3, 1974.
- /18/ NITSCHKE J. - Ein Kriterium für die Quasi-optimalität des Ritzschen Verfahrens. Numer. Math. 13, 260-265, 1969.
- /19/ STRANG G. - Variational Crimes in the finite element method. The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations (A.K. Aziz, Editor), 689-710, Academic Press, New York, 1972.
- /20/ STRANG G. ; FIX G. - An analysis of the Finite Element Method, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1973.
- /21/ ZIENKIEWICZ O.C. - The Finite Element Method in Engineering Science, Mac Graw-Hill, London, 1971.
- /22/ LASCAUX P. et LESAINTE P. - Some non conforming finite elements for the plate bending problem. To appear in R.A.I.R.O.