

J. F. CIAVALDINI

J. C. NEDELEC

**Sur l'élément de Fraeijs de Veubeke et Sander**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1974, fascicule S4

« Journées éléments finis », , p. 1-17

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1974\\_\\_S4\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1974__S4_A2_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ELEMENT DE FRAEIJIS DE VEUBEKE ET SANDER

J.F. CIAVALDINI et J.C. NEDELEC  
U.E.R. Mathématiques et Informatique  
Université de Rennes I  
B.P. 25 A      35031 RENNES CEDEX

Résumé : On étudie les propriétés d'unisolvence et on donne des estimations de l'erreur d'interpolation de l'élément fini de Fraeijs de Veubeke et Sander utilisé dans la résolution numérique des problèmes de plaques.

Abstract : We study unisolvence properties and we give estimations of the interpolation error in the Fraeijs de Veubeke and Sander finite element, which is used in the numerical solution of the plate problem.



# 1. Introduction et notations.

L'étude de la flexion d'une plaque encastrée conduit en théorie linéarisée de l'élasticité à rechercher une fonction  $u$  - qui représente la déflexion verticale de la plaque - définie sur un domaine borné  $\Omega$  du plan ; la fonction  $u$  est continuellement dérivable et satisfait des relations de compatibilité intérieures à la plaque ne faisant intervenir que ses dérivées d'ordre quatre.

Ainsi en approche "compatible", une méthode consiste à utiliser dans la triangulation du domaine  $\Omega$  des éléments finis de classe  $C^1$  qui soient unisolvents sur un espace de fonctions localement polynomiales de degré inférieur ou égal à trois - ce qui assure à la fois la conformité et la compatibilité, les relations de compatibilité étant identiquement satisfaites et égales à zéro.

Un certain nombre d'éléments de ce type sont habituellement utilisés ; nous renvoyons à ce sujet à l'article de CIARLET [1] ; dans ce travail nous étudions les propriétés d'unisolvence et les estimations d'erreur d'interpolation de l'élément utilisé par FRAEIJIS DE VEUBEKE et SANDER et présenté dans [4], [6], [7].

On utilisera les notations suivantes :

$u|_A$  = restriction de la fonction  $u$  à la partie  $A$ .

$P_k$  = espace des polynômes à deux variables de degré inférieur ou égal à  $k$ .

$Q_k$  = espace des polynômes à deux variables de degré inférieur ou égal à  $k$  par rapport à chaque variable.

Pour toute fonction  $u$ ,  $D^l u(x)$  désignera sa dérivée totale d'ordre  $l$  au point  $x$  (c'est une forme  $l$ -linéaire symétrique),  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{[ab]}$  représentera sa dérivée normale au segment  $[ab]$  et  $\frac{\partial u}{\partial \tau}|_{[ab]}$  sa dérivée tangentielle.

On notera enfin

$$||D^l u(x)|| = \sup_{|\xi_1| \leq 1, \dots, |\xi_l| \leq 1} |D^l u(x) \cdot (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l)|$$

$$|u|_{l,K} = \left( \int_K ||D^l u(x)||^2 dx \right)^{1/2}$$

$$|u|_{l,\infty,K} = \sup_{x \in K} ||D^l u(x)||$$

$$||u||_{m,K} = \left( \sum_{0 \leq l \leq m} \int_K ||D^l u(x)||^2 dx \right)^{1/2}$$

$$||u||_{l,\infty,K} = \sup_{0 \leq l \leq m} \left\{ \sup_{x \in K} ||D^l u(x)|| \right\}$$

avec la convention d'écriture pour  $l = 0$ ,  $||D^0 u(x)|| = |u(x)|$

## 2. Présentation de l'élément - Unisolvence.

L'élément fini est un quadrilatère non dégénéré  $K$  (voir figure 1) de sommets  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ; il est lui-même subdivisé en quatre triangles  $K_i$  engendrés par les diagonales de  $K$  et on appelle  $a_0 = \bigcap_{i=1}^4 K_i$ .

On lui associe l'espace de fonctions réelles

$$(2.1) \quad P = \{p \in C^1(K) ; \exists (p_1, p_2, p_3) \in P_3^3, p|_{K_1} = p_1, p|_{K_2} = p_1 + p_2, \\ p|_{K_3} = p_1 + p_2 + p_3, p|_{K_4} = p_1 + p_3\}$$

La condition de raccordement de classe  $C^1$  sur les diagonales de  $K$  est équivalente aux deux conditions (2.2) :

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_2|_{[a_2 a_4]} = p_3|_{[a_1 a_3]} = 0 \\ \frac{\partial p_2}{\partial n}|_{[a_2 a_4]} = \frac{\partial p_3}{\partial n}|_{[a_1 a_3]} = 0 \end{array} \right.$$

On en déduit en particulier que

$$\frac{\partial p_2}{\partial \tau}|_{[a_2 a_4]} = \frac{\partial p_3}{\partial \tau}|_{[a_1 a_3]} = 0$$

et donc que la dérivée totale  $Dp_2$  (respectivement  $Dp_3$ ) est nulle le long de la diagonale  $[a_2 a_4]$  (respectivement  $[a_1 a_3]$ ).

Ainsi, comme on le verra au théorème 1, l'espace  $P$  est de dimension 16; il y a en effet dix coefficients dans l'expression de  $p_1$  et seulement trois pour chacun des polynômes  $p_2$  et  $p_3$ .

Si  $p$  est une fonction quelconque de l'espace  $P$ , on lui associe l'ensemble des degrés de liberté

$$(2.3) \quad \Sigma = \{p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), 1 \leq i \leq 4 ; \frac{\partial p}{\partial n}(a_{ij}), 1 \leq i \leq j \leq 4\}$$

$a_{ij}$  désignant le milieu du côté  $[a_i a_j]$ .

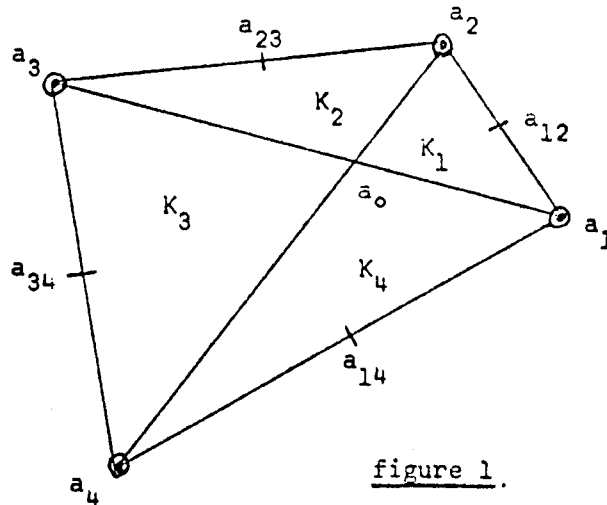


figure 1.

Il se pose maintenant deux problèmes ; démontrer que l'élément  $\Sigma$  est P-unisolvent selon la terminologie de [2] ; autrement dit que toute fonction p de l'espace P est déterminée de manière unique par les 16 degrés de liberté de  $\Sigma$ .

Ensuite donner une majoration sur l'élément K de l'erreur d'interpolation  $(u - \pi u)$  lorsque  $\pi u$  désigne l'unique fonction de l'espace P qui interpole la fonction u sur  $\Sigma$  ; pour cela on utilisera la théorie générale des familles affines d'éléments finis à une modification près puisque a priori (voir [3]) les éléments quadrilatéraux quelconques sont traités en tant qu'éléments courbes.

Lemme 1 : Etant donné un triangle  $K$  non dégénéré de sommets a, b, c ; l'ensemble

$$\tilde{\Sigma} = \{p(\cdot), \frac{\partial p}{\partial x}(\cdot), \frac{\partial p}{\partial y}(\cdot) \text{ en } a, b, c ; \frac{\partial p}{\partial n}(d)\}$$

le point d représentant le milieu de l'arête [bc], est  $P_3$ -unisolvant.

Démonstration (voir figure 2). Puisque  $\text{Card}(\tilde{\Sigma}) = 10 = \dim(P_3)$ , il suffit de montrer que si tous les degrés de liberté  $\tilde{\Sigma}$  sont nuls, le polynôme du troisième degré correspondant est nul.

Il est clair que les conditions

$$p(b) = p(c) = 0$$

$$Dp(b) = Dp(c) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}(d) = 0$$

entraînent que la dérivée totale Dp est nulle le long du côté [bc]. Soit x un point du triangle K et y l'intersection de la demi-droite [ax] avec le côté [bc] ; les conditions

$$p(a) = p(y) = 0$$

$$Dp(a) = Dp(y) = 0$$

entraînent alors  $p(x) = 0$  ■

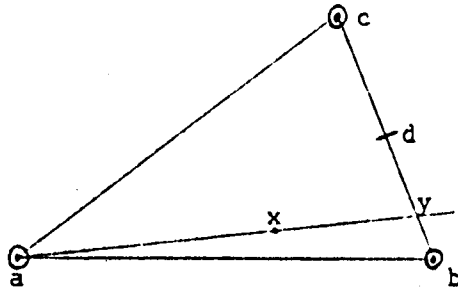


figure 2

On aura besoin dans la suite de l'expression d'un polynôme  $p \in P_3$  nul ainsi que sa dérivée  $Dp$  le long du côté  $[bc]$  ; elle est donnée par

$$(2.4) \quad p = \lambda^2 [(3-2\lambda) p(a) + \mu Dp(a) \cdot (b-a) + \nu Dp(a) \cdot (c-a)]$$

où  $\lambda, \mu, \nu$  représentent les coordonnées barycentriques de tout point  $x$  de  $\tilde{K}$  relativement aux trois sommets  $a, b, c$ .

Pour démontrer (2.4) on remarque que  $p$  et  $Dp$  sont nuls sur le côté  $[bc]$  d'équation  $\lambda = 0$ , donc que

$$p = \lambda^2 q$$

avec  $q$  polynôme de degré inférieur ou égal à 1 ; il est donc de la forme

$$q = \alpha \lambda + \beta \mu + \gamma \nu$$

où les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  s'expriment en fonction des trois paramètres

$$p(a), Dp(a) \cdot (b-a), Dp(a) \cdot (c-a).$$

On a immédiatement

$$p(a) = q(a) = \alpha$$

puis on dérive l'expression de  $p$  au point  $a$

$$Dp(a) = 2\lambda(a) D\lambda(a) q(a) + \lambda^2(a) (\alpha D\lambda(a) + \beta D\mu(a) + \gamma D\nu(a))$$

d'où on déduit en utilisant le fait que

$$D\lambda = -D(\mu + \nu)$$

$$Dp(a) = (\beta - 3\alpha) D\mu(a) + (\gamma - 3\alpha) D\nu(a)$$

soit

$$Dp(a) \cdot (b - a) = \beta - 3\alpha, \quad Dp(a) \cdot (c - a) = \gamma - 3\alpha$$

d'où  $\beta$  et  $\gamma$  ■

Théorème 1 : L'ensemble  $\Sigma$  de (2.3) est P-unisolvent ; l'élément fini K est de classe  $C^1$  selon la terminologie de [5].

Démonstration : Remarquons tout de suite que si  $p$  est une fonction de l'espace  $P$  la restriction de  $p$  à toute arête  $[a_i, a_{i+1}]$  (l'indice  $i$  étant compté modulo 4) est un polynôme de degré inférieur ou égal à trois en une variable ; donc les conditions

$$p(a_i) = p(a_{i+1}) = 0$$

$$Dp(a_i) = Dp(a_{i+1}) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}(a_{ij}) = 0$$

entraînent que le polynôme  $p$  et sa dérivée  $Dp$  sont nulles le long de l'arête ; ce qui prouve bien que l'élément est de classe  $C^1$ .

Il est clair que les conditions (2.2) sont équivalentes à

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_i(a_i) = p_i(a_{i+2}) = 0 \\ Dp_i(a_i) = Dp_i(a_{i+2}) = 0 \\ \frac{\partial p_i}{\partial n}(a_{i,i+2}) = 0 \end{array} \right. \quad i = 1, 3$$

l'indice  $i$  étant toujours compté modulo 4 ; donc le polynôme  $p_2$  (respectivement  $p_3$ ) possède 3 paramètres libres  $p_2(a_3)$ ,  $\frac{\partial p_2}{\partial x}(a_3)$ ,  $\frac{\partial p_2}{\partial y}(a_3)$  (respectivement  $p_3(a_4)$ ,  $\frac{\partial p_3}{\partial x}(a_4)$ ,  $\frac{\partial p_3}{\partial y}(a_4)$ ) en vertu du lemme 1 ; on a donc

$$\dim(P) = \dim(P_3) + 3 + 3 = 16 = \text{Card}(\Sigma).$$

Il suffit donc de prouver que si tous les degrés de liberté de  $\Sigma$  sont nuls alors la fonction  $p$  de l'espace  $P$  correspondante est nulle ; soit  $q_i$  le polynôme de degré inférieur ou égal à trois qui coïncide avec  $p$  sur le triangle  $K_i$  ; d'après le lemme 1  $q_i$  s'exprime en fonction des coordonnées barycentriques relatives aux sommets du triangle  $K_i$  et des trois paramètres  $p(a_0)$ ,  $Dp(a_0) \cdot (a_i - a_0)$ ,  $Dp(a_0) \cdot (a_{i+1} - a_0)$  ; il suffit donc de prouver que

$$p(a_0) = 0 \quad \text{et} \quad Dp(a_0) = 0.$$



Pour cela on dispose de trois relations ; d'abord comme  $p$  appartient à l'espace  $P$  on a

$$(2.6) \quad q_3 = q_2 + q_4 - q_1$$

Ensuite nous traduisons que la fonction  $p$  est continuellement dérivable ; (remarquons à ce sujet que sur chaque arête  $[a_{i+1}, a_0] = K_i \cap K_{i+1}$ , les coordonnées barycentriques relatives aux triangles  $K_i$  et  $K_{i+1}$  coïncident et donc que l'on a automatiquement :

$$q_i|_{[a_0, a_{i+1}]} = q_{i+1}|_{[a_0, a_{i+1}]}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial \tau}|_{[a_0, a_{i+1}]} = \frac{\partial q_{i+1}}{\partial \tau}|_{[a_0, a_{i+1}]} \quad .)$$

En conséquence, la continuité de la fonction  $p$  est assurée et celle de sa dérivée se traduit uniquement par la continuité de la dérivée normale à chaque arête  $[a_{i+1}, a_0]$ , soit les deux relations :

$$(2.7) \quad \frac{\partial q_1}{\partial n}|_{[a_1, a_0]} = \frac{\partial q_4}{\partial n}|_{[a_1, a_0]}$$

$$(2.8) \quad \frac{\partial q_1}{\partial n}|_{[a_2, a_0]} = \frac{\partial q_2}{\partial n}|_{[a_2, a_0]}$$

(Remarquons encore que les relations (2.7) et (2.8) impliquent la continuité de la dérivée normale  $\frac{\partial p}{\partial n}$  sur les arêtes  $[a_3, a_0]$  et  $[a_4, a_0]$ ).

Le système de trois équations à trois inconnues (2.6), (2.7), (2.8) est en règle générale assez compliqué à écrire et il n'est pas aisé de prouver que son déterminant est non nul ; on va se ramener par un changement de variable classique à un système beaucoup plus simple.

Soit  $F$  l'unique application affine de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  vérifiant

$$F(a_0) = (0,0) \quad , \quad F(a_1) = (1,0) \quad , \quad F(a_2) = (0,1) ;$$

puisque  $K$  est non dégénéré  $F$  est inversible et on a (voir figure 3) :

$$F(a_3) = (-a,0) \quad , \quad F(a_4) = (0,-b) \quad , \quad a > 0 \quad , \quad b > 0 ;$$

On pose  $\tilde{K} = F(K)$  et  $\tilde{p} = p \circ F^{-1}$  ; on est ramené à démontrer que si

$$\tilde{p} \in C^1(\tilde{K}), \quad \tilde{p}|_{\tilde{K}_i} = \tilde{q}_i \in P_3 \quad ,$$

avec

$$\hat{q}_3 = \hat{q}_2 + \hat{q}_4 - \hat{q}_1$$

la fonction  $\hat{p}$  ainsi que sa dérivée  $D\hat{p}$  étant nulles le long de la frontière  $\partial\hat{K}$  de l'élément  $\hat{K}$ , alors  $\hat{p}$  est nulle sur  $\hat{K}$ .

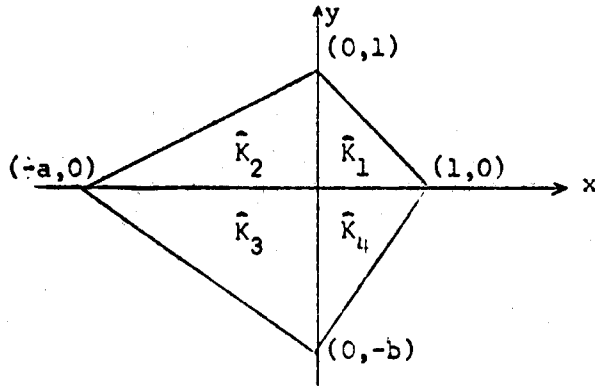


figure 3

On vérifie sans peine que la relation (2.4) donne ici

$$(2.9) \quad \hat{q}_i = \hat{\lambda}_i^2 [(3-2\hat{\lambda}_i) \hat{p}(0) + x \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(0) + y \frac{\partial \hat{p}}{\partial y}(0)] \quad , \quad 1 \leq i \leq 4 ,$$

où  $\hat{\lambda}_i$  est la coordonnée barycentrique du point  $(x,y)$  du triangle  $\hat{K}_i$  relative au sommet 0 ; on a donc la relation

$$(2.10) \quad \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_3 = \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_4$$

avec les expressions

$$(2.11) \quad \hat{\lambda}_1 = 1 - (x+y) , \quad \hat{\lambda}_2 = 1 + \frac{x}{a} - y , \quad \hat{\lambda}_3 = 1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} , \quad \hat{\lambda}_4 = 1 - x + \frac{y}{b}$$

Un calcul simple montre que les conditions (2.7) et (2.8) se réduisent ici à :

$$(2.12) \quad \text{sur l'axe } y = 0, \quad \frac{\partial \hat{q}_1}{\partial y} = \frac{\partial \hat{q}_4}{\partial y} \iff 3 \hat{p}(0) + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(0) = 0$$

$$(2.13) \quad \text{sur l'axe } x = 0, \quad \frac{\partial \hat{q}_1}{\partial x} = \frac{\partial \hat{q}_2}{\partial x} \iff 3 \hat{p}(0) + \frac{\partial \hat{p}}{\partial y}(0) = 0$$

et la relation (2.6) donne

$$(2.14) \quad 3 \hat{p}(0) + x \hat{\lambda} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(0) + y \hat{\lambda} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y}(0) = 0$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{3} [\hat{\lambda}_1^2 (3-2\hat{\lambda}_1) + \hat{\lambda}_3^2 (3-2\hat{\lambda}_3) - \hat{\lambda}_2^2 (3-2\hat{\lambda}_2) - \hat{\lambda}_4^2 (3-2\hat{\lambda}_4)] \\ \hat{\lambda} &= \hat{\lambda}_1^2 + \hat{\lambda}_3^2 - (\hat{\lambda}_2^2 + \hat{\lambda}_4^2) . \end{aligned}$$

Les trois paramètres  $\hat{p}(0)$ ,  $\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(0)$  et  $\frac{\partial \hat{p}}{\partial y}(0)$  vérifient un système homogène dont le déterminant  $\hat{\Delta}$  s'écrit

$$(2.15) \quad \hat{\Delta} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3\hat{\mu} & x\hat{\lambda} & y\hat{\lambda} \end{vmatrix} = 3(\hat{\mu} - (x+y)\hat{\lambda}) = 6\hat{\lambda}_3 [\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_4 - \hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_3]$$

On établit le résultat (2.15) en développant l'expression de  $\hat{\Delta}$  et en utilisant la relation (2.10) élevée au cube et au carré. Ainsi  $\hat{\Delta}$  est un polynôme de  $P_3$  non nul sur  $K$  (par exemple sur le côté  $x+y=1$ , on a  $\hat{\lambda}_1=0$  et  $\hat{\Delta}=6\hat{\lambda}_3\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_4 \neq 0$ ), ce qui prouve que  $\hat{p}(0) = \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(0) = \frac{\partial \hat{p}}{\partial y}(0) = 0$  et achève la démonstration. ■

### 3. Erreur d'interpolation.

Dans toute la suite,  $H^m(K)$  désignera l'espace de Sobolev des fonctions dont les carrés ainsi que ceux de toutes leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à  $m$  sont intégrables sur  $K$ ; on munit  $H^m(K)$  de la norme  $||\cdot||_{m,K}$ .

Usuellement, l'obtention des estimations d'erreur repose sur le lemme de Bramble et Hilbert et plus précisément sur le fait que  $|\cdot|_{k+1,K}$  est une norme équivalente à la norme quotient sur l'espace  $H^{k+1}(K)/P_K$ ; nous démontrons que sous certaines hypothèses géométriques la constante d'équivalence est indépendante de  $K$ , ce qui nous laissera dans la suite la liberté de ne pas utiliser un élément de référence fixe.

Lemme 2 : Soit  $\mathcal{K}$  une famille de quadrilatères  $K$  de sommets  $(a_i)_{1 \leq i \leq 4}$  tels que

$$a_1 = (1,0) \quad , \quad a_2 = (0,1) \quad , \quad a_3 = (-a,0) \quad , \quad a_4 = (0,-b)$$

avec

$$(3.1) \quad 0 < \alpha_0 \leq a \leq \alpha_1$$

$$0 < \beta_0 \leq b \leq \beta_1$$

(i.e. il existe deux quadrilatères de la famille  $K^0$  et  $K^1$  tels que

$$(3.2) \quad K^0 \subset K \subset K^1 \quad , \quad \forall K \in \mathcal{K} \quad .) \quad \text{voir figure 4.}$$

Soit  $\Omega$  le carré de sommets  $(\tilde{a}_j)_{1 \leq j \leq 4}$  avec

$$\tilde{a}_1 = (1,0) \quad , \quad \tilde{a}_2 = (1,1) \quad , \quad \tilde{a}_3 = (0,1) \quad , \quad \tilde{a}_4 = (0,0).$$

A chaque élément  $K$ , repéré par les deux paramètres  $a$  et  $b$ , est associé l'unique application  $G \in Q_1^2$  qui vérifie

$$G(\tilde{a}_j) = a_j, \quad 1 \leq j \leq 4.$$

Pour toute fonction  $u$  définie sur  $K$ , on définit la fonction  $\tilde{u}$  sur  $\Omega$  par

$$(3.3) \quad \tilde{u}(\tilde{x}) = u \circ G(\tilde{x}), \quad \forall \tilde{x} \in \Omega.$$

Alors l'application  $G$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme de  $\Omega$  sur  $K$  et l'application qui à  $u$  associe  $\tilde{u}$  est un isomorphisme de  $H^{k+1}(K)$  sur  $H^{k+1}(\Omega)$ , pour tout entier  $k \geq 0$ .

Plus précisément il existe deux constantes  $C_1 = C_1(k)$  et  $C_2 = C_2(k)$  indépendantes du quadrilatère  $K$ , telles que

$$(3.4) \quad C_1 \|\tilde{u}\|_{k+1, \Omega} \leq \|u\|_{k+1, K} \leq C_2 \|\tilde{u}\|_{k+1, \Omega}, \quad \forall u \in H^{k+1}(K).$$

Il existe enfin une constante  $C = C(k)$ , indépendante de  $K$ , telle que

$$(3.5) \quad \|\tilde{u}\|_{k+1, \Omega} \leq C \left\{ \|u\|_{k+1, K} + \sum_{|\alpha| \leq k} \left| \int_{K^0} \frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha} dx \right| \right\}, \quad \forall u \in H^{k+1}(K),$$

où  $\alpha$  est un multi-indice  $(\alpha_1, \alpha_2)$  et où la somme porte sur tous les multi-indices de longueur  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$  inférieure ou égale à  $k$ .

Démonstration : Remarquons d'abord que

$$G(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^4 a_i \tilde{q}_i(\tilde{x})$$

où  $\tilde{q}_i$  désigne l'unique fonction de  $Q_1^2$  qui vérifie

$$\tilde{q}_i(\tilde{a}_j) = \delta_{ij}.$$

Ainsi le déterminant jacobien de la fonction  $G$  au point  $\tilde{x}$

$$|JG(\tilde{x})| = \left| \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_1}, \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_2} \right|$$

est un élément de  $Q_1^2$ ; en outre on a

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \tilde{x}_i^2} = 0, \quad i = 1, 2; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \tilde{x}_1 \partial \tilde{x}_2} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4; \quad D^2 G = 0, \quad \forall \ell \geq 3.$$

Compte-tenu des majorations classiques en théorie des éléments finis courbes (voir [5]) il suffit pour démontrer les inégalités (3.4) de prouver l'existence de deux constants  $\alpha$  et  $\beta$  vérifiant pour tout  $\tilde{x}$  appartenant à  $\Omega$

$$(3.6) \quad \left| \begin{array}{l} 0 < \alpha \leq |JG(\tilde{x})| \leq \beta \\ \alpha \leq \|DG(\tilde{x})\| \leq \beta \\ \|D^2 G(\tilde{x})\| \leq \beta \end{array} \right|$$

Soit  $l(a,b)$  (respectivement  $l'(a,b)$ ) la longueur du plus grand (respectivement plus petit) côté du quadrilatère  $K$  ; soit  $\gamma(a,b)$  le maximum des valeurs absolues des cosinus des angles au sommet de  $K$  ; on a évidemment

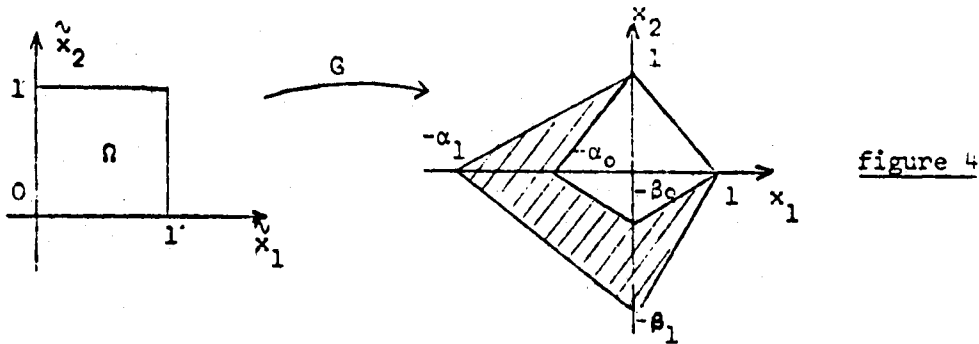
$$\frac{l'(a,b)}{l(a,b)} \geq \frac{l'(\alpha_0, \beta_0)}{l(\alpha_1, \beta_1)} = \frac{l'_0}{l_1}$$

$$\gamma(a,b) \leq \sup(\gamma(\alpha_0, \beta_0) ; \gamma(\alpha_1, \beta_1)) = \gamma_0 < 1$$

et la condition de CIARLET-RAVIART [3] :

$$\frac{l'(a,b)}{l(a,b)} \sqrt{1 - \gamma(a,b)} \geq \frac{l'_0}{l_1} \sqrt{1 - \gamma_0} > 0 \quad \forall a,b : \alpha_0 \leq a \leq \alpha_1 ; \beta_0 \leq b \leq \beta_1 ;$$

entraîne les inégalités (3.6).



Notons que l'existence d'une constante  $C$  dans l'inégalité (3.5) est déjà établie, mais a priori cette constante dépend de  $K$  ; nous prouvons que non en raisonnant par absurde. Supposons que (3.5) ne soit pas vrai, alors il existerait une suite de quadrilatères  $K_n$  et une suite de fonctions  $u_n$  de l'espace  $H^{k+1}(K_n)$  telles que

$$(3.8) \quad \left| \begin{array}{l} \|\tilde{u}_n\|_{k+1, \Omega} = 1, \quad \forall n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \|u_n\|_{k+1, K_n} + \sum_{|\alpha| \leq k} \left| \int_{K^0} \frac{\partial^\alpha u_n(x)}{\partial x^\alpha} dx \right| \right\} = 0 \end{array} \right.$$

Par compacité, puisque

$$\alpha_0 \leq a_n \leq \alpha_1, \quad \beta_0 \leq b_n \leq \beta_1,$$

on pourrait trouver une sous-suite (après extractions successives) telle que (3.8) ait lieu et en outre telle que

$$(3.9) \quad \left| \begin{array}{l} a_n \rightarrow a, \quad b_n \rightarrow b \text{ dans } \mathbb{R} \text{ (nous dirons que } K_n \rightarrow K \text{ dans } \mathcal{K}), \\ \tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u} \text{ dans } H^{k+1}(\Omega) \text{ faible et } H^k(\Omega) \text{ fort.} \end{array} \right.$$

On pose  $u = \tilde{u} \circ G^{-1}$  où  $G$  est la fonction de l'espace  $Q_1^2$  associée au quadrilatère  $K$  et soit  $K'$  un quadrilatère fixe de la famille  $\mathcal{K}$  vérifiant  $K^0 \subset K' \subset K$  (les inclusions sont strictes sauf lorsque  $K = K^0$  où on prend alors  $K' = K^0$ ).

Lorsque l'indice  $n$  est suffisamment grand on a donc  $K' \subset K_n$  et par suite

$$||\tilde{u}_n||_{k+1, K'} \leq ||u_n||_{k+1, K_n} \leq c_2 ||\tilde{u}_n||_{k+1, \Omega}$$

On peut extraire une nouvelle sous-suite telle que

$$u_n|_{K'} \rightharpoonup v \text{ dans } H^{k+1}(K') \text{ faible et } H^k(K') \text{ fort ;}$$

et par semi-continuité inférieure il vient

$$|v|_{k+1, K'}^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} |u_n|_{k+1, K'}^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} |u_n|_{k+1, K_n}^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n|_{k+1, K_n}^2 = 0 ;$$

on en déduit que  $v \in P_K$  et puisque

$$\int_{K^0} \frac{\partial^\alpha v(x)}{\partial x^\alpha} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{K^0} \frac{\partial^\alpha u_n(x)}{\partial x^\alpha} dx = 0, \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq k ;$$

on a en fait  $v = 0$ .

Soit  $\phi$  une fonction indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}^2$  et à support compact inclus dans  $K'$  ; pour l'indice  $n$  assez grand on a

$$\int_{K'} u_n(x) \phi(x) dx = \int_{K_n} u_n(x) \phi(x) dx = \int_{K_n} \tilde{u}_n \circ G_n^{-1}(x) \phi(x) dx = \int_{\Omega} \tilde{u}_n(\tilde{x}) \phi \circ J_n(\tilde{x}) |JG_n(\tilde{x})| d\tilde{x}$$

Lorsque l'indice  $n$  tend vers l'infini la suite de fonctions  $G_n$  (respectivement  $|JG_n|$ ) associées aux quadrilatères  $K_n$  converge uniformément sur  $\Omega$  vers la fonction  $G$  (respectivement  $|JG|$ ) associée à  $K$  ; on en déduit par passage à la limite

$$\int_{K'} v(x) \phi(x) dx = \int_{\Omega} \tilde{u}(\tilde{x}) \phi \circ G(\tilde{x}) |JG(\tilde{x})| d\tilde{x} = \int_K u(x) \phi(x) dx = \int_{K'} u(x) \phi(x) dx$$

On en conclut que

$$u|_{K'} = 0 \quad \forall K', K' \subset K$$

d'où

$$u = 0 \text{ et } \tilde{u} = 0.$$

Ceci est une contradiction car on a en vertu de (3.4) et (3.8)

$$1 = ||\tilde{u}_n||_{k+1, \Omega}^2 \leq \frac{1}{c_1^2} ||u_n||_{k+1, K_n}^2 = \frac{1}{c_1^2} (|u_n|_{k+1, K_n}^2 + ||u_n||_{k, K_n}^2)$$

avec

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{k+1, K_n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{k, K_n} \leq C_2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{u}_n\|_{k, \Omega} = C_2 \|\tilde{u}\|_{k, \Omega} = 0 \quad \square \end{array} \right.$$

### Famille régulière d'éléments finis

Soit  $\mathcal{K}$  une famille de quadrilatères non dégénérés  $K$  de sommets  $(a_i)_{1 \leq i \leq 4}$  ; on appelle  $(K_i)_{1 \leq i \leq 4}$  les quatre triangles engendrés par les diagonales de  $K$  et  $a_0 = \bigcap_{i=1}^4 K_i$ .

Soit  $F$  l'unique application affine qui vérifie

$$F(0,0) = a_0, \quad F(1,0) = a_1, \quad F(0,1) = a_2.$$

Ainsi  $F$  est inversible et le quadrilatère  $\hat{K} = F^{-1}(K)$  de sommets  $(\hat{a}_i)_{1 \leq i \leq 4}$  vérifie

$$\hat{a}_1 = (1,0), \quad \hat{a}_2 = (0,1), \quad \hat{a}_3 = (-a,0), \quad \hat{a}_4 = (0,-b).$$

A chaque quadrilatère  $K$  on associe en outre les deux paramètres suivants

$$(3.10) \quad \left| \begin{array}{l} h = \text{diamètre de } K \\ \rho = \text{supremum des diamètres des sphères inscrites dans } K \end{array} \right.$$

On dira que la famille  $\mathcal{K}$  de quadrilatères  $K$  est régulière si les deux propriétés suivantes sont simultanément vérifiées :

- i) il existe une constante  $C$  telle que  $\frac{h}{\rho} \leq C \quad \forall K \in \mathcal{K}$
- ii) la famille  $\hat{\mathcal{K}}$  des quadrilatères images  $\hat{K} = F^{-1}(K)$  vérifie les propriétés (3.1), (3.2) du lemme 2.

Remarquons que les conditions sont vérifiées si et seulement si les rapports des longueurs des demi-diagonales de  $K$  restent bornés, soit

$$\alpha_0 \leq \frac{\|a_3 - a_0\|}{\|a_1 - a_0\|} \leq \alpha_1, \quad \beta_0 \leq \frac{\|a_4 - a_0\|}{\|a_2 - a_0\|} \leq \beta_1$$

La condition (i) est la condition classique des familles affines d'éléments finis et lorsque les quadrilatères  $K \in \mathcal{K}$  sont des parallélogrammes la condition (ii) est trivialement vérifiée, les diagonales de  $K$  se coupant en leur milieu ; dans ce cas la famille  $\mathcal{K}$  est réduite au seul carré  $\hat{K}$  de sommets les points  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(-1,0)$ ,  $(0,-1)$ .

Les directions normales aux côtés de  $K$  n'étant pas conservées par transformation affine nous modifions provisoirement l'opérateur d'interpolation  $\pi$  sur  $K$  ; pour toute fonction  $u$  suffisamment régulière et définie sur  $K$  on appelle  $\pi u$  l'unique fonction de l'espace  $P$  introduit en (2.1) et qui vérifie

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi u(a_i) = u(a_i) \quad , \quad 1 \leq i \leq 4 \quad , \\ D(\pi u)(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) = Du(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i), \quad 1 \leq i \leq 4 \quad , \\ D(\pi u)(a_i) \cdot (a_{i-1} - a_i) = Du(a_i) \cdot (a_{i-1} - a_i), \quad 1 \leq i \leq 4 \quad , \\ D(\pi u)(a_{ij}) \cdot (a_o - a_{ij}) = Du(a_{ij}) \cdot (a_o - a_{ij}), \quad 1 \leq i < j \leq 4 \quad ; \end{array} \right.$$

l'indice  $i$  étant compté modulo 4 et  $a_{ij}$  désignant le milieu du côté  $[a_i a_j]$  .

Théorème 2: Soit  $\mathcal{K}$  une famille de quadrilatères  $K$  régulière, alors il existe une constante  $C = C(m, k)$  indépendante de l'élément  $K$  telle que

$$(3.12) \quad |v - \pi v|_{m, K} \leq C h^{k+1-m} |v|_{k+1, K} \quad , \quad \forall v \in H^{k+1}(K), \quad k = 2 \text{ ou } 3, \quad 0 \leq m \leq 2$$

Démonstration : Remarquons d'abord que puisque l'on a l'injection de Sobolev

$$H^{k+1}(K) \hookrightarrow C^1(K)$$

l'expression  $\pi v$  a bien un sens. On définit l'opérateur d'interpolation  $\hat{\pi}$  sur  $\hat{K}$  par

$$(\pi v) \circ F = \hat{\pi}(v \circ F) \quad (\text{ie } \hat{\pi} \hat{v} = \hat{\pi} \hat{v})$$

et l'espace de fonctions réelles définies sur  $\hat{K}$

$$\hat{P} = \{ \hat{p} \ ; \ \exists p \in P : \hat{p} = p \circ F \} \quad .$$

Ainsi, puisque  $P_3 \subset \hat{P} \subset H^2(\hat{K})$  , on a la majoration (voir CIARLET-RAVIART [2])

$$(3.13) \quad |v - \pi v|_{m, K} \leq C \|I - \hat{\pi}\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{K}), H^m(\hat{K}))} h^{k+1-m} |v|_{k+1, K} \quad , \quad 0 \leq m \leq 2 \quad ,$$

où la constante  $C = C(m)$  est indépendante de  $\hat{K}$  (donc de  $K$ ) en vertu du lemme 2. Il reste à estimer la norme de l'opérateur (variable!)  $I - \hat{\pi}$  ; on a

$$\|I - \hat{\pi}\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{K}), H^m(\hat{K}))} = \sup_{v \neq 0} \frac{\|\hat{v} - \hat{\pi} \hat{v}\|_{m, \hat{K}}}{\|\hat{v}\|_{k+1, \hat{K}}}$$

et

$$\|\hat{v} - \hat{\pi} \hat{v}\|_{m, \hat{K}} \leq \|\hat{v}\|_{m, \hat{K}} + \|\hat{\pi} \hat{v}\|_{m, \hat{K}} \leq \|\hat{v}\|_{k+1, \hat{K}} + \|\hat{\pi} \hat{v}\|_{m, \hat{K}}$$



Soient  $(\hat{p}_i^0)_{1 \leq i \leq 4}$ ,  $(\hat{p}_{i,i+1}^1)_{1 \leq i \leq 4}$ ,  $(\hat{p}_{i,i-1}^1)_{1 \leq i \leq 4}$ ,  $(\hat{p}_{i,j}^1)_{1 \leq i < j \leq 4}$   
les fonctions de base de l'élément  $\hat{K}$  selon la terminologie de [3] ; alors

$$\begin{aligned} \hat{\pi} v = & \sum_{i=1}^4 \hat{v}(\hat{a}_i) \hat{p}_i^0 + \sum_{i=1}^4 D\hat{v}(\hat{a}_i) \cdot (\hat{a}_{i+1} - \hat{a}_i) \hat{p}_{i,i+1}^1 + \sum_{i=1}^4 D\hat{v}(\hat{a}_i) \cdot (\hat{a}_{i-1} - \hat{a}_i) \hat{p}_{i,i-1}^1 \\ & + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} D\hat{v}(\hat{a}_{ij}) (\hat{a}_i - \hat{a}_j) \hat{p}_{i,j}^1 \end{aligned}$$

et puisque le diamètre de  $\hat{K}$  est borné, on a

$$(3.15) \quad \|\hat{\pi} v\|_{m,\hat{K}} \leq C \sup_{i,j} (\|\hat{p}_i^0\|_{m,\hat{K}}, \|\hat{p}_{i,i+1}^1\|_{m,\hat{K}}, \|\hat{p}_{i,i-1}^1\|_{m,\hat{K}}, \|\hat{p}_{i,j}^1\|_{m,\hat{K}}) \|\hat{v}\|_{1,\hat{K}}$$

et avec le lemme 2, en utilisant l'injection de Sobolev sur l'ouvert  $\hat{\Omega}$  fixe, on a

$$(3.16) \quad \|\hat{v}\|_{1,\infty,\hat{K}} \leq C \|\hat{v}\|_{1,\infty,\hat{\Omega}} \leq C \|\hat{v}\|_{k+1,\hat{\Omega}} \leq C \|\hat{v}\|_{k+1,\hat{K}}$$

où  $C$  représente différentes constantes indépendantes de  $\hat{K}$  (donc de  $K$ ) et qui ne dépendent seulement que de  $k$  et  $\hat{\Omega}$ .

D'autre part la norme des fonctions de base dans  $H^m(\hat{K})$  est bornée car sur chaque triangle  $\hat{K}_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) intérieur à  $\hat{K}$  ce sont des polynômes de degré inférieur ou égal à trois, donc qui s'expriment comme des polynômes en les coordonnées barycentriques relatives aux sommets de chaque triangle ; ces coordonnées barycentriques sont des fonctions définies et continues en les paramètres  $a$  et  $b$  pour  $ab \neq 0$  ; or ces deux paramètres varient sur le compact  $[\alpha_0, \alpha_1] \times [\beta_0, \beta_1]$ .

On en déduit avec (3.14), (3.15) et (3.16) que

$$\|I - \hat{\pi}\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{K}), H^m(\hat{K}))} \leq 1 + C$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend que de  $k$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  et  $\hat{\Omega}$ , d'où (3.12).  $\square$

Théorème 3 : Soit  $\mathcal{K}$  une famille de quadrilatères  $K$  régulière, alors il existe une constante  $C = C(m, k)$  indépendante de l'élément  $K$  telle que

$$(3.17) \quad \left( \sum_{i=1}^4 |v - \pi v|_{m, K_i}^2 \right)^{1/2} \leq C h^{k+1-m} |v|_{k+1, K}, \quad \forall v \in H^{k+1}(K), \quad 0 \leq m \leq k+1, \quad k=2 \text{ ou } 3$$

où  $(K_i)_{1 \leq i \leq 4}$  désignent les quatre triangles intérieurs à l'élément  $K$  et découpés par ses diagonales.

Démonstration Remarquons que pour  $m = 0, 1$  et  $2$  on a

$$\left( \sum_{i=1}^4 |v - \pi v|_{m, K_i}^2 \right)^{1/2} = |v - \pi v|_{m, K}$$

et par conséquent il n'y a rien à démontrer. D'autre part pour  $m > 2$  on n'a pas en général  $\pi v \in H^m(K)$ , mais seulement  $\pi v|_{K_i} \in P_3$ , ce qui justifie l'écriture de (3.17). Remarquons encore que pour  $m = 4$  la majoration est évidente puisque

$$\pi v|_{K_i} \in P_3 \longrightarrow |v|_{4,K_i} = 0.$$

On démontre (3.17) avec  $m = 3$  en adaptant comme au théorème précédent une méthode utilisée par CIARLET-RAVIART dans [2]. Pour chaque triangle  $K_i$ , on introduit l'ensemble des degrés de liberté  $\Sigma'_i$  pour toute fonction  $v$  suffisamment régulière :

$$\Sigma'_i = \{v(a_0), v(a_i), v(a_{i+1}) ; Dv(a_0)(a_i - a_0), Dv(a_0)(a_{i+1} - a_0) ; Dv(a_i)(a_{i+1} - a_i), Dv(a_i)(a_{i-1} - a_i) ; Dv(a_{i+1})(a_{i+2} - a_{i+1}), Dv(a_{i+1})(a_i - a_{i+1}) ; Dv(a_{ij})(a_0 - a_{ij})\}.$$

Cet élément est  $P_3$ -unisolvent d'après le lemme 1 ; on appelle  $\pi'_i v$  le  $P_3$ -interpolé de  $v$  sur  $\Sigma'_i$  et on a le résultat classique pour les familles affines

$$(3.18) \quad |v - \pi'_i v|_{m,K_i} \leq C h^{k+1-m} |v|_{k+1,K_i}, \quad \forall v \in H^{k+1}(K_i), \quad 0 \leq m \leq k+1, \quad k \geq 2 ;$$

où la constante  $C$  est indépendante de  $K_i$  et ne dépend que de  $k$  et  $m$ .

Donc pour démontrer (3.17) il nous reste à estimer la quantité  $|\pi'_i v - \pi v|_{m,K_i}$  lorsque  $v$  est une fonction de l'espace  $H^{k+1}(K)$ . (En toute rigueur on doit écrire  $|\pi'_i(v|_{K_i}) - (\pi v)|_{K_i}|_{m,K_i}$ ).

La fonction  $w_i = \pi'_i(v|_{K_i}) - (\pi v)|_{K_i}$  appartient à  $P_3$  et vérifie

$$w_i|_{[a_i, a_{i+1}]} = 0, \quad Dw_i|_{[a_i, a_{i+1}]} = 0.$$

Ainsi on a

$$w_i = (v - \pi v)(a_0) p_{i,0}^1 + D(v - \pi v)(a_0)(a_i - a_0) p_{i,i}^1 + D(v - \pi v)(a_0)(a_{i+1} - a_0) p_{i,i+1}^1$$

où  $p_{i,0}^1, p_{i,i}^1, p_{i,i+1}^1$  désignent les fonctions de base dans  $P_3$  relatives au sommet  $a_0$  de l'élément fini  $(K_i, \Sigma'_i)$ .

On en déduit

$$|w_i|_{3,K_i} \leq \sup(|p_{i,0}^1|_{3,K_i}, |p_{i,i}^1|_{3,K_i}, |p_{i,i+1}^1|_{3,K_i}) (|v - \pi v(a_0)| + 2h ||D(v - \pi v)(a_0)||)$$

Les quantités  $|v - \pi v(a_0)|$  et  $||D(v - \pi v)(a_0)||$  sont évaluées par l'intermédiaire de la théorie affine avec toutefois la modification du lemme 2 en raison du fait que l'élément  $\bar{K}_i = F^{-1}(K_i)$  n'est pas fixe ■

Soit maintenant  $\pi$  l'opérateur d'interpolation "SANDER" sur l'élément  $K$  ; ie pour toute fonction  $v$  suffisamment régulière  $\pi_s v$  est l'unique fonction de  $P$  qui vérifie les relations (3.11) à cette modification près ; les relations

$$D(\pi u)(a_{ij})(a_o - a_{ij}) = Du(a_{ij})(a_o - a_{ij}), \quad 1 \leq i < j \leq 4,$$

sont remplacées par

$$\frac{\partial(\pi_s u)}{\partial n}(a_{ij}) = \frac{\partial u}{\partial n}(a_{ij}), \quad 1 \leq i < j \leq 4.$$

Théorème 4 : Soit  $\mathcal{K}$  une famille régulière d'éléments  $K$  ; il existe une constante  $C = C(m, k)$ , indépendante de l'élément  $K$ , telle que

$$(1.19) \quad \left( \sum_{i=1}^4 |v - \pi_s v|_{m, K_i}^2 \right)^{1/2} \leq C h^{k+1-m} |v|_{k+1, K}, \quad \forall v \in H^{k+1}(K), \quad 0 \leq m \leq k+1, \quad k=2 \text{ ou } 3.$$

démonstration : Remarquons d'abord que pour les valeurs du paramètre  $m = 0, 1, 2$  on a

$$\left( \sum_{i=1}^4 |v - \pi_s v|_{m, K_i}^2 \right)^{1/2} = |v - \pi_s v|_{m, K}.$$

La majoration (3.19) est une conséquence des théorèmes précédents ; il suffit d'estimer la quantité  $|v - \pi_s v|_{m, K_i}$  ; on opère comme au théorème 3 en remarquant que la fonction  $w_s = v - \pi_s v$  appartient à  $P$  et est nulle le long de la frontière de l'élément  $K$  ; ainsi

$$w_s = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} Dw_s(a_{ij})(a_o - a_{ij}) p_{ij}^1$$

où  $(p_{ij}^1)_{1 \leq i < j \leq 4}$  sont les fonctions de base de l'espace  $P$  introduites au théorème 2 ; et d'autre part

$$Dw_s(a_{ij})(a_o - a_{ij}) = \frac{\partial w_s}{\partial n}(a_{ij}) \cdot (a_o - a_{ij}, n),$$

( $n$  désigne le vecteur normal unitaire),

puisque  $\frac{\partial w_s}{\partial \tau}(a_{ij}) = 0$ , donc on a la majoration

$$|Dw_s(a_{ij})(a_o - a_{ij})| \leq h \left| \frac{\partial}{\partial n} (v - \pi_s v)(a_{ij}) \right| \leq h \|D(v - \pi_s v)(a_{ij})\|;$$

d'où le résultat annoncé ■

REFERENCES

- [1] CIARLET P.G.                    Quelques méthodes d'éléments finis pour le problème d'une plaque encastree. (à paraître dans les comptes-rendus du Colloque International sur les Méthodes de Calcul Scientifique et Technique, I.R.I.A., Le Chesnay, 17-21 décembre 1973).
- [2] CIARLET P.G., RAVIART P.A.      General Lagrange and Hermite interpolation in  $R^n$  with applications to finite element method ; Arch. Rational Mech. Anal. 46 (1972), 177-199.
- [3] CIARLET P.G., RAVIART P.A.      Interpolation Theory over Curved Elements, with Applications to Finite Element Methods. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 1 (1972), 217-249.
- [4] FRAEIJIS DE VEUBEKE B.            Bending and stretching of plates, Conference on Matrix Methods in structural Mechanics, Wright Patterson A.F.B., Ohio, 1965.
- [5] RAVIART P.A.                    Méthode des Elements Finis, Université de Paris VI, Paris (1972).
- [6] SANDER G.                        Bornes supérieures et inférieures dans l'analyse matricielle des plaques en flexion-torsion. Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 33<sup>e</sup> année, n°7-8 (1964), 456-494.
- [7] SANDER G.                        Applications de la méthode des éléments finis à la flexion des plaques. Collection des publications de la Faculté des Sciences de Liège 15 (1969).
- [8] ZIENKIEWICZ O.C.                  The Finite Element Method in Engineering Science, Mc Graw-Hill, London, 1971.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx