

J. M. THOMAS

**Présentation des méthodes d'éléments finis hybrides primales**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1974, fascicule S4

« Journées éléments finis », , p. 1-18

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1974\\_\\_S4\\_A10\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1974__S4_A10_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PRESENTATION DES METHODES D'ELEMENTS FINIS

HYBRIDES PRIMALES

par J.M. THOMAS

Conférence du 15 mars 1974

*(Séminaire d'Analyse Numérique)*  
PARIS VI



## I. INTRODUCTION.

Nous nous proposons de donner une présentation générale de l'approximation des problèmes elliptiques variationnels d'ordre 2. Par cette méthode nous obtiendrons, entre autres et ce de façon naturelle, les méthodes "classiques" d'éléments finis conformes et non-conformes. Cette recherche a été faite en collaboration avec P.A. RAVIART. Les démonstrations des résultats seront données dans [ 1 ] . Nous dirons que les méthodes présentées ici sont hybrides primales , au sens où le point de départ des formulations variationnelles est équivalent (pour un problème "symétrique") au principe du minimum de l'énergie potentielle;  $u$  sera une inconnue du problème. Par opposition on appelle méthodes hybrides duales les méthodes basées sur le principe du minimum de l'énergie complémentaire ; alors  $\vec{grad} u$  est pris comme inconnue du problème.

Les méthodes hybrides duales seront explicitées dans [2 ]

Comme base de la bibliographie, citons les travaux de

PIAN & TONG [ 3 ] , PIAN [ 4 ]

DE VEUBEKE & HOGGE [ 5 ]

DE VEUBEKE [ 6 ]

Du point de vue mathématique, citons les travaux de pionnier de

F. BREZZI [ 7 ] [ 8 ] .

II. FORMULATIONS CONTINUES DU PROBLEME.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  de frontière  $\Gamma$  ; on considère le problème modèle : étant donné  $f \in L^2(\Omega)$ , trouver  $u$  solution de

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & , \text{ dans } \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

La formulation variationnelle classique de (1) consiste à chercher  $u \in H_0^1(\Omega)$  solution de

$$(2) \quad a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

où on a posé :

$$(3) \quad \begin{cases} a(u, v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \\ (f, v) = \int_{\Omega} f v dx. \end{cases}$$

On suppose désormais que  $\Omega$  est un ouvert polyédrique. Soit alors  $\mathcal{T}_h$  une triangulation (ou une quadrangulation) de  $\bar{\Omega}$  :

$$(4) \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

On pose alors

$$(5) \quad H^1(\mathcal{T}_h) = \{v \mid v \in L^2(\Omega) ; v|_K \in H^1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

espace que l'on munit de la norme hilbertienne :

$$(6) \quad \|v\|_{H^1(\mathcal{T}_h)} = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{H^1(K)}^2 \right)^{1/2}$$

Soit  $\mathcal{F}(\mathcal{C}_h)$  le polaire de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^1(\mathcal{C}_h)$  :

$$(7) \quad \mathcal{F}(\mathcal{C}_h) = \{ F \mid F \in H^1(\mathcal{C}_h)' ; F(v) = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega) \}$$

Comme  $H_0^1(\Omega)$  est fermé dans  $H^1(\mathcal{C}_h)$ , on a la caractérisation :

$$(8) \quad H_0^1(\Omega) = \{ v \mid v \in H^1(\mathcal{C}_h) ; F(v) = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}(\mathcal{C}_h) \}$$

On introduit enfin la forme bilinéaire continue sur  $H^1(\mathcal{C}_h) \times H^1(\mathcal{C}_h)$  :

$$(9) \quad a_{\mathcal{C}_h}(u, v) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

Ceci posé, on considère le problème suivant :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_{\mathcal{C}_h}, F_{\mathcal{C}_h}) \in H_0^1(\Omega) \times \mathcal{F}(\mathcal{C}_h) \text{ solution de} \\ a_{\mathcal{C}_h}(u_{\mathcal{C}_h}, v) + F_{\mathcal{C}_h}(v) = (f, v) \quad \forall v \in H^1(\mathcal{C}_h) \end{array} \right.$$

D'après (8), une formulation équivalente à (10) est :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_{\mathcal{C}_h}, F_{\mathcal{C}_h}) \in H^1(\mathcal{C}_h) \times \mathcal{F}(\mathcal{C}_h) \text{ solution de} \\ a_{\mathcal{C}_h}(u_{\mathcal{C}_h}, v) + F_{\mathcal{C}_h}(v) = (f, v) \quad \forall v \in H^1(\mathcal{C}_h) \\ F(u_{\mathcal{C}_h}) = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}(\mathcal{C}_h) \end{array} \right.$$

### Théorème 1.

Le problème (10) admet une solution unique  $(u_{\mathcal{C}_h}, F_{\mathcal{C}_h})$  donnée par

$$u_{\mathcal{C}_h} = u$$

(12)

$$F_{\mathcal{C}_h}(v) = - \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial \nu_K} v d\sigma, \quad \forall v \in H^1(\mathcal{C}_h)$$

où la fonction  $u$  est la solution de (2) et où  $\nu_K$  est la normale extérieure

à  $\partial K$ , frontière de  $K$ , dirigée vers l'extérieur de  $K$ . ■

Donnons à présent une caractérisation, qui s'avérera fort utile dans la suite, de l'espace  $\mathcal{F}(\mathcal{T}_h)$ . On pose

$$(13) \quad \Phi = \{ \vec{\varphi} \mid \vec{\varphi} \in (L^2(\Omega))^N, \text{div } \vec{\varphi} \in L^2(\Omega) \}$$

$$(14) \quad M(\mathcal{T}_h) = \{ \mu \mid \mu \in \prod_{K \in \mathcal{T}_h} H^{-1/2}(\partial K) ; \exists \vec{\varphi} \in \Phi \quad \mu|_{\partial K} = \vec{\varphi} \cdot \vec{\nu}_K, \forall K \in \mathcal{T}_h \}$$

Lemme 1. Une forme linéaire  $F \in H^1(\mathcal{T}_h)$  appartient à  $\mathcal{F}(\mathcal{T}_h)$  si et seulement si il existe une fonction  $\mu \in M(\mathcal{T}_h)$ , déterminée de manière unique, telle que

$$(15) \quad F(v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \mu v \, d\sigma, \quad \forall v \in H^1(\mathcal{T}_h) \quad \blacksquare$$

Définissant sur  $M(\mathcal{T}_h) \times H^1(\mathcal{T}_h)$  la forme bilinéaire

$$(16) \quad b_{\mathcal{T}_h}(\mu, v) = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \mu v \, d\sigma, \quad \forall \mu \in M(\mathcal{T}_h), \quad \forall v \in H^1(\mathcal{T}_h)$$

le problème (11) s'écrit :

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_{\mathcal{T}_h}, \lambda_{\mathcal{T}_h}) \in H^1(\mathcal{T}_h) \times M(\mathcal{T}_h) \text{ solution de} \\ a_{\mathcal{T}_h}(u_{\mathcal{T}_h}, v) + b_{\mathcal{T}_h}(\lambda_{\mathcal{T}_h}, v) = (f, v), \quad \forall v \in H^1(\mathcal{T}_h) \\ b_{\mathcal{T}_h}(\mu, u_{\mathcal{T}_h}) = 0 \quad \forall \mu \in M(\mathcal{T}_h) \end{array} \right.$$

Avec le théorème 1 et le lemme 1, nous obtenons le

Théorème 2.

Le problème (17) admet une solution unique  $(u_{\mathcal{T}_h}, \lambda_{\mathcal{T}_h})$

donnée par

$$(18) \quad \begin{array}{l} u_{\mathcal{T}_h} = u \\ \lambda_{\mathcal{T}_h}|_{\partial K} = \frac{\partial u}{\partial \nu_K}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \end{array}$$

où  $u$  est la solution de (2). ■ ■

### III. FORMULATIONS APPROCHEES.

En vue d'approcher la solution du problème (17), on se donne :

- (i) un sous-espace  $X_h$  de  $H^1(\mathcal{C}_h)$  de dimension finie;
- (ii) un sous-espace  $M_h$  de  $M(\mathcal{C}_h)$  de dimension finie.

On considère alors le problème :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h \text{ solution de} \\ a_{\mathcal{C}_h}(u_h, v) + b_{\mathcal{C}_h}(\lambda_h, v) = (f, v), \quad \forall v \in X_h \\ b_{\mathcal{C}_h}(\mu, u_h) = 0, \quad \forall \mu \in M_h \end{array} \right.$$

#### Théorème 3.

Soit  $V_h$  l'espace défini par :

$$(20) \quad V_h = \{v \mid v \in X_h, b_{\mathcal{C}_h}(\mu, v) = 0, \forall \mu \in M_h\}$$

sous les deux hypothèses suivantes :

$$H1) \quad \left( v \in V_h \quad a_{\mathcal{C}_h}(v, v) = 0 \right) \Rightarrow v = 0$$

$$H2) \quad \left( \mu \in M_h \quad b_{\mathcal{C}_h}(\mu, v) = 0, \forall v \in X_h \right) \Rightarrow \mu = 0$$

le problème (19) admet une solution  $(u_h, \lambda_h)$  et une seule.

Remarque : La solution  $u_h$  de (19) est caractérisée comme solution du problème :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ solution de} \\ a_{\mathcal{C}_h}(u_h, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h. \end{array} \right.$$

Ce problème (21) admet une solution  $u_h$  et une seule sous la seule hypothèse

H1 .

IV. EXEMPLES AVEC UNE TRIANGULATION DE  $\bar{\Omega}$ .

Soit  $k$  un entier  $\geq 0$ . Pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ ,  $K$  un  $N$ -simplexe, on se donne un espace  $\mathcal{P}(K)$  de dimension finie en fonction de  $\mathcal{C}^1(K)$  avec

$$(22) \quad P_k(K) \subset \mathcal{P}(K)$$

où  $P_k(K)$  est l'espace des restrictions à  $K$  des polynômes de degré  $\leq k$  -

on note  $\mathcal{Y}(\partial K)$  (resp.  $S_k(\partial K)$ ) l'espace des traces sur  $\partial K$  des fonctions de  $\mathcal{P}(K)$  (resp.  $P_k(K)$ ). On a donc

$$(23) \quad S_k(\partial K) \subset \mathcal{Y}(\partial K)$$

On choisit alors pour sous-espace  $\chi_h$  de  $H^1(\mathcal{T}_h)$

$$(24) \quad \chi_h = \{v \mid v \in L^2(\Omega); \quad v|_K \in \mathcal{P}(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

Soit d'autre part  $m$  entier  $\geq 0$ . Pour tout  $\partial K$ , avec  $K \in \mathcal{T}_h$ , on se donne

un espace  $\mathcal{Y}'(K)$  de dimension finie de fonctions continues par faces de  $K$ , avec

$$(25) \quad \mathcal{Y}'(\partial K) \subset S'_m(\partial K)$$

où  $S'_m(K)$  désigne l'espace des fonctions polynomiales de degré  $\leq m$  sur chaque face de  $K$ .

On choisit alors pour sous-espace  $M_h$  de  $M(\mathcal{T}_h)$

$$(26) \quad M_h = \{\mu \mid \mu \in \prod_{K \in \mathcal{T}_h} L^2(\partial K) \quad ; \quad \mu|_{\partial K} \in \mathcal{Y}'(\partial K), \forall K \in \mathcal{T}_h ;$$

$$\mu|_{\partial K} + \mu|_{\partial K'} = 0 \text{ sur } K \cap K', \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall K' \in \mathcal{T}_h$$

avec  $K \cap K' \neq \emptyset$  } .

Lemme 2. On suppose

$$(27) \quad S'_0(K) \subset \mathcal{Y}'(\partial K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

Alors l'hypothèse H1) est vérifiée. ■

Lemme 3. En dimension d'espace  $N = 2$ , l'hypothèse H2) est vérifiée si les entiers  $k$  et  $m$  vérifient

$$(28) \quad k \geq \begin{cases} m + 1 & \text{si } m \text{ est pair} \\ m + 2 & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases}$$

Lorsque  $\mathcal{Y}(\partial K) = S_k(\partial K)$  et  $\mathcal{Y}'(\partial K) = S'_m(\partial K)$ , la condition (28) est une condition nécessaire et suffisante pour que H2) soit vérifiée.

Lorsque  $m$  est impair, les solutions  $\mu$  de

$$\mu \in S'_m(\partial K) \quad \int_{\partial K} \mu v \, d\sigma = 0 \quad \forall v \in S_k(\partial K)$$

avec  $k = m + 1$  constituent un espace vectoriel de dimension 1. ■

Principe de la démonstration :

$$(28) \Leftrightarrow (29) \quad m \leq \begin{cases} k - 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ k - 2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Si  $m \leq (k - 1)$ , pour  $\mu \in \mathcal{Y}'(\partial K)$  et  $v \in \mathcal{Y}(\partial K)$  la fonction  $\mu v$  est polynomiale de degré  $\leq (2k - 1)$  sur chaque côté de  $\partial K$ . On peut donc exprimer

$\int_Y \mu v \, d\sigma$ , pour tout côté  $\gamma$ , en fonction des valeurs de  $\mu v$  aux deux extrémités

de  $\gamma$  et des  $(k - 1)$  points de Gauss-Lobato sur ce côté  $\gamma$ . Notant  $A_1, A_2, A_3$

les sommets de  $K$ ;  $\{A_i\}, 4 \leq i \leq k + 2$ , les points de Gauss-Lobato de  $A_1, A_2$ ;

$\{A_i\}, k + 3 \leq i \leq 2k + 1$ , les points de Gauss-Lobato de  $A_2 A_3$  ;

$\{A_i\}, 2k + 2 \leq i \leq 3k$ , les points de Gauss-Lobato de  $A_3 A_1$  on choisit

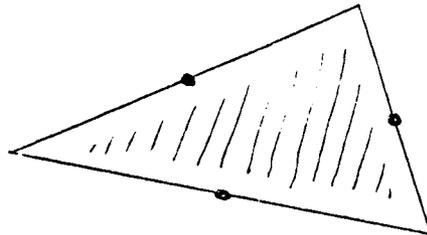
pour base  $S_k(\partial K)$  les fonctions  $v_i$  telles que

$$v_i(A_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq 3k$$

En remarquant que les points de Gauss-Lobato sont répartis symétriquement sur chaque côté, on en déduira le lemme 3. ■

Exemple 1  $\mathcal{F}'(\partial K) = S'_0(\partial K)$

Les fonctions de  $\mathcal{F}'(\partial K)$  sont constantes par côté. On pourra choisir pour degrés de liberté de  $M_h$  les valeurs en un point quelconque sur chaque côté

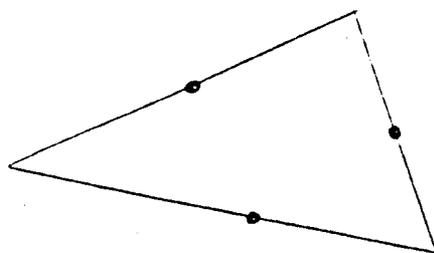


D'après le lemme 3, H2) est vérifiée si  $\mathcal{P}(K) \supset P_1(K)$

Pour le choix  $\mathcal{P}(K) = P_1(K)$ ,  $\forall K \in \mathcal{T}_h$ , l'espace  $V_h$  défini en (20)

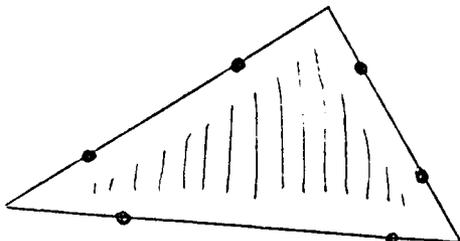
est l'espace des fonctions affines par triangles, continues au milieu des côtés intérieurs et nulles au milieu des côtés frontaliers. Le problème

(21) n'est alors autre que le classique problème  $P_1$  - non - conforme



Exemple 2  $\mathcal{Y}'(\partial K) = \mathcal{S}'_1(\partial K)$

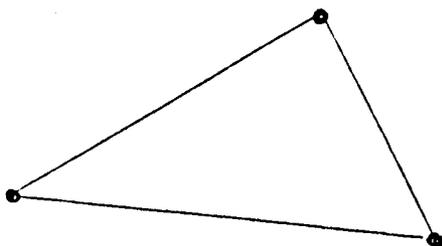
Les fonctions de  $\mathcal{Y}'(\partial K)$  sont affines par côté. On pourra choisir pour degrés de liberté de  $M_h$  les valeurs en deux points quelconques distincts sur chaque côté



Exemple 2.1  $\mathcal{P}(K) = P_1(K)$  ou  $\mathcal{P}(K) = P_2(K)$

L'hypothèse H2) n'est pas vérifiée. L'espace  $V_h$  est l'espace des fonctions  $v$  telles que  $v|_K \in \mathcal{P}(K)$ , sur chaque côté intérieur  $v$  est continu aux 2 points de Gauss, sur chaque côté frontière  $v$  est nulle aux 2 points de Gauss. Lorsque  $\mathcal{P}(K) = P_1(K)$ , on obtient pour  $V_h$  les fonctions affines par triangles, continues dans  $\mathcal{Q}$  et nulles sur  $\Gamma$  soit la plus classique des méthodes d'éléments finis conformes :

$$\mathcal{P}(K) = P_1(K)$$



Exemple 2.2

$$\mathcal{P}(K) = P_3(K)$$

L'hypothèse H2) est vérifiée. L'espace  $V_h$  n'a pas de base déterminée localement de façon simple. La résolution matricielle de (20) proposée ne devra donc pas utiliser la connaissance d'une base de  $V_h$ .

Exemple 2.3

Pour que H2) soit réalisée lorsque  $m = 1$ , la condition  $k \geq 3$  n'est nécessaire que si  $\mathcal{Y}(\partial K) = S_3(\partial K)$ . Montrons effectivement sur cet exemple que H2) peut être réalisée avec

$$S_2(\partial K) \subsetneq \mathcal{Y}(\partial K) \subsetneq S_3(\partial K)$$

Soit un espace  $\mathcal{P}(K)$  avec

$$P_2(K) \subset \mathcal{P}(K)$$

Supposant  $K$  équilatéral pour simplifier, toute fonction  $\mu \in S_1^+(\partial K)$  vérifiant

$$\int_{\partial K} \mu v \, d\sigma = 0, \quad \forall v \in S_2(\partial K)$$

est de la forme

$$\mu = \begin{cases} C (X_1 - X_2) & \text{sur } A_1 A_2 \\ C (X_2 - X_3) & \text{sur } A_2 A_3 \\ C (X_3 - X_1) & \text{sur } A_3 A_1 \end{cases}$$

où  $X_1(M)$ ,  $X_2(M)$  et  $X_3(M)$  désignent les coordonnées barycentriques de  $M$ .

Pour que H2) soit réalisée, il suffit que  $\mathcal{P}(K)$  contienne outre  $P_2(K)$

une fonction  $v$  telle que

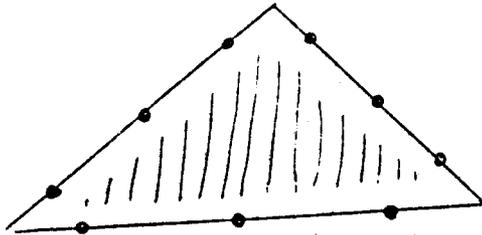
$$\int_{A_1 A_2} (x_1 - x_2) v \, d\sigma + \int_{A_2 A_3} (x_2 - x_3) v \, d\sigma + \int_{A_3 A_1} (x_3 - x_1) v \, d\sigma \neq 0$$

Le choix le plus simple d'une telle fonction  $v$  est la fonction de Loof [ 3 ]

$$v = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_3).$$

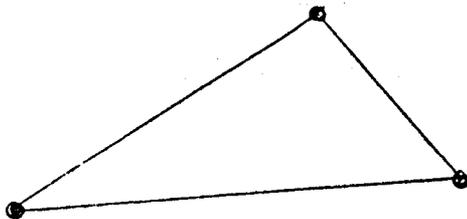
Exemple 3  $\mathcal{P}'(\partial K) = \mathcal{S}'_2(\partial K)$

Les fonctions de  $\mathcal{P}'(K)$  sont quadratiques par côté



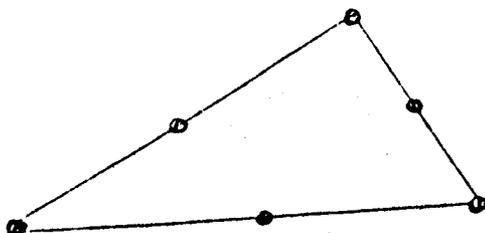
Exemple 3.1  $\mathcal{P}(K) = P_1(K)$

L'hypothèse H2) n'est pas satisfaite. On retrouve pour  $V_h$  le  $P_1$ -conforme



Exemple 3.2  $\mathcal{P}(K) = P_2(K)$

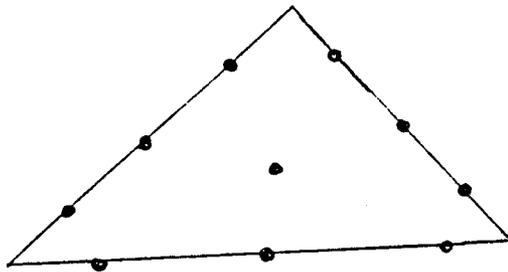
L'hypothèse H2) n'est pas satisfaite. On trouve pour  $V_h$  le  $P_2$ -conforme



Exemple 3.3

$$\mathcal{F}(K) = P_3(K)$$

L'hypothèse H2) est satisfaite. On trouve pour  $V_h$  l'espace des fonctions polynomiales de degré  $\leq 3$  par triangles, continues en les 3 points de Gauss des côtés intérieurs et nulles en les 3 points de Gauss des côtés frontaliers, d'où le problème  $P_3$ -non-conforme



V. EXEMPLES AVEC K PARALLELOTOPE DE  $\mathbb{R}^N$ .

Soit  $k$  un entier  $\geq 0$ . Pour tout  $K \in \mathcal{C}_h$ ,  $K$  paralléloétope de  $\mathbb{R}^N$ ,

(pour simplifier l'écriture nous supposons que toute face de  $K$  est orthogonale à un axe de la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ ), on se donne  $\mathcal{Q}(K)$  espace de dimension finie de fonctions  $\mathcal{E}^1(K)$  avec

$$(30) \quad \mathcal{Q}_k(K) \subset \mathcal{Q}(K)$$

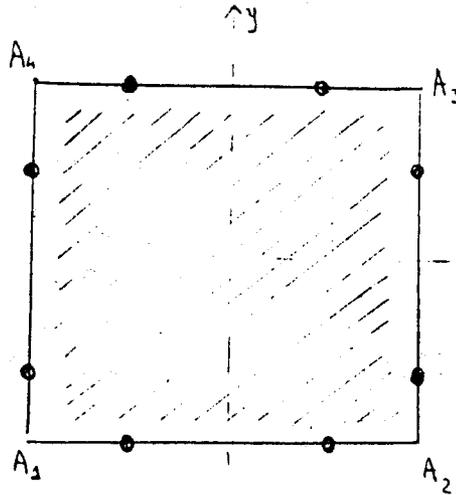
cù  $\mathcal{Q}_k(K)$  est l'espace des restrictions à  $K$  des polynômes de degré  $\leq k$  en chaque variable. On note  $\mathcal{C}(\partial K)$  (resp.  $T_k(\partial K)$ ) l'espace des traces sur  $\partial K$  des fonctions  $\mathcal{Q}(K)$  (resp.  $\mathcal{Q}_k(K)$ ). On a donc

$$(31) \quad T_k(\partial K) \subset \mathcal{C}(\partial K)$$

On choisit alors pour sous-espace  $\chi_h$  de  $H^1(\mathcal{C}_h)$

Exemple 5

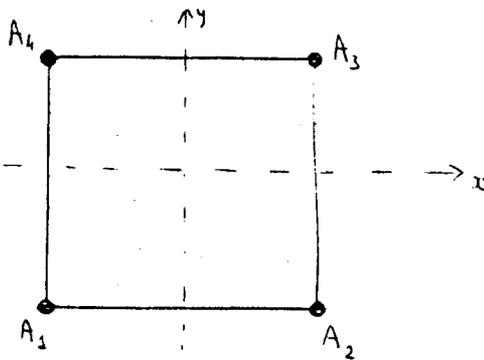
$$\mathcal{G}'(\partial K) = \mathcal{T}'(\partial K)$$



Exemple 5.1

$$\mathcal{Q}(K) = \mathcal{Q}_1(K)$$

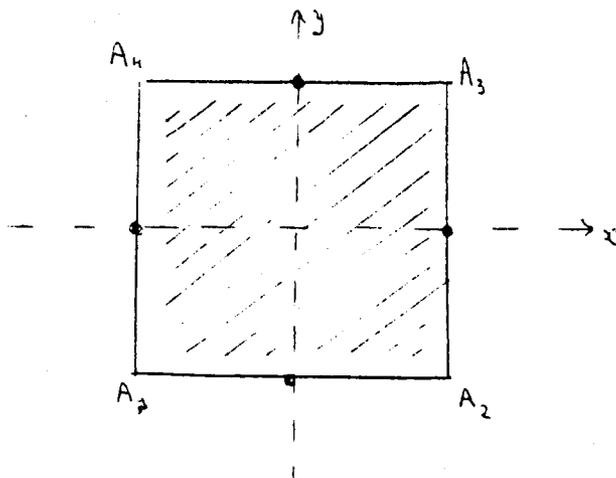
L'hypothèse H2) n'est pas satisfaite. On obtient pour  $V_h$  le  $\mathcal{Q}_1$  - conforme



Dans les exemples, nous prendrons des axes locaux de sorte que  $K$  soit le carré  $[-1, +1] \times [-1, +1]$ .

Exemple 4.  $\mathcal{G}'(\partial K) = T'_0(\partial K)$

Les fonctions de  $\mathcal{G}'(\partial K)$  sont les fonctions constantes par côté de  $K$ . On choisira pour degré de liberté de  $M_h$  les valeurs en un point quelconque sur chaque côté



Si  $\mathcal{G}(\partial K) = T_1(\partial K)$  toute fonction  $\mu \in \mathcal{G}'(\partial K) = T'_0(\partial K)$  vérifiant

$$\int_{\partial K} \mu v \, d\sigma = 0 \quad \forall v \in T_1(\partial K)$$

est de la forme

$$\mu = \begin{cases} + C & \text{sur les "côtés horizontaux"} \\ - C & \text{sur les "côtés verticaux"} \end{cases}$$

Pour que H2) soit satisfaite, il faut donc que  $\mathcal{Q}(K)$  contienne outre  $\mathcal{Q}_1(K)$  une fonction  $v$  telle que

$$\int_{-1}^{+1} (v(x, -1) + v(x, +1)) dx - \int_{-1}^{+1} (v(-1, y) + v(+1, y)) dy \neq 0$$

On vérifie facilement que la fonction  $v = x^2 - y^2$  vérifie cette condition.

Conclusion : H2) est satisfaite si  $\mathcal{Q}(K) \supset \{ \mathcal{Q}_1(K), x^2 - y^2 \}$

En particulier H2) est satisfaite si  $\mathcal{Q}(K) \supset P_2(K)$

Exemple 5.2  $(Q)(K) \supset Q_2(K)$

On vérifie que toute fonction  $\mu \in T'(\partial K)$  vérifiant

$$\int_{\partial K} \mu v \, d\sigma = 0 \quad \forall v \in T_2(\partial K)$$

est de la forme

$$\mu = \begin{cases} Cx & \text{sur } A_1 A_2 \\ Cy & \text{sur } A_2 A_3 \\ -Cx & \text{sur } A_3 A_4 \\ -Cy & \text{sur } A_4 A_1 \end{cases}$$

Pour que H2) soit satisfaite, il faut et il suffit qu'il existe  $v \in Q(K)$

telle que

$$\int_{-1}^{+1} [v(x, -1) - v(x, +1)] x dx + \int_{-1}^{+1} [v(-1, y) - v(+1, y)] y dy \neq 0$$

On vérifie que la fonction de Loof [7]  $v(x, y) = xy(x^2 - y^2)$  satisfait cette hypothèse.

VI. DE L'INFLUENCE DE L'INTEGRATION NUMERIQUE.

On suppose à présent effectuer les calculs d'intégration à l'aide de formules d'intégration numérique :

$$a_{z_h}(u,v) \approx a_h(u,v)$$

$$b_{z_h}(\mu,v) \approx b_h(\mu,v)$$

$$(f,v) \approx (f,v)_h$$

Le problème approché est alors

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_h^*, \lambda_h^*) \in X_h \times M_h \text{ solution de} \\ a_h(u_h^*, v) + b_h(\lambda_h^*, v) = (f,v)_h, \quad \forall v \in X_h \\ b_h(\mu, u_h^*) = 0, \quad \forall \mu \in M_h \end{array} \right.$$

Théorème 5.

Soit  $V_h^*$  l'espace défini par

$$(38) \quad V_h^* = \{v \mid v \in X_h, \quad b_h(\mu, v) = 0 \quad \forall \mu \in M_h\}$$

Sous les deux hypothèses suivantes :

$$H1^*) \quad (v \in V_h^* \quad a_h(v,v) = 0) \Rightarrow v = 0$$

$$H2^*) \quad (\mu \in M_h \quad b_h(\mu, v) = 0, \quad \forall v \in X_h) \Rightarrow \mu = 0$$

le problème (38) admet une solution et une seule.

Exemples avec une triangulation de  $\bar{\Omega}$ .

Lemme 6. On suppose

$$(39) \quad (v \in X_h, a_h(v,v) = 0) \Rightarrow (v = \text{constante par simplexe})$$

$$(40) \quad S'_0(\partial K) \subset \mathcal{P}'(\partial K)$$

Alors  $H1^*$  est satisfaite.

Remarque: On trouvera dans [ 10 ] des conditions suffisantes pour que (39) soit vérifiée.

Lemme 7. On se place en dimension d'espace  $N = 2$ .

On suppose

$$(41) \quad \text{la formule d'intégration permettant de passer de } b_{\tau_h} \text{ à } b_h \text{ est}$$

exacte à l'ordre  $2m + 1$ .

Alors si  $m$  est pair et  $k \geq m + 1$ ,  $H2^*$  est satisfaite.

Si  $m$  est impair, les solutions  $\mu$  de

$$\mu \in S'_m(\partial K) \text{ et } b_{h,K}(\mu,v) = 0, \quad \forall v \in S_k(\partial K)$$

avec  $k = m + 1$  et  $b_{h,K}(\mu,v)$  l'approximation par la formule de quadrature

-utilisée de  $\int_{\partial K} \mu v \, d\sigma$ , constituent un espace de dimension 1.

A titre d'exemple, nous reprenons l'exemple (2.3) :

$$S'(\partial K) = S'_1(\partial K)$$

$$\mathcal{P}(K) = \{P_2(K), (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_3)\}$$

et  $b_{\tau_h}(\mu,v)$  est calculé à l'aide de la formule d'intégration aux 2 points

de Gauss sur chaque côté (exacte pour  $P_3$ ) .

(on vérifie que  $H_2^*$ ) est alors vérifiée. L'espace  $V_h^*$  est caractérisé comme l'espace des fonctions  $v$  telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} v|_K \in \mathcal{P}(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \\ v \text{ continue en les 2 points de Gauss de tout côté } \gamma \notin \Gamma \\ v \text{ nulle en les 2 points de Gauss de tout côté } \gamma \subset \Gamma. \end{array} \right.$$

On retrouve l'espace décrit dans IRONS et RAZZAQUE [ 11 ]. On a maintenant facilement une base de  $V_h$ , ce qui n'était pas le cas de l'exemple (2.3)...

mais cet avantage se paie lourdement; le calcul d'erreur montre que l'intégration numérique utilisée provoque une perte de précision d'un ordre en  $h$ .

Exemples avec une quadrangulation de  $\bar{\Omega}$ .

On reprend l'exemple 4 avec

$$\mathcal{C}'(\partial K) = T'_0(\partial K)$$

$$\mathcal{Q}(K) = P_2(K).$$

En calculant  $b_{\tau_h}(\mu, v)$  à l'aide de la formule des trapèzes sur chaque côté,

on retrouvera la brique de WILSON [ 12 ] (cf aussi STRANG et FIX [ 13 ] ).