

BERNARD ALFONSI

Autour du théorème de l'élément primitif

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 4

« Séminaire d'algèbre et de logique », , exp. n° 5, p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973__4_A5_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AUTOUR DU THEOREME DE L'ELEMENT PRIMITIF

par

Bernard ALFONSI

Tous les anneaux sont commutatifs et possèdent un élément unité.
Un homomorphisme d'anneaux $f : A \longrightarrow B$ est tel que $f(1) = 1$.

Si $A \longrightarrow B$ est une A -algèbre, on désigne par I_B (ou I lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté), le noyau de l'homomorphisme canonique $p : B \otimes_A B \longrightarrow B$ défini par $p(x \otimes y) = xy$, et par $\Omega_{B/A}$ le B -module des différentielles I_B/I_B^2 .

On se propose, dans ce qui suit, de caractériser le nombre de générateurs d'une A -algèbre finie B en fonction du nombre de générateurs du B -module $\Omega_{B/A}$.

Je tiens à remercier Daniel FERRAND, sans l'aide et les conseils de qui ce travail n'aurait pas vu le jour.

§ 1. LE RESULTAT PRINCIPAL.

Théorème 1. Soient A un anneau semi-local, B une A -algèbre finie. Supposons que A soit à corps résiduels infinis, ou que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , il existe au plus deux idéaux maximaux de B au-dessus de $\mathfrak{m}$.

Alors, B est une A -algèbre engendrée par moins de n éléments si et seulement si $\Omega_{B/A}$ est un B -module engendré par moins de n éléments.

Preuve : Le théorème résultera de la proposition suivante :

Proposition 1. Soient k un corps, B une k -algèbre finie. On suppose que k est infini, ou que B possède au plus deux idéaux maximaux. Alors, B est une k -algèbre monogène si et seulement si $\Omega_{B/k}$ est un B -module monogène.

Preuve de la proposition :

Lemme 1. Soient A un anneau, I un idéal de type fini de A , contenu dans tous les idéaux maximaux de A , sauf au plus un nombre fini $m_1, \dots, m_r$; $p : I \rightarrow I/I^2$ la surjection canonique, et $y_1, \dots, y_n$ un système générateur de I/I^2 . Alors, il existe un système générateur, $x_1, \dots, x_n$ de I tel que $p(x_i) = y_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

En effet, l'homomorphisme $A \rightarrow A/I \times A/m_1 \times \dots \times A/m_r$ est surjectif ; il en est donc de même de l'application obtenue par tensorisation :

$$I \rightarrow I/I^2 \times I/m_1 I \times \dots \times I/m_r I.$$

Comme $I/m_j I = I/m_j \cap I = A/m_j$, $I/m_j I$ est monogène ; soit z_j un générateur.

Il existe des éléments $x_i \in I$, tels que, par l'application surjective considéré plus haut, l'image de x_1 soit $(y_1, z_1, \dots, z_r)$, et pour $i > 1$, l'image de x_i soit $(y_i, 0, \dots, 0)$. Pour voir que les x_i engendrent I , on peut supposer A local, d'idéal maximal m : si m est distinct de l'un des m_j , il contient I , $(I/m_j I)_m = 0$, et les y_i engendrant $(I/I^2)_m$, il résulte de Nakayama que les x_i engendrent I_m ; si $m = m_j$,

$(I/I^2)_{m_j} = 0 = (I/m_k I)_{m_j}$ si $k \neq j$: z_j engendrant $(I/m_j I)_{m_j}$, il en résulte encore que x_j engendre I_{m_j} . C.Q.F.D.

Lemme 2. Soient A un anneau, I un idéal monogène de A . Pour que $x \in I$ engendre I , il faut et il suffit que, pour tout idéal maximal m de A tel que $I \not\subset mI$, on ait $x \notin mI$.

Ce n'est qu'une traduction de Nakayama : cela revient à dire que x engendre I modulo mI , pour tout idéal maximal m de A .

Lemme 3. Soient k un corps, E un k -espace vectoriel de dimension finie, $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels stricts de E formant un recouvrement de E .

Alors $\text{Card}(I) \geq 1 + \text{Card}(k)$.

Cela résulte immédiatement de [1] (Chap. II. § 7, ex. 5).

Lemme 4. Soient k un corps, B une k -algèbre finie, I le noyau de l'homomorphisme canonique $p : B \otimes_k B \longrightarrow B$. On suppose que k est infini, ou que B possède au plus deux idéaux maximaux.

Alors, si I est monogène, il existe $x \in B$ tel que $1 \otimes x - x \otimes 1$ engendre I .

Preuve : Soit V le k -espace vectoriel engendré par les $1 \otimes x - x \otimes 1$, où $x \in B$

$\bigcup_{\substack{m \in \text{Max}(B \otimes_k B) \\ mI \neq I}} (mI \cap V) \neq V$, car sinon, vu les hypothèses sur k ou B , il existerait, d'après le lemme 3, un idéal maximal m de $B \otimes_k B$, tel que $V = mI \cap V$ et que $mI \neq I$, d'où $V \subset mI$, ce qui impliquerait que $I \subset mI$, puisque V engendre l'idéal I ; d'où la contradiction.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 1 : d'après les lemmes 1 et 4, il existe $x \in B$ tel que $1 \otimes x - x \otimes 1$ engendre l'idéal I . Soit $C = k[x]$ la sous k -algèbre de B engendrée par x , et considérons le diagramme cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} C \otimes_k C & \xrightarrow{\quad} & B \otimes_k B \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ C & \xrightarrow{\quad} & B \otimes_C B \end{array}$$

$1 \otimes x - x \otimes 1$ engendre $J = \text{Ker } p$, donc aussi $\text{Ker } q$, d'où $\text{Ker } q = I$, et donc $B \otimes_C B \xrightarrow{\sim} B$.

Or, on a une suite $B \rightrightarrows B \otimes_C B \longrightarrow B$, où les composés sont l'identité ; chacune des flèches $B \rightrightarrows B \otimes_C B$ est donc un isomorphisme. Ceci étant, la suite exacte de C -modules :

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow B/C \longrightarrow 0$$

donne, par tensorisation avec B au-dessus de C , la suite exacte :

$$B \longrightarrow B \otimes_C B \longrightarrow B/C \otimes_C B \longrightarrow 0$$

d'où

$$B/C \otimes_C B = 0.$$

$$C \longrightarrow B \text{ étant fini, on a : } \emptyset = \text{Supp}_C(B/C \otimes_C B) = \text{Supp}_C(B/C) \cap \text{Supp}_C(B) ;$$

comme $\text{Supp}_C(B/C) \subset \text{Supp}_C(B)$, on a $\text{Supp}_C(B/C) = \emptyset$, donc $B/C = 0$, i.e. $B=C$.

Remarque. Si k est fini, on ne peut supprimer l'hypothèse sur B , comme le montre l'exemple suivant : $k = \mathbb{F}_2$; $B = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$, n'est pas monogène.

Proposition 2. Soient A un anneau semi-local, B une A -algèbre finie. Supposons que A soit à corps résiduels infinis, ou que pour tout idéal maximal m de A , il existe au plus deux idéaux maximaux de B au-dessus de m .

Alors, pour que B soit une A -algèbre monogène, il faut et il suffit que $\Omega_{B/A}$ soit un B -module monogène.

Preuve : Pour tout idéal maximal m de A , $\Omega_{B/mB} / A/m$ est un B/mB -module monogène ; B/mB est donc une A/m -algèbre monogène d'après la proposition 1.

$$\prod_{m \in \text{Max}(A)} B/mB \text{ est donc une } \prod_{m \in \text{Max}(A)} A/m \text{-algèbre monogène [4].}$$

$$\text{Or } \prod_{m \in \text{Max}(A)} B/mB \xrightarrow{\sim} B \otimes_A \prod_{m \in \text{Max}(A)} A/m \xrightarrow{\sim} B \otimes_A A/\text{Rad}(A), \text{ et}$$

Nakayama montre une fois de plus que B est monogène.

C.Q.F.D.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème : on peut toujours se ramener au cas où A est un corps k .

D'autre part, pour $m \in \text{Spec}(B)$, $\Omega_{B/k} \otimes_B B_m \xrightarrow{\sim} \Omega_{B_m/k}$; comme B_m est une k -algèbre finie, puisque facteur direct de B , si l'on suppose le théorème démontré pour une k -algèbre finie et locale, on sait que

$$B \xrightarrow{\sim} \bigcap_{m \in \text{Spec}(B)} B_m$$

sera engendré par moins de n éléments si k est infini ([4]). Si k est fini, et si B possède deux idéaux maximaux, soient $(a_1, \dots, a_n)$ (resp. $(b_1, \dots, b_n)$) un système générateur de la k -algèbre B_1 (resp. B_2), où B_1 et B_2 désignent les deux composants locaux de B . $B \xrightarrow{\sim} B_1 \times B_2$ est une $k[a_1] \times k[a_2]$ -algèbre engendrée par moins de $n-1$ éléments, et la proposition 1 montre que $k[a_1] \times k[a_2]$ est monogène, puisqu'elle n'a que deux idéaux maximaux. Il résulte alors de [2] que B est engendrée sur k par moins de n éléments. On peut donc supposer que B est locale.

Dans ce cas, comme $d(B)$ est un système générateur de $\Omega_{B/k}$, on peut en extraire un système minimal de générateurs (Nakayama...) ;

Il existe donc $x_1, \dots, x_n$ dans B tels que $dx_1, \dots, dx_n$ engendrent $\Omega_{B/k}$. Posons $A = k[x_1, \dots, x_{n-1}]$. La suite exacte :

$$\Omega_{A/k} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/k} \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0$$

montre que $\Omega_{B/A}$ est engendré par un élément, l'image de dx_n dans $\Omega_{B/A}$, donc que B est une A -algèbre monogène : $B = A[b]$, d'où $B = k[x_1, \dots, x_{n-1}, b]$.

C.Q.F.D.

§ 2. CAS DES CORPS RESIDUELS FINIS.

On peut améliorer les résultats précédents, en remplaçant l'hypothèse faite sur la A-algèbre B par des hypothèses sur les cardinaux des corps résiduels de A :

Proposition 3. Soient A un anneau semi-local, k_i ses corps résiduels, B une A-algèbre finie, $n_i = \text{rg}_{k_i} (B \otimes_A k_i)$. Si, pour tout i, on a :

$$\text{card}(k_i) > n_i(n_i - 1),$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Omega_{B/A}$ est un B-module monogène ;

(ii) B est une A-algèbre monogène.

Preuve : Comme dans le cas de la proposition 2, il suffit de faire la démonstration lorsque A est un corps k. B se décompose alors en composants locaux $B_1, \dots, B_p$. D'après la proposition 1, chaque B_j est monogène :

$$B_j \xrightarrow{\sim} k[x]/(F_j) ; \text{ soit } r_j = \deg(F_j) \ (j=1, \dots, p) ;$$

On suppose que $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p$. D'après [4] (prop. 3), si

$$\text{card } k > (r_1 + \dots + r_{p-1}) r_p, \text{ B est monogène. Or}$$

$$n = \text{rg}_k B = \sum_{j=1}^p r_j ;$$

d'autre part, $1 \leq r_p \leq n$, donc :

$$(r_1 + \dots + r_{p-1}) r_p = (n - r_p) r_p \leq (n-1)n,$$

d'où le résultat en vertu de l'hypothèse faite sur card(k).

Corollaire. Sous les mêmes hypothèses, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Omega_{B/A}$ est un B-module engendré par moins de n éléments ;

(ii) B est une A-algèbre engendrée par moins de n éléments.

On peut supposer que A est un corps k . D'après le théorème 1, chaque composant local B_j de B est engendré par moins de n éléments, soit :

$$B_j = k [x_{1,j}, \dots, x_{n-1,j}] ;$$

désignons par C_j la sous k -algèbre $k [x_{1,j}, \dots, x_{n-1,j}]$. $\prod_{j=1}^P C_j$ est engendré par moins de $n-1$ éléments (récurrence), et $\prod_j B_j$ est une $\prod_j C_j$ -algèbre monogène (prop. 3), donc $\prod_j B_j \xrightarrow{\sim} B$ est bien engendrée sur k par moins de n éléments.

C.Q.F.D.

§ 3. GLOBALISATION.

Le théorème 1 admet la forme globale suivante :

Théorème 2. Soit $A \longrightarrow B$ une A -algèbre finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) Il existe une A -algèbre A' telle que $\text{Spec } (A') \longrightarrow \text{Spec } (A)$ soit étale et surjectif et telle que $B' = A' \otimes_A B$ soit une A' -algèbre engendrée par n éléments.
- ii) Il existe une B -algèbre C telle que $\text{Spec } (C) \longrightarrow \text{Spec } (B)$ soit étale et surjectif et telle que $\Omega_{C/A}$ soit un C -module engendré par n éléments.
- iii) Pour tout idéal premier q de B , $\Omega_{B_q/A}$ est un B_q -module engendré par n éléments.

Preuve : i) $\implies$ ii) Il suffit de prendre pour C la B -algèbre étale B' et d'utiliser l'exactitude de la suite

$$0 = \Omega_{A'/A} \otimes_{A'} B' \longrightarrow \Omega_{B'/A} \longrightarrow \Omega_{B'/A'} \longrightarrow 0$$

ii) $\implies$ iii) Comme $B \longrightarrow C$ est étale, on a un isomorphisme

$$\Omega_{B/A} \otimes_C C \xrightarrow{\sim} \Omega_{C/A}$$

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de C tel que $\mathfrak{p} = B \cap \mathfrak{p}$. On a un isomorphisme :

$$\Omega_{B/\mathfrak{p}} \otimes_{B/\mathfrak{p}} C/\mathfrak{p} \xrightarrow{\sim} \Omega_{C/\mathfrak{p}} ;$$

donc

$$\text{rg}_{k(\mathfrak{p})} (\Omega_{B/\mathfrak{p}} \otimes_{B/\mathfrak{p}} k(\mathfrak{p})) = \text{rg}_{k(\mathfrak{p})} (\Omega_{B/\mathfrak{p}} \otimes_{B/\mathfrak{p}} k(\mathfrak{p})) \leq n$$

et on conclut par Nakayama.

iii) $\implies$ i) On peut supposer que A est local strictement hensélien, puis par Nakayama, que A est un corps k séparablement clos, donc infini ; B est alors isomorphe au produit de ses composantes locales B_1 et l'hypothèse iii) dit que pour tout i , $\Omega_{B_i/k}$ est engendré par n éléments. Donc, $\Omega_{B/k}$ est un B -module engendré par n éléments et le théorème 1 permet de conclure puisque k est infini.

§ 4. CONTRE-EXEMPLES.

On ne peut espérer améliorer les résultats du § 1 dans le cas général :

Contre-Exemple 1 : Il existe un anneau principal A , une A -algèbre finie et libre B , telle que $\Omega_{B/A}$ soit monogène, mais que B ne soit pas monogène.

Soient k un corps infini de caractéristique o , non algébriquement clos ;

$A = k[X]$; p, q deux polynômes irréductibles tels que $\deg(p) - \deg(q) \not\equiv 0$

(mod 3) ; $K = k(X)$; L le corps cubique $k[u]$, où $u^3 = p^2q$ ($T^3 - p^2q$ est irréductible par le critère d'Eisenstein) ; $v = pq/u$; $B = A + Au + Av$;

A' l'anneau des entiers de L ; montrons que $A' = B$:

i) On vérifie aisément que le polynôme minimal de v sur K est $T^3 - pq^2$, que $v^2 = qu$, et $u^2 = pv$; enfin, que B est un sous-anneau de A' , et un A -module libre de rang 3, dont $(1, u, v)$ est une base (sinon le polynôme minimal de u serait de degré ≤ 2).

ii) $A' = B + qA'$: il faut montrer que l'homomorphisme canonique :

$B/qB \longrightarrow A'/qA'$, est surjectif ; or B/qB et A'/qA' , sont des A/qA -espaces vectoriels de dimension 3 ; il suffit donc de montrer que cet homomorphisme est injectif, i.e. que $qA' \cap B = qB$. Soient q un idéal premier de A' contenant qA' , et $a + bu + cv \in qA' \cap B$; comme u^3 et v^3 sont dans qA' , donc dans q , u et v appartiennent à $q \cap B$, et $a \in (q \cap B) \cap A = qA$; il faut donc montrer que $bu + cv \in qB$.

Or, $bu + cv \in qA' \cap B \implies u(bu + cv) = bu^2 + cpq \in qA' \cap B \implies bu^2 = qx$ avec $x \in A'$. Prenant la norme des deux membres, on a :

$$b^3(p^2q)^2 = q^3 N(x)$$

$$b^3 p^4 = q N(x)$$

Comme p et q sont étrangers dans A , on en tire $b^3 \in qA$ d'où $b \in qA$.

On montrerait de même que $c \in qA$.

De façon analogue, on a $A' = B + pA'$, d'où $A' = B + pqA'$.

iii) Soit $x = a + bu + cv$ ($a, b, c \in K$) un entier de L . $\text{Tr}(X) = 3a \in A$, d'où $a \in A$: $\text{Tr}(vx) = 3bpq \in A$, d'où $bpq \in A$; de même $cpq \in A$, d'où $pqx \in B$, et donc $pqA' \subset B$, ce qui montre que $A' = B$.

iv) B n'est pas monogène : pour le voir, calculons les discriminants :

$D(1, u, v) = (p^2q^2)$; si $x = a + bu + cv \in B$, on a :

$$D(1, x, x^2) = p^2q^2(b^3q - c^3p)^2$$

Pour que x soit un générateur, il faut ([6], chap. V) que $b^3q - c^3p$ soit inversible, ce qui implique que $3 \deg(b) + \deg(q) = 3 \deg(c) + \deg(p)$ donc que 3 divise $\deg(p) - \deg(q)$, ce qui est impossible vu les hypothèses.

v) $\Omega_{B/A}$ est un B -module monogène d'après le résultat suivant :

Proposition 4. Soient A un anneau de Dedekind tel que, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , $A/\mathfrak{m}$ soit un corps parfait, et B la clôture intégrale de A dans une extension finie séparable de son corps des fractions. Alors $\Omega_{B/A}$ est monogène.

Preuve : Soient K le corps des fractions de A , L celui de B . Comme $K \longrightarrow L$ est séparable, $\Omega_{B/A} \otimes_A K = 0$; considéré comme A -module, $\Omega_{B/A}$ a donc un support fini $\{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r\}$ d'idéaux maximaux de A . Posons $E = \Omega_{B/A}$. L'application : $E \longrightarrow \prod_{i=1}^r E_{\mathfrak{m}_i}$ étant bijective, il suffit de voir que chaque $E_{\mathfrak{m}_i}$ est un $B_{\mathfrak{m}_i}$ -module monogène, et on peut donc supposer que A est de valuation discrète.

Soient alors A' un hensélisé de A , $B' = B \otimes_A A'$; E étant un A -module de torsion, une puissance $\mathfrak{m}^d$ de l'idéal maximal de A annule E , et comme $A/\mathfrak{m}^d \longrightarrow A'/\mathfrak{m}^d A'$, est un isomorphisme ([5] chap. VIII), il en est de même de $E \longrightarrow E \otimes_A A' = E' \xrightarrow{\sim} \Omega_{B'/A'}$. Il suffit donc de montrer que E' est un B' -module monogène.

Or B étant normal, et A' une A -algèbre locale ind-étale, B' est normal ([5] chap. VIII) ; de plus, $\dim B' = \dim A' = 1$; on en déduit que chaque composant local B'_i de B' est un anneau de valuation discrète ([2], 1, prop. 11). En outre, il suffit de montrer que chaque facteur E'_i du module des différentielles est un B'_i -module monogène. Finalement, on peut donc supposer que A et B sont des anneaux de valuation discrète ; soit $\mathfrak{n}$ l'idéal maximal de B . On a la suite exacte :

$$\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \longrightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B K' \longrightarrow \Omega_{K'/K} \longrightarrow 0$$

où K et K' sont les corps résiduels de A et B respectivement ; $\Omega_{K'/K} = 0$ puisque $K \longrightarrow K'$ est séparable par hypothèse ; comme B est de valuation discrète, $\mathfrak{n}$ est un B -module monogène, d'où le résultat.

C.Q.F.D.

On peut se demander si le résultat du § 1 peut se généraliser à un anneau non nécessairement semi-local, sous la forme suivante :

"si I_B est monogène, alors B est une A-algèbre monogène".

Ceci impliquerait en particulier qu'une algèbre finie et nette est monogène ; de même, si $A \longrightarrow B$ est fini radiciel, et si $\Omega_{B/A}$ est monogène, B serait monogène, puisque I_B étant nilpotent, il serait monogène.

Voici donc :

Contre-Exemple 2 : Il existe un anneau principal A et une A-algèbre finie, libre et étale qui n'est pas monogène.

Soient k un corps de caractéristique 3 ; $F \in k[X, Y]$ le polynôme $X^2 - Y(Y^2 - 1)$; $A = k[X]$; $B = k[X, Y]/(F)$; x et y les images de X et Y dans B. B est l'anneau d'une cubique passant par l'origine 0 ; on pose $I = \text{div}(0)$. On sait ([5], chap. VI) que I est un idéal de B qui est localement principal, mais non principal, et que I^2 est principal ; il existe donc (loc. cit. prop. 2) sur le B-module $C = B \oplus I$ une structure de B-algèbre finie étale ; A étant principal, C est en outre un A-module libre.

D'autre part, $\Omega_{B/A}$ est le B-module engendré par dY, avec la relation $F'_Y dY = dY = 0$ (car $k=3$). B est donc une A-algèbre finie étale, et par transitivité, il en est de même de C.

C n'est pas une A-algèbre monogène car ce n'est pas une B-algèbre monogène : en effet, C est un B-module localement libre de rang 2 ; si C était monogène, ce serait un B-module libre, et on aurait $C \xrightarrow{\sim} B^2$, donc

$$\Lambda^2 C \xrightarrow{\sim} \Lambda^2 (B^2) \xrightarrow{\sim} B.$$

Comme $\Lambda^n (E \oplus F) \longrightarrow \bigoplus_p (\Lambda^p E) \otimes (\Lambda^q F)$, on a aussi :

$$p + q = n$$

$$\Lambda^2 C \xrightarrow{\sim} \Lambda^1 B \otimes_B \Lambda^1 I \xrightarrow{\sim} I, \text{ et } I \text{ serait monogène.}$$

Remarques.

- (i) Nous n'avons pas réussi à trouver de contre-exemple en caractéristique 0, ce qui conserve l'intérêt du premier contre-exemple ;
- (ii) Si l'on suppose, dans le second contre-exemple, que $\text{car } k=0$, on obtient toujours que C est une B -algèbre étale non monogène ; en outre, dans ce cas, B est un anneau de Dedekind, car la courbe d'équation $x^2 - y(y^2 - 1)$ n'a pas de point singulier. D'où un contre-exemple avec un anneau de Dedekind, en caractéristique résiduelle 0.

§ 5. UNE APPLICATION.

Lemme. Soient A un anneau intègre, B une A -algèbre plate. Si M est A -module sans torsion, $M \otimes_A B$ est un B -module sans torsion.

Par passage à la limite inductive, on peut supposer que M est de type fini. M est alors un sous-module d'un A -module libre de type fini L : l'hypothèse de platitude entraîne que $M \otimes_A B$ est un sous-module du B -module libre $L \otimes_A B$, d'où le résultat.

Proposition 5. Soient A un anneau qui est un produit fini d'anneaux intègres et intégralement clos, B une A -algèbre finie sans torsion.

Alors, si $\Omega_{B/A}$ est un B -module ponctuellement monogène, B est un A -module projectif.

Preuve : Il est clair qu'on peut supposer A intègre et intégralement clos, toutes les propriétés se vérifiant sur chaque composante. Dans ce cas, il suffit ([3]) de montrer que $A \rightarrow B$ est plat ; pour cela, on peut, d'après le lemme, supposer A local et hensélien. Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de B , $B_{\mathfrak{m}}$ est alors une A -algèbre finie monogène, et on peut supposer B locale.

Soient x un générateur de B , K le corps des fractions de A , F le polynôme minimal de x sur K ; comme A est intégralement clos, $F \in A[x]$; posons $C = A[x]_{(F)}$, $I = \text{Ker}(C \rightarrow B)$. On a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & C & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I \otimes_A K & \longrightarrow & C \otimes_A K & \longrightarrow & B \otimes_A K & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Comme $I \otimes_A K = 0$, $I = 0$ et B est libre sur A .

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI : Algèbre. Chap. II (Hermann)
- [2] N. BOURBAKI : Algèbre commutative. Chap. VII (Hermann)
- [3] C.U. JENSEN : : A Remark on flat and projective modules.
Canad. J. Math. 18 (1966) pp. 943-949.
- [4] L. MAILHOS : Algèbres commutatives ponctuellement de type fini
sur un anneau semi-local hensélien.
(Bull. des Sci. Math. - 94 (2) Avril-Juin 1970)
- [5] M. RAYNAUD : Anneaux locaux henséliens.
Lecture Notes in Mathematics n° 169 (Springer-Verlag)
- [6] ZARISKI-SAMUEL : Commutative Algebra. T.1 (Van Nostrand)