

D. PREVOSTO

J. ROLLAND

Problèmes aux limites pour des opérateurs elliptiques et dégénérés

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 2

« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 8, p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973__2_A8_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLEMES AUX LIMITES POUR DES OPERATEURS
ELLIPTIQUES ET DEGENERES

(d'après M.I. Višik et V.V. Grušin ; 1969)

par

D. PREVOSTO et J. ROLLAND

§ 1. Un exemple.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, tel que $\bar{\Omega}$ soit une variété à bord compacte de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) > 0\}; \\ \Gamma = \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = 0\}; \\ \text{Pour tout } x \in \Gamma, \text{ grad } \varphi(x) \neq 0. \end{cases}$$

On considère l'opérateur L , défini sur $\bar{\Omega}$ par :

$$L = [\varphi(x)]^\sigma \Delta^{k_1} + (-1)^{k_1-k_2} a(x) \Delta^{k_2},$$

où $\sigma \in \mathbb{R}_+$, k_1 et k_2 sont deux entiers positifs tels que $k_1 > k_2$ et $a(x)$ est continue jusqu'au bord.

1.1. $\sigma > 2(k_1 - k_2)$.

On suppose que $a(x) > 0$, pour tout $x \in \Gamma$. L'opérateur L vérifie les conditions suivantes :

C_1 Ellipticité à l'intérieur de Ω :

$$(\forall x \in \Omega) (\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) ([\varphi(x)]^\sigma (\sum_{i=1}^n \xi_i^2)^{k_1} \neq 0).$$

C_2

$$(\forall x'_0 \in \Gamma) (\forall x \in \bar{\Omega}) (\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) ([\varphi(x)]^\sigma (\sum_{i=1}^n \xi_i^2)^{k_1} + a(x'_0) (\sum_{i=1}^n \xi_i^2)^{k_2} \neq 0).$$

Soit $B = \{B_j ; j = 1, \dots, k_2\}$ un système d'opérateurs frontière qui recouvre Δ^{k_2} (par exemple le système de Dirichlet d'ordre k_2). Alors, si m_j est l'ordre de B_j , pour $j=1, \dots, k_2$, on a le résultat suivant :

Théorème 1.1.

Soit $H_\pi(\Omega) = \{u \mid u \in H^{2k_2}(\Omega) \text{ et } \varphi^\sigma D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 2k_1\}$.

L'opérateur $(L ; B)$ est un opérateur à indice de $H_\pi(\Omega)$ dans

$$L^2(\Omega) \times \prod_{j=1}^{k_2} H^{2k_2-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

(ce théorème résultera de l'étude générale faite plus loin).

Remarque : Si $a(x) = 0$ pour tout $x \in \Gamma$, on est dans le cas des opérateurs étudiés par P. Bolley et J. Camus [1].

1.2. $0 < \sigma \leq 2(k_1 - k_2)$.

L'opérateur s'écrit :

$$L = [\varphi(x)]^{2(k_1-k_2)} \Delta^{k_1} + (-1)^{k_1-k_2} a(x) \Delta^{k_2}.$$

Il appartient à la classe des opérateurs étudiés par P. Bolley et J. Camus [1]; M.I. Visik et V.V. Grušin [4] (§ 5) et N. Shimakura [2].

Dans ce cas, l'équation indicielle associée s'écrit :

$$(2k_1 + \rho) \dots (2k_2 + \rho + 1) + a(x) = 0.$$

L'opérateur L est linéaire continu de $W^{2k_1}_{\varphi^{2(k_1-k_2)}}(\Omega) = \{u \in H^{2k_2}(\Omega) ; u \in H^{2k_1}(\Omega)\}$ dans $L^2(\Omega)$.

a) $\sigma = 2(k_1 - k_2)$.

* Si, pour tout $x \in \Gamma$, $a(x) = 0$, on a $\operatorname{Re} \rho < -2k_2 - \frac{1}{2}$, pour toute racine ρ de l'équation indicielle.

Et, pour obtenir un problème à indice, il faudra se donner k_1 conditions aux limites liées à tout l'opérateur.

(ce résultat reste vrai si $a(x)$ est assez petit pour tout $x \in \Gamma$).

* Si, pour tout $x \in \Gamma$, $a(x) > 0$ est assez grand, on a : $\operatorname{Re} p \neq -2k_2 - \frac{1}{2}$, pour toute racine p de l'équation indicielle ; de plus, il y a $(k_1 - k_2)$ racines p de l'équation indicielle telles que $\operatorname{Re} p > -2k_2 - \frac{1}{2}$.

Et, pour obtenir un problème à indice, il faudra se donner k_2 conditions aux limites recouvrant Δ^{k_2} .

* Pour les autres valeurs de $a(x) > 0$, le nombre de conditions aux limites à donner pour obtenir un problème à indice varie entre k_1 et k_2 , et ces conditions sont liées à tout l'opérateur.

b) $0 < \sigma < 2(k_1 - k_2)$

Dans ce cas, pour obtenir un problème à indice, on prend k_1 conditions aux limites qui recouvrent l'opérateur Δ^{k_1} .

On peut remarquer que, dans ce cas, le signe de $a(x)$ n'intervient pas. De plus, l'ordre des opérateurs frontière est lié à σ .

§ 2. Etude d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés.

Soit Ω un ouvert très régulier de $\mathbb{R}^n$ de bord Γ . On étudie les opérateurs qui, dans un système de coordonnées locales, s'écrivent :

$$L(x; x_n; D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) x_n^{\ell_\alpha} D^\alpha,$$

avec :

$$\ell_\alpha = \max(0, q\alpha_n + q'|\alpha'| - qr),$$

où q et q' sont deux réels tels que $q > 1$, $q' > 0$,

et où r et r' sont deux entiers tels que : $0 < r \leq m$, $0 \leq r' \leq m$, avec

$$q'r' = qr.$$

On suppose que les coefficients a_α sont continus jusqu'au bord.

Pour avoir une idée de la structure de l'opérateur L , on utilise le graphe de ℓ_α en fonction de $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

C_2 : Pour tout $x'_0 \in \Gamma$, on a :

$$L_0(x'_0; x_m; \xi) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \frac{r}{r}|\alpha'| + \alpha_n \geq r}} a_\alpha(x'_0) x_n^{\alpha_n} \xi^\alpha \neq 0,$$

pour tout $x_n \geq 0$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

La condition C_2 implique, en particulier, que l'opérateur

$$L_1(x; D) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha_n = 0}} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

représenté par OAB, est quasi-elliptique sur Γ ; c'est-à-dire que, pour tout $x'_0 \in \Gamma$, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$L_1^0(x'_0; \xi) = \sum_{\frac{r}{r}|\alpha'| + \alpha_n = r} a_\alpha(x'_0) \xi^\alpha \neq 0.$$

On introduit maintenant des opérateurs frontière.

Soit μ le nombre de racines ζ de l'équation :

$$L_1^0(x'_0; \xi', \zeta) = 0, \quad \xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\},$$

telles que $\text{Im } \zeta > 0$.

On considère alors μ opérateurs frontière qui s'écrivent, dans un système de coordonnées locales :

$$B_j(x'; D) = \sum_{\frac{r}{r}|\alpha'| + \alpha_n \leq m_j} b_{j\alpha}(x') D^\alpha,$$

où les $b_{j\alpha}$ sont suffisamment régulières et $m_j \leq r-1$.

Posons :

$$B_j(x'; D) = \sum_{\frac{r}{r}|\alpha'| + \alpha_n = m_j} b_{j\alpha}(x') D^\alpha, \quad j = 1, \dots, \mu.$$

On suppose que le système des opérateurs frontière est compatible avec $L_1(x; D)$, c'est-à-dire que la condition suivante est vérifiée :

C_3 : Pour tout $x'_0 \in \Gamma$, le problème aux limites sur R_+ :

$$\begin{cases} L_1^0(x'_0; \xi', D_n) v(x_n) = 0 \\ B_j^0(x'_0; \xi', D_n) v(0) = 0 \\ j = 1, \dots, \mu \end{cases}$$

n'a pas de solution bornée non nulle sur R_+ , pour tout

$$\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}.$$

Le résultat obtenu est le suivant :

Théorème 2.1.

Si l'opérateur $L(x; D)$ est elliptique à l'intérieur de Ω et si les conditions C_1 , C_2 et C_3 sont vérifiées, alors l'opérateur

$$(L; \gamma B_j, j = 1, \dots, \mu)$$

est un opérateur à indice de $H_{\Pi}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{s_j}(\Gamma)$, avec :

$$s_j = \frac{r'}{r} (r - m_j - \frac{1}{2}).$$

(L'espace $H_{\Pi}(\Omega)$ sera décrit au paragraphe 2.2).

L'étude sera faite en plusieurs étapes.

2.1 Etude de $L(x'_0; x_n; D_{x'}, D_n)$ dans une bande $\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \delta)$:

On commence par faire une étude à une variable.

Pour tout $\tau > 0$, on définit l'espace :

$$H_{\Pi}(0, \tau) = \{u \in H^r(0, \tau) \mid D^r u \in V_q^{m-r}(0, \tau)\},$$

où :

$$V_q^{m-r}(0, \tau) = \{v \in L^2(0, \tau) \mid x_n^{qj} D_n^j v \in L^2(0, \tau); j = 0, \dots, m-r\}.$$

Pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ et tout $\tau > 0$, $L(x'_0; x_n; \xi', D_n)$ est un opérateur linéaire continu de $H_{\Pi}(0, \tau)$ dans $L^2(0, \tau)$.

Dans cette section, on étudie le problème aux limites :

$$\begin{cases} L(x'_0; x_n; \xi', D_n) u(x_n) = f(x_n) \\ B_j^0(x'_0; \xi', D_n) u(0) = \psi_j \\ j = 1, \dots, \mu. \end{cases}$$

sur un intervalle $0 \leq x_n \leq \delta$ de longueur assez petite. On construit d'abord des régularisateurs à gauche et à droite pour $|\xi'| \geq A$, avec A assez grand, puis pour $|\xi'| < A$.

2.1.1 Construction de "presque inverses" pour $|\xi'| \geq A$.

D'une manière générale, si X_1 et X_2 sont deux espaces de Banach, si Φ est un sous-espace de X_1 et si A et R sont des opérateurs linéaires continus de X_1 dans X_2 et de X_2 dans X_1 respectivement, on dira que R est un "presque inverse" relativement à (Φ, X_1, X_2) si : $AR = \text{id}_{X_2}$ et $RA = \text{id}_{\Phi}$.

1°) Etude sur $(0, \tau_1)$ ($\tau_1 < \delta$)

On étudie d'abord l'opérateur L_1^0 (représenté par le segment AB).

Proposition 2.1

Sous les conditions C_2 et C_3 , pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, l'opérateur $\mathcal{U}_1(\xi') = (L_1^0(x'_0; \xi', D_n) ; \gamma B_j^0(x'_0; \xi', D_n), j = 1, \dots, \mu)$ est un isomorphisme de $H^r(\mathbb{R}_+)$ sur $L^2(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^\mu$.

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que, si u est solution du problème :

$$\begin{cases} L_1^0(x'_0; \xi', D_n) u(x_n) = f(x_n) \\ B_j^0(x'_0; \xi', D_n) u(0) = \psi_j, \quad j = 1, \dots, \mu \end{cases}$$

on ait la majoration :

$$\sum_{j=0}^r \int_0^{+\infty} |\xi'|^{2(r-j)\frac{r'}{r}} |D_n^j u(x_n)|^2 dx_n \leq C \left\{ \int_0^{+\infty} |f(x_n)|^2 dx_n + \sum_{j=1}^{\mu} |\xi'|^{2s_j} |\psi_j|^2 \right\},$$

avec : $s_j = \frac{r'}{r} (r - m_j - \frac{1}{2})$, $j = 1, \dots, \mu$.

(La démonstration est tout à fait identique au cas elliptique.

Pour la majoration, on la fait d'abord pour $|\xi'| = 1$, puis on termine par homogénéité).

On étudie maintenant l'opérateur

$$M(x_n; D_n) = \sum_{j=0}^{m-r} a_j x_n^{qj} D_n^j,$$

avec, pour $j = 0, \dots, m-r$, $a_j = a_{(0, \dots, 0, r+j)}(x'_0)$.

Cet opérateur est représenté par AF.

On note $\Phi_q^{m-r}(0, \tau_1)$ l'espace des fonctions de $V_q^{m-r}(0, \tau_1)$ qui s'annulent au voisinage de $x_n = \tau_1$.

Proposition 2.2

Sous les conditions C_1 et C_2 , pour τ_1 assez petit, il existe un "presque inverse" R_M de $M(x_n; D_n)$ relativement à

$$(\Phi_q^{m-r}(0, \tau_1), V_q^{m-r}(0, \tau_1), L^2(0, \tau_1)).$$

Démonstration.

On fait le changement de variable : $dx_n = x_n^q dt$.

L'opérateur $M(x_n; D_n)$ est transformé en :

$$P(t; D_t) = P_0(D_t) + P_1(t; D_t),$$

avec

$$P_0(D_t) = \sum_{j=0}^D a_j D_t^j.$$

De plus, si τ_1 est assez petit, les coefficients de $P_1(t; D_t)$ sont petits dans $]-\infty, t(\tau_1)[$. On applique alors un théorème d'inversion des opérateurs à coefficients peu variables [4]. D'où l'existence d'un régularisateur pour P . Et, en revenant à la variable x_n , on obtient le "presque inverse" R_M cherché. $\square$

Pour chaque $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, on munit $H_{II}(0, \tau_1)$ de la norme définie par :

$$\|u\|_{H_{II}(0, \tau_1)}^2 = \sum_{j=0}^{m-r} \int_0^{\tau_1} |x_n^{qj} D_n^{j+r} u(x_n)|^2 dx_n + \sum_{j=0}^r \int_0^{\tau_1} |\xi'|^{2(r-j)\frac{r'}{r}} |D_n^j u(x_n)|^2 dx_n.$$

On notera $\Phi_1(0, \tau_1)$ l'espace des fonctions de $H_{II}(0, \tau_1)$ qui s'annulent au voisinage de $x_n = \tau_1$.

Pour $(v, \Psi) \in L^2(0, \tau_1) \times \mathbb{C}^\mu$, on pose $\tilde{v}$ le prolongement de v par 0 pour $x_n > \tau_1$. Soit alors u la solution du problème :

$$\mathcal{U}_1(\xi) u = (\tilde{v}; \Psi).$$

Si l'on considère u comme fonction définie sur $(0, \tau_1)$, on notera :

$$u = R_{\mathcal{U}_1} (v; \Psi).$$

Pour $(f; \Psi) \in L^2(0, \tau_1) \times \mathbb{C}^\mu$, on note :

$$R_M(f; \Psi) = (R_M f; \Psi);$$

et pour $(v; \Psi) \in V_q^{m-r}(0, \tau_1) \times \mathbb{C}^\mu$, on note :

$$M(v; \Psi) = (Mv; \Psi).$$

Alors, on obtient la :

Proposition 2.3

L'opérateur $R'_1 = R_{\mathcal{U}_1} R_M$ est un "presque inverse" de $M \mathcal{U}_1(\xi')$ relativement à $(\Phi_1(0, \tau_1), H_{II}(0, \tau_1), L^2(0, \tau_1) \times \mathbb{C}^\mu)$.

De plus, si $u = R'_1(f; \Psi)$, on a :

$$\|u\|_{H_{II}(0, \tau_1)} \leq C \left\{ \|f\|_{L^2(0, \tau_1)} + \|\Psi\| \right\},$$

où : $\|\Psi\| = \sum_{j=1}^{\mu} |\xi'|^{2s_j} |\Psi_j|^2$ et où C ne dépend pas de τ_1 ni de ξ' .

On considère maintenant l'opérateur :

$$\mathcal{U}_0(\xi') = (L(x'_0; x_n; \xi', D_n) ; \gamma B_j^0(x'_0; \xi', D_n), j = 1, \dots, \mu).$$

On a le :

Théorème 2.2

Il existe $\delta_1 > 0$ et $A > 0$ telles que, pour tout $|\xi'| \geq A$, il existe sur l'intervalle $(0, \tau_1)$, avec $\tau_1 = \delta_1 |\xi'|^{-\frac{1}{Q}}$, un "presque inverse" R_1 de $\mathcal{U}_0(\xi')$ relativement à :

$$(\Phi_1(0, \tau_1), H_{\Pi}(0, \tau_1), L^2(0, \tau_1) \times \mathbb{C}^{\mu}).$$

De plus, on a la majoration à priori :

$$\|u\|_{H_{\Pi}(0, \tau_1)} \leq C \left\{ \|f\|_{L^2(0, \tau_1)} + \|\Psi\| \right\}$$

si $u = R_1(f; \Psi)$, et où C ne dépend pas de ξ' .

Démonstration.

On écrit :

$$L(x'_0; x_n; \xi', D_n) = M(x_n; D_n) L_1^0(x'_0; \xi', D_n) + Q(x'_0; x_n; \xi', D_n);$$

et l'on montre que, pour $\varepsilon > 0$, il existe deux constantes $A > 0$ et $\delta_1 > 0$ telles que, pour tout $|\xi'| \geq A$ et tout $u \in H_{\Pi}(0, \tau_1)$, on ait :

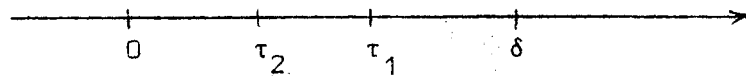
$$\|Q(x'_0; x_n; \xi', D_n)u\|_{L^2(0, \tau_1)} \leq \varepsilon \|u\|_{H_{\Pi}(0, \tau_1)}$$

Comme $M\mathcal{U}_1(\xi')$ a un "presque inverse", on en déduit que $\mathcal{U}(\xi')$ a un "presque inverse" (lemme abstrait sur les "presque inverses"). $\square$

2°) Etude sur (τ_2, δ)

On se donne δ_2 tel que $0 < \delta_2 < \delta_1$ et, pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, on pose :

$$\tau_2 = \delta_2 |\xi'|^{-\frac{1}{q}}$$



On note $\Phi_2(\tau_2, \delta)$ le sous-espace des fonctions de $H^m(\tau_2, \delta)$ qui s'annulent au voisinage de $x_n = \tau_2$ et $x_n = \delta$.

Pour chaque $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, on munit $H^m(\tau_2, \delta)$ de la norme définie par :

$$\|u\|_{H^m(\tau_2, \delta)}^2 = \sum_{j=0}^m \int_{\tau_2}^{\delta} \left| x_n^{qj \frac{m-r}{m}} (|\xi'|^{r+x_n^{q'm-qr}} |\xi'|^m)^{\frac{m-j}{m}} D_n^j u(x_n) \right|^2 dx_n.$$

Théorème 2.3

Il existe deux constantes $A > 0$ et $\delta > 0$ telles que l'opérateur $L(x'_0; x_n; \xi', D_n)$ admette, pour tout $|\xi'| \geq A$, un "presque inverse" R_2 rela-

tivement à :

$$(\Phi_2(\tau_2, \delta), H^m(\tau_2, \delta), L^2(\tau_2, \delta)).$$

De plus, on a la majoration à priori :

$$\|R_2 f\|_{H^m(\tau_2, \delta)} \leq C \|f\|_{L^2(\tau_2, \delta)},$$

où C ne dépend pas de ξ' .

Démonstration

$$\text{On pose : } h(\xi', x_n) = \left(\frac{|\xi'|^{r+x_n^{q'm-qr}} |\xi'|^m}{x_n^{q(m-r)}} \right)^{\frac{1}{m}}$$

et l'on fait le changement de variables :

$$dy = h(\xi', x_n) dx_n.$$

Ce changement transforme l'opérateur $L_0(x'_0; x_n; \xi', D_n)$ (représenté par ABEF) en un opérateur :

$$P = P_0 + P_1$$

Les coefficients de P_1 sont aussi petits que l'on veut sur $(y(\tau_2), y(\delta))$ à condition de prendre δ assez petit et A assez grand.

De plus, les coefficients de P_0 sont bornés dans $(y(\tau_2), y(\delta))$ et leurs dérivées (jusqu'à l'ordre m) sont aussi petites que l'on veut à condition de prendre δ assez petit et A assez grand.

Enfin, il existe une constante $b > 0$ telle que, si $\zeta_v(y)$, $1 \leq v \leq m$, sont les racines de $P_0(y, \zeta) = 0$, on ait :

$$|\operatorname{Im} \zeta_v(y)| \geq b, \text{ pour } y(\tau_2) < y < y(\delta).$$

Par conséquent, en vertu d'un résultat classique sur les opérateurs à coefficients peu variables (cf : [4]), il existe un "presque inverse" de P . Et, en revenant à x_n , on obtient un "presque inverse" pour $L_0(x'_0; x_n; \xi', D_n)$.

Comme la norme de l'opérateur représenté par $OAB \backslash AB$ est aussi petite que l'on veut, à condition de prendre δ assez petit et A assez grand, on montre que $L(x'_0; x_n; \xi', D_n)$ admet un "presque inverse". $\square$

3°) Conclusion : étude sur $(0, \delta)$

δ a été choisi dans le 2°).

Théorème 2.4

Pour tout $|\xi'| \geq A$, il existe des opérateurs linéaires continus R' et R'' de $L^2(0, \delta) \times \mathbb{C}^\mu$ dans $H_\Pi(0, \delta)$ tels que :

$$(i) \mathcal{U}(\xi') R' = E_2, \text{ où } E_2 \text{ est l'identité sur } L^2(0, \delta) \times \mathbb{C}^\mu$$

$$(ii) R'' \mathcal{U}(\xi') = E_1 \text{ sur } \Phi(0, \delta) = \{u \in H_\Pi(0, \delta) \mid u = 0 \text{ au voisinage de } x_n = \delta\}, \text{ où } E_1 \text{ est l'identité sur } H_\Pi(0, \delta).$$

Démonstration

Pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, on fait une partition de l'unité (ψ_1, ψ_2) subordonnée au recouvrement : $(]-\infty, \delta_1[, \delta_2, +\infty[)$ de $\mathbb{R}$.

On pose alors, pour tout $(f; \Psi) \in L^2(0, \delta) \times \mathbb{C}^\mu$:

$$R_0(f; \Psi) = \varphi_1 R_1 \varphi_1(f; \Psi) + \varphi_2 R_2 \varphi_2 f,$$

où :

$$\varphi_i(x_n) = \psi_i(x_n |\xi'|^{-1/q'}), \quad i = 1, 2.$$

Alors, on montre que, pour $|\xi'|$ assez grand, l'opérateur $\mathcal{U}(\xi') R_0 - E_2$ est de norme petite et que l'opérateur $R_0 \mathcal{U}(\xi') - E_1$, de $\Phi(0, \delta)$ dans $\Phi(0, \delta)$, est de norme petite.

On en déduit alors l'existence de R' et R'' .

Il suffit de prendre

$$\begin{aligned} R' &= R_0 (\mathcal{U}(\xi') R_0)^{-1} \\ \text{et :} \quad R'' &= (R_0 \mathcal{U}(\xi'))^{-1} R_0. \quad \square \end{aligned}$$

2.1.2 Construction d'un "presque inverse" pour $|\xi'| < A$ Théorème 2.5

Pour tout $A > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $|\xi'| < A$, l'opérateur $L(x'_0; x_n; \xi', D_n)$ ait un "presque inverse" R relativement à :

$$(\Phi(0, \delta), H_\Pi(0, \delta), L^2(0, \delta)),$$

avec :

$$\|Rf\|_{H_{\Pi}(0,\delta)} \leq C \|f\|_{L^2(0,\delta)},$$

où C ne dépend pas de ξ' .

Démonstration

MD_n^r admet un "presque inverse" R_3 relativement à
 $(\Phi(0,\delta), H_{\Pi}(0,\delta), L^2(0,\delta))$.

De plus :

$$L(x'_0; x_n; \xi', D_n) = MD_n^r + Q'(x'_0; x_n; \xi', D_n),$$

et, pour $|\xi'| < A$, QR_3 a une norme petite à condition de prendre $\delta > 0$ assez petit.

On en déduit alors que pour $|\xi'| < A$, $L(x'_0; x_n; \xi', D_n)$ admet un "presque inverse" R . ~~VII~~

2.1.3 Etude de $L(x'_0; x_n; D)$ dans la bande $R^{n-1} \times (0,\delta)$.

On définit l'espace :

$$H_{\Pi}(R^{n-1} \times (0,\delta)) = \{u \in L^2(R^{n-1} \times (0,\delta)) \mid x_n^{\alpha} D^{\alpha} u \in L^2(R^{n-1} \times (0,\delta))\}.$$

$\Phi(R^{n-1} \times (0,\delta))$ est l'espace des fonctions de $H_{\Pi}(R^{n-1} \times (0,\delta))$ qui s'annulent au voisinage de la droite $x_n = \delta$.

L'opérateur $\mathcal{U}_0 = (L(x'_0; x_n; D); \gamma B_j(x'_0; D), j = 1, \dots, \mu)$ est linéaire continu de $H_{\Pi}(R^{n-1} \times (0,\delta))$ dans

$$L^2(R^{n-1} \times (0,\delta)) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{s_j}(R^{n-1}), \text{ avec, pour } j = 1, \dots, \mu : s_j = \frac{r'}{r}(r-m_j - \frac{1}{2}).$$

Théorème 2.6

Il existe des opérateurs linéaires continus $\mathcal{R}'_0$ et $\mathcal{R}''_0$ de

$L^2(R^{n-1} \times (0,\delta)) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{s_j}(R^{n-1})$ dans $H_{\Pi}(R^{n-1} \times (0,\delta))$ tels que pour tout

$(f, g) \in L^2(R^{n-1} \times (0,\delta)) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{s_j}(R^{n-1})$ et tout $u \in \Phi(R^{n-1} \times (0,\delta))$,

on ait :

(i) $\mathcal{U}_0 \mathcal{B}'_0(f, g) = (f, g + Q(f, g))$, où Q est un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \delta)) \times \prod_{j=1}^m H^{s_j}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $H^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$.

(ii) $\mathcal{B}''_0 \mathcal{U}_0 u = u$.

Démonstration

Soit φ_A la fonction définie sur $\mathbb{R}^{n-1}$ telle que

$$\begin{aligned} \varphi_A(\xi') &= 1, \quad \text{pour } |\xi'| < A \\ \text{et :} \quad \varphi_A(\xi') &= 0, \quad \text{pour } |\xi'| \geq A. \end{aligned}$$

Si F^{-1} désigne la transformation de Fourier inverse sur $\mathbb{R}^{n-1}$ et

$\hat{\cdot}$ la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^{n-1}$, on pose :

$$\mathcal{R}'(f, g) = F^{-1} \{ (1 - \varphi_A) R'_\xi, (\hat{f}(\xi', x_n), \hat{g}(\xi')) + \varphi_A R'_\xi, \hat{f}(\xi', x_n) \}$$

et :

$$\mathcal{B}''(f, g) = F^{-1} \{ (1 - \varphi_A) R''_\xi, (\hat{f}(\xi', x_n), \hat{g}(\xi')) + \varphi_A R''_\xi, \hat{f}(\xi', x_n) \}$$

A l'aide des théorèmes 2.4 et 2.5, on montre facilement les propriétés (i) et (ii). ~~■~~

2.2 Etude de $L(x; D)$ sur l'ouvert Ω

On suppose que le recouvrement $\{U_i ; 0 \leq i \leq N\}$ de $\overline{\Omega}$ est assez fin de façon que :

- $U_0 \subset \Omega$
- Pour $1 \leq i \leq N$, U_i soit difféomorphe à une boule de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle on ait $x_n < \delta$.

On considère l'espace :

$$H_\Pi(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \phi_0 u \in H^m(\mathbb{R}^n) \text{ et } \phi_i u \in H_\Pi(\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \delta))\}$$

où $\{\phi_i ; 0 \leq i \leq N\}$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_i ; 0 \leq i \leq N\}$.

Grâce à cette partition de l'unité, on se ramène, par cartes locales, à utiliser le théorème 2.6. Et l'on obtient le résultat annoncé au théorème 2.1 (on utilise la méthode employée dans [3], § 5 et 6).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. BOLLEY et J. CAMUS : Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés à plusieurs variables
A paraître aux Mémoires de la S.M.F.
- [2] N. SHIMAKURA : Problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré.
J. Math. Kyoto Univ., Vol. 9, n° 2, 275-335 (1969).
- [3] M.I. VIŠIK et V.V. GRUŠIN : On a class of higher order degenerate elliptic equations. Math. USSR
Sbornik, Vol. 8, n° 1 (1969).
- [4] M.I. VIŠIK et V.V. GRUŠIN : Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain
Math. USSR
Sbornik, Vol. 9, n° 4 (1969).