

CLAUDE ZUILY

Hypoellipticité des opérateurs différentiels du 2e ordre à coefficients réels

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 2

« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 7, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973__2_A7_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

HYPOELLIPTICITE DES OPERATEURS DIFFERENTIELS

DU 2e ORDRE A COEFFICIENTS REELS

par

Claude ZUILY

On se propose de donner, dans cet exposé, deux conditions nécessaires et une condition suffisante d'hypoellipticité pour des opérateurs différentiels d'ordre deux à coefficients réels. Les démonstrations détaillées des résultats annoncés feront l'objet d'une publication ultérieure. Fixons tout d'abord quelques notations.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $P = P(x; \partial/\partial x)$ l'opérateur différentiel

$$(1) \quad P = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) \quad x \in \Omega$$

On notera P^0 la partie principale de P , Q la partie homogène d'ordre 1, de sorte que $P = P^0 + Q + C$.

On dira que P est non totalement dégénéré, en abrégé NTO si

$$\forall x_0 \in \Omega \quad \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x_0)| + \sum_{i=1}^n |b_i(x_0)| \neq 0$$

Pour $j = 1, \dots, n$, on notera $P^{0(j)}$ l'opérateur différentiel de symbole

$$p_j^0(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} p^0(x, \xi)$$

où $p^0(x, \xi)$ désigne le symbole de P^0 .

Enfin, $\text{Lie}(P^{0(j)}, Q)$ désignera l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs $P^{0(1)}, \dots, P^{0(n)}, Q$, c'est-à-dire le plus petit C^∞ -module contenant ces champs et stable par l'opération crochet :

$$[A, B] = AB - BA.$$

I. CONDITIONS NECESSAIRES

Théorème I.1 : Soit $P = P^0 + Q + C$ un opérateur différentiel d'ordre deux dans Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. Supposons que les coefficients de P^0 soient analytiques dans Ω à valeurs réelles et que ceux de Q ainsi que C soient dans $C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$. Alors si P est hypoelliptique dans Ω pour tout point $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{x_0}$ de x_0 , une fonction ϕ analytique dans $\mathcal{V}_{x_0}$ à valeurs réelles tels que :

$$(I.1) \quad P(x, D) = \phi(x) \mathcal{A}(x, D) + Q(x, D) + C(x) \quad x \in \mathcal{V}_{x_0}$$

où $\mathcal{A}$ est un opérateur différentiel de symbole

$$a(x, \xi) = \sum \alpha_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{V}_{x_0} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

α_{ij} analytiques et réels dans $\mathcal{V}_{x_0}$.

La démonstration de ce théorème utilise de façon essentielle le théorème 2.1 de [2] et le lemme 2.1 de [5].

Remarque I.2 : Lorsque $p^0(x, \xi) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, on prend $\phi \equiv 1$.

L'hypoellipticité de ces opérateurs a été étudiée dans [2], [1] et [6].

Mais comme le montre l'exemple de [3] et comme nous le verrons au paragraphe II, il existe des opérateurs P hypoelliptiques dont le symbole principal $p^0(x, \xi)$ change de signe d'un point x à un autre (tout en étant indépendant de ξ).

Théorème II.3 : Soit $P = P^0 + Q + C$ donné en (1). Supposons que les coefficients soient analytiques dans Ω à valeurs réelles et que P soit NTD dans Ω . Alors si P est hypoelliptique dans Ω , $\text{Lie}(P^{0(j)}, Q)$ est de rang n en tout point de Ω .

Remarque II.4 : Ce théorème a été démontré par M. Derridj dans le cas des opérateurs $P = \sum x_j^2 + X_0 + C$ de L. Hormander [2]. Ensuite O.A. Oleinik et E.V. Radkevitch ont généralisé le résultat de Derridj aux opérateurs à forme caractéristique non négative [6] par une méthode analogue. Cette méthode utilise une version due à E.C. Zachmanoglou [8] d'un lemme de Frobenius analytique de T. Nagano.

Une partie de notre démonstration utilise aussi ce lemme ainsi que des idées de [1]. Une autre partie en est différente et utilise un théorème du type Cauchy-Kovalewska, pour des opérateurs dits du type de Fuchs, récemment démontré par M.S. Baouendi et C. Goulaouic dans [0]. L'étude complète de la classe d'opérateurs introduite dans [0], du point de vue de l'hypoellipticité, sera l'objet d'un prochain travail en collaboration avec B. Helffer.

II. Condition suffisante

Nous donnons dans ce paragraphe, une classe d'opérateurs hypoelliptiques, dont le symbole principal a un signe qui dépend du point x . Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $T > 0$. On note $Q = \Omega \times]-T, T[$ et (x, t) le point générique de Q .

Soient $X_1(x; \partial/\partial x), \dots, X_r(x; \partial/\partial x)$ des champs de vecteurs dans Ω à coefficients $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On suppose

(H) $\text{Lie}\{X_1, \dots, X_r\}$ est de rang n dans Ω

On pose

$$A_j(x, t; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) = \alpha_j(x, t) t^{p_j} \{a_j(x) \frac{\partial}{\partial t} + X_j(x; \frac{\partial}{\partial x})\}$$

où $\alpha_j \neq 0$ dans Q , $\alpha_j \in C^\infty(Q, \mathbb{R})$; $a_j \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$; $p_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Théorème II.1 : Soit

$$\mathcal{K}(x, t; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) = \sum_{j=1}^r A_j^2 + \sum_{j=1}^r \beta_j A_j + \gamma, \quad \beta_j, \gamma \in C^\infty(Q, \mathbb{C}).$$

Supposons la condition (H) satisfaite, alors l'opérateur

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + t \mathcal{K}(x, t; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) \quad (x, t) \in Q$$

est hypoelliptique dans Q .

Remarque II.2 : Des résultats analogues à celui du théorème II.1, essentiellement lorsque $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x, t; \frac{\partial}{\partial x})$ est uniformément elliptique, se trouvent dans [3], [4], [7].

Donnons pour terminer un exemple d'application du théorème II.1.

Exemple : Soit $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; l'opérateur

$$L(x, t; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t} + (t - a(x))^k \left\{ a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\}$$

(où $a > 0$, $b \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$) est hypoelliptique si et seulement si $k \neq 1$.

BIBLIOGRAPHIE

- [0] M.S. BAOUENDI - C. GOULAQUIC : Colloque C.N.R.S. sur les E.D.P. :
Orsay (1972)
- [1] M. DERRIDJ : Ann. Inst. Fourier tome 21, Fas. 4 (1971)
- [2] L. HORMANDER : Acta Math 119 (1967)
- [3] Y. KANNAI : Israël Journ. of. Math, Vol. 9 n° 3 (1971)
- [4] Y. KATO : Proc. Jap. Acad. 47 (1971)
- [5] K. NIRENBERG - F. TREVES : Comm. pure and appl. Math Vol. 23
n° 3 (1970)
- [6] O.A. OLEINIK - E. V. RADKEVITCH : Russian Math. Surveys Vol. 26
n° 2 (1971)
- [7] F. TREVES : C.P.A.M. A paraître
- [8] E.C. ZACHMANO GLOU : Arch. Rat. Mech. Anal. 38 (1970)
- [9] E.C. ZACHMANO GLOU : A paraître.