

P. BOLLEY

J. CAMUS

Étude d'une classe de systèmes d'opérateurs elliptiques et dégénérés

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 2

« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 3, p. 1-46

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973__2_A3_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ETUDE D'UNE CLASSE DE SYSTEMES D'OPERATEURS ELLIPTIQUES ET DEGENERES

par

P. BOLLEY et J. CAMUS

INTRODUCTION.

On se propose d'étudier des problèmes aux limites dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ associés à des systèmes d'opérateurs elliptiques à l'intérieur, dégénérés sur le bord de cet ouvert, le bord étant caractéristique. C'est une extension de l'étude faite dans [3] dans le cas d'un seul opérateur.

Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ borné, de bord Γ . On suppose que $\bar{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞ , de bord Γ . On se donne une fonction φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) > 0\} \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) = 0\} \\ \text{grad } \varphi(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \text{ appartenant à } \Gamma. \end{cases}$$

où $\text{grad } \varphi(x)$ est le vecteur gradient de $\varphi(x)$.

Pour $i, j=1, \dots, M$ soient les opérateurs $L_{ij} \equiv L_{ij}(x; D_x)$ définis sur Ω par

$$L_{ij} u(x) \equiv L_{ij}(x; D_x) \{u(x)\} \equiv \sum_{h=0}^{\inf(s_i+t_j; \alpha_j)} P_{ij}^{s_i+t_j-h} (x; D_x) \{\varphi(x)^{\alpha_j-h} u(x)\}$$

où s_i et t_j sont des entiers de $\mathbb{Z}$, α_j sont des entiers de $\mathbb{N}$,

$P_{ij}^{s_i+t_j-h}$ sont des opérateurs aux dérivées partielles d'ordre s_i+t_j-h au

plus, avec une condition d'ellipticité pour l'opérateur matriciel

$$(P_{ij}^{s_i+t_j})_{i,j=1, \dots, M}$$

On note L l'opérateur matriciel $(L_{ij})_{i,j=1,\dots,M}$; on se propose d'étudier le problème aux limites associé à L :

$$\begin{cases} L u = f \text{ dans} \\ B u = g \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

où B est un système d'opérateurs aux dérivées partielles frontières en nombre fini, du point de vue de l'existence des solutions $u = (u_1, \dots, u_M)$ dans des espaces de Sobolev avec poids $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$ pour p entier ≥ 0 où

$$W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega) = \{u \in H^{t_j+p-\alpha_j}(\Omega) ; \varphi^{\alpha_j} u \in H^{t_j+p}(\Omega)\}.$$

Comme dans le cas elliptique, on ne peut pas se donner arbitrairement l'opérateur (L,B) pour que le problème soit bien posé ; aussi, sera-t-on amené à introduire certaines conditions sur cet opérateur. Le but essentiel de cette étude est de montrer que l'opérateur (L,B) est un opérateur à indice entre espaces convenables, le second membre $f = (f_1, \dots, f_M)$ étant dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(\Omega)$ et on montre en particulier comment l'indice dépend de p . Cette étude donne par ailleurs des résultats de régularité pour les problèmes aux limites associés. A la différence des systèmes elliptiques, il est nécessaire de faire une étude directe dans le cadre H^p , p étant un entier ≥ 0 , le nombre d'opérateurs frontières pour les problèmes aux limites associés dépendant explicitement de l'entier p .

Dans le chapitre I, on fait une étude systématique des systèmes d'opérateurs correspondant à une variable sur $\mathbb{R}_+$ (et comme corollaire sur $\mathbb{R}$). La méthode utilisée est différente de celle utilisée dans [2] pour un seul opérateur ; elle redonne évidemment les résultats de [2] pour $M=1$, mais de façon beaucoup plus élégante et sans faire appel aux résultats fins de la théorie de Fuchs.

Dans le chapitre II, on construit des estimations a priori pour les opérateurs à plusieurs variables par une technique d'homothétie à partir de théorèmes d'isomorphisme obtenus dans le chapitre I pour les opérateurs correspondant à une variable. De ces estimations a priori, on déduit les résultats d'indice.

Notons que cette même méthode permet d'étudier des systèmes d'opérateurs elliptiques et dégénérés avec une dégénérescence qui a lieu sur une hypersurface contenue dans l'ouvert, et de montrer en particulier, comme dans [5], que ces opérateurs sont partiellement hypo-elliptiques.

Cette méthode permet aussi d'établir comme dans [6] les conditions nécessaires et suffisantes de coercivité pour les formes intégral-différentielles formellement positives, dégénérées ou non, dans le cas non dégénérées, on retrouve ainsi les résultats de [7] et [8].

Le plan est le suivant :

I - UNE CLASSE DE SYSTEMES D'OPERATEURS DIFFERENTIELS, DEGENERES, ELLIPTIQUES.

- I.1. Les opérateurs.
- I.2. Le résultat.
- I.3. Etude au voisinage de $+\infty$.
- I.4. Etude au voisinage de 0.
- I.5. Démonstration du théorème I.1.
- I.6. Corollaires.

II - ETUDE D'UNE CLASSE DE SYSTEMES D'OPERATEURS AUX DERIVEES PARTIELLES, ELLIPTIQUES ET DEGENERES.

- II.1. Les estimations a priori dans le demi-espace $\mathbb{R}_+^n$ pour le cas des coefficients constants.
- II.2. Les estimations a priori dans le demi-espace $\mathbb{R}_+^n$ pour le cas des coefficients variables.
- II.3. Estimations a priori dans l'ouvert Ω .
- II.4. Existence des solutions dans les espaces $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$.

I. UNE CLASSE DE SYSTEMES D'OPERATEURS DIFFERENTIELS, DEGENERES, ELLIPTIQUES.

I.1. Les opérateurs.

Pour $i, j=1, \dots, M$, on considère les opérateurs différentiels

$L_{ij} \equiv L_{ij}(t; D_t)$ définis sur $\mathbb{R}$ par :

$$L_{ij} u(t) \equiv L_{ij}(t; D_t) \{u(t)\} \equiv \sum_{h=0}^{\min(s_i+t_j, \alpha_j)} P_{ij}^{s_i+t_j-h} (D_t) \{t^{\alpha_j-h} u(t)\}$$

où

$$(i) D_t = \frac{1}{i} \frac{d}{dt};$$

(ii) s_i et t_j sont des entiers de $\mathbb{Z}$ avec $s_i \leq 0$ (on peut toujours se ramener à cette hypothèse) ; α_j est un entier de $\mathbb{N}$;

(iii) $P_{ij}^{s_i+t_j-h} (D_t)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq s_i + t_j - h$, identiquement nul si $s_i + t_j - h < 0$, à coefficients constants complexes de la

forme :

$$P_{ij}^{s_i+t_j-h} (D_t) = \sum_{\ell=0}^{s_i+t_j-h} P_{ij\ell}^{s_i+t_j-h} D_t^\ell.$$

Ainsi, L_{ij} considéré comme un opérateur différentiel est d'ordre $\leq s_i + t_j$ en la différentiation, admet le point $t=0$ comme point singulier à l'ordre α_j ; le point à l'infini étant aussi un point singulier pour L_{ij} .

On s'intéresse au problème

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^M L_{ij} u_j(t) = f_i(t), & t \in \mathbb{R}_+ \\ i=1, \dots, M \end{cases}$$

soit en désignant par L l'opérateur matriciel (L_{ij}) , $u(t)$ le vecteur

$(u_j(t))_{1 \leq j \leq M}$ et $f(t)$ le vecteur $(f_i(t))_{1 \leq i \leq M}$, on s'intéresse au problème :

$$Lu(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Cet opérateur L induit un opérateur linéaire, continu de

$$\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+) \text{ dans } \prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+) \text{ pour tout entier } p \geq 0 \text{ où } W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+) \text{ est}$$

l'espace de Sobolev avec poids :

$$W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+) = \{u \in H^{t_j+p-\alpha_j}(\mathbb{R}_+); t^{\alpha_j} u \in H^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)\}$$

muni de la norme du graphe. (cf. [2] pour les propriétés de ces espaces).

On se propose de démontrer que sous une condition algébrique, cet opérateur L est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+)$ et de calculer cet indice qui, comme on le verra, dépend de l'entier p .

I.2. Le résultat.

On définit le polynôme déterminant $\phi(p; L) = \phi(p)$ associé à L par $\phi(p) = \det(\phi_{ij}(p - t_j + \alpha_j))$ où ϕ_{ij} est donné par :

$$\phi_{ij}(p) = \sum_{h=0}^{\min(s_i+t_j, \alpha_j)} p_{ij, s_i+t_j-h}^{s_i+t_j-h} i^{\alpha_j-h} p(p-1)\dots(p-\alpha_j+h+1).$$

Il faut noter que seul le coefficient $p_{ij, s_i+t_j-h}^{s_i+t_j-h}$ de la dérivée maximum dans l'opérateur $P_{ij}^{s_i+t_j-h}(D_t)$ intervient. Du point de vue de la théorie de Fuchs, $\phi_{ij}(p) = 0$ est l'équation déterminante de l'opérateur $\widehat{L}_{ij}$ transformé de Fourier de l'opérateur L_{ij} au point singulier à l'infini.

Cette équation est d'ailleurs liée de très près à l'équation déterminante de l'opérateur L_{ij} au point singulier $t=0$. En fait, comme on le verra, on n'a pas besoin de faire appel directement à la théorie de Fuchs.

On définit le polynôme $\psi(p) = \det(P_{ij}^{s_i+t_j}(p))$. Il faut noter que seul l'opérateur de dérivation maximum $P_{ij}^{s_i+t_j}(D_t)$ de l'opérateur L_{ij} intervient.

On note m_+ le nombre de zéros de $\psi(p)$ tels que $\text{Im } p > 0$ et r_p le nombre de zéros de $\phi(p)$ tels que $\text{Re } p > -p - \frac{1}{2}$.

Théorème I.1.

Soit p un entier ≥ 0 . Si le polynôme $\phi(p)$ n'a pas de zéro sur la droite $\text{Re } p = -p - \frac{1}{2}$ et si le polynôme $\psi(p)$ n'a pas de zéro réel, alors l'opérateur L considéré comme opérateur de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+)$ est un opérateur à indice, d'indice $\chi_p = m_+ - r_p$.

Remarque : Si une des racines ρ de l'équation $\phi(\rho) = 0$ est telle que $\operatorname{Re} \rho = -\rho - \frac{1}{2}$, on ne peut plus rien dire ; dans certains cas, l'image n'est pas fermée.

La démonstration de ce théorème sera faite en trois étapes : on fait une étude sur un voisinage de 0, puis une étude sur un voisinage de $+\infty$ et ensuite, on regroupe ces deux résultats pour obtenir l'étude globale sur $\mathbb{R}_+$.

I.3. Etude au voisinage de $+\infty$.

Proposition I.1.

Soit p un entier ≥ 0 . Si le polynôme $\psi(\rho)$ n'a pas de zéro réel, alors (pour tout T tel que $0 < T < +\infty$), l'opérateur L est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(T, +\infty)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(T, \infty)$ d'indice m_+ .

Démonstration :

(i) l'opérateur $M = (M_{ij})$ avec $M_{ij} u(t) = P_{ij}^{s_i+t_j}(D_t) \{t^{\alpha_j} u(t)\}$ est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(T, \infty)$ dans $\prod_{j=1}^M H^{p-s_j}(T, \infty)$ d'indice m_+ .

En effet, pour $T > 0$, il y a une correspondance bijective de

$\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(T, +\infty)$ dans $\prod_{j=1}^M H^{t_j+p}(T, +\infty)$ par l'application :

$$(u_1, \dots, u_M) \longrightarrow (t^{\alpha_1} u_1, \dots, t^{\alpha_M} u_M).$$

Si bien qu'il suffit de montrer que l'opérateur $N = (P_{ij}^{s_i+t_j}(D_t))$ est un

opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M H^{t_j+p}(T, \infty)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(T, \infty)$ d'indice m_+ . Or,

comme $\det (P_{ij}^{s_i+t_j}(\rho))$ n'a pas de zéro réel, ce résultat est classique (cf.

[1] par exemple) : le noyau de N est de dimension m_+ (ce sont les solutions

du noyau à décroissance exponentielle) et N est surjectif.

(ii) l'opérateur $L-M$ est un opérateur compact de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(T, \infty)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(T, +\infty)$.

En effet, l'injection $W_{\alpha_j}^{t_j+p}(T, \infty)$ dans $W_{\alpha_j-1}^{t_j+p-1}(T, \infty)$ est compacte pour $\alpha_j \geq 1$ et $L_{ij} - M_{ij}$ est linéaire et continu de $W_{\alpha_j-1}^{t_j+p-1}(T, +\infty)$ dans $H^{p-s_i}(T, \infty)$ pour $\alpha_j \geq 1$. De plus, $L_{ij} - M_{ij} = 0$ si $\alpha_j = 0$.

(iii) On en déduit que L est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(T, \infty)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(T, \infty)$ d'indice m_+ . (*)

I.4. Etude au voisinage de 0.

Proposition I.2.

Soit p un entier ≥ 0 . Si le polynôme $\phi(p)$ n'a pas de zéro sur la droite, $\text{Re } p = -p - \frac{1}{2}$, alors pour tout T tel que $0 < T < +\infty$, l'opérateur L est un opérateur à indice de :

$$\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(0, T) \text{ dans } \prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(0, T) \text{ d'indice } \sum_{i=1}^M (s_i + t_i) - r_p.$$

Démonstration :

(i) l'opérateur $P = (P_{ij})$ avec $P_{ij} u(t) = \sum_{h=0}^{t_j} p_{ij}^h D_t^{j-h} (t^{j-h} u(t))$ est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M W_{t_j}^{t_j}(0, T)$ dans $\prod_{i=1}^M L^2(0, T)$ d'indice $\sum_{j=1}^M t_j - r_0(P)$, où $r_0(P)$ est le nombre de zéros ρ vérifiant $\text{Re } \rho > -\frac{1}{2}$ du polynôme déterminant $\phi(\rho; P)$ associé à P , sous la condition que $\phi(\rho, P)$ n'ait pas de zéro situé sur la droite $\text{Re } \rho = -\frac{1}{2}$.

En effet, on fait la transformation d'Euler $\tau = \text{Log } t$ et le changement de fonctions $u_j(t) = e^{\tau/2} w_j(\tau)$; si bien que le système $Pu(t) = f(t)$ pour $t \in (0, T)$ se transforme en un système $Qw(\tau) = h(\tau)$ pour $\tau \in (-\text{Log } T, +\infty)$

(*) Pour les propriétés sur les opérateurs à indice, on renvoie à [4].

qui est un système ordinaire différentiel ordinaire, à coefficients constants, dont le déterminant caractéristique est précisément $\phi(-i\xi - \frac{1}{2}; P)$ qui est non

nul pour ξ réel (d'après l'hypothèse faite sur $\phi(\rho; P)$) ; par conséquent,

de la surjectivité de Q , de $\prod_{j=1}^M H^{t_j}(-\log T, +\infty)$ sur $\prod_{j=1}^M L^2(-\log T, +\infty)$, on

déduit la surjectivité de P de $\prod_{j=1}^M W_{t_j}^{t_j}(0, T)$ sur $\prod_{i=1}^M L^2(0, T)$, et de plus,

la dimension de l'espace des solutions du noyau de Q dans $\prod_{j=1}^M H^{t_j}(-\log T, +\infty)$

(i.e. : à décroissance exponentielle en $\tau = +\infty$) étant égale au nombre de

zéros ξ du polynôme $\phi(-i\xi - \frac{1}{2}; P)$ tels que $\text{Im } \xi > 0$ c'est-à-dire, $\sum_{j=1}^M t_j - r_0(P)$.

On en déduit que la dimension du noyau de P dans $\prod_{j=1}^M W_{t_j}^{t_j}(0, T)$ est $\sum_{j=1}^M t_j - r_0(P)$.

(ii) l'opérateur P est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M W_{t_j}^{t_j+p}(0, T)$ dans $\prod_{i=1}^M H^p(0, T)$

d'indice $\sum_{j=1}^M t_j - r_p(P)$, où $r_p(P)$ est le nombre de zéros ρ vérifiant $\text{Re } \rho > -p - \frac{1}{2}$

du polynôme $\phi(\rho; P)$, sous la condition que $\phi(\rho; P)$ n'ait pas de zéro situé sur la droite $\text{Re } \rho = -p - \frac{1}{2}$.

Pour cela, on considère l'opérateur $Q = (Q_{ij})$ avec $Q_{ij} u(t) = D_t^p P_{ij} (t^p u(t))$, c'est-à-dire qu'on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{j=1}^M W_{t_j}^{t_j+p}(0, T) & \xrightarrow{P} & \prod_{i=1}^M H^p(0, T) \\ \uparrow t^p & & \downarrow D_t^p \\ \prod_{j=1}^M W_{t_j}^{t_j+p}(0, T) & \xrightarrow{Q} & \prod_{i=1}^M L^2(0, T) \end{array}$$

La multiplication par t^p est un opérateur à indice de $W_{t_j}^{t_j+p}(0, T)$ dans $W_{t_j}^{t_j+p}(0, T)$ d'indice $-p$.

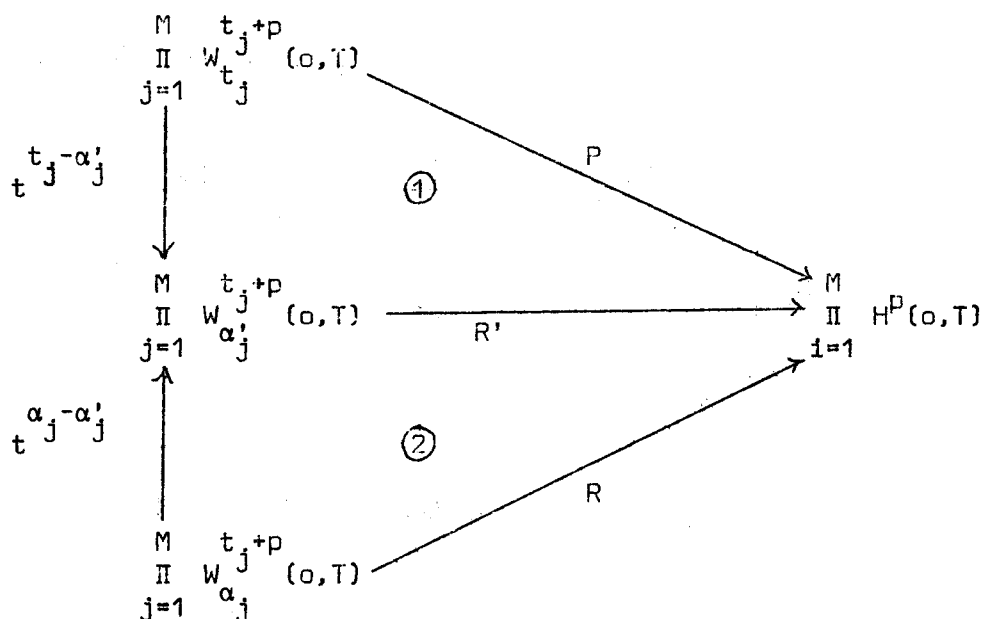
La dérivation D_t^p est un opérateur à indice de $H^p(0, T)$ dans $L^2(0, T)$ d'indice p .

L'opérateur Q est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M w_{t_j}^{t_j+p}(0,T)$ dans $\prod_{i=1}^M L^2(0,T)$ d'indice $\sum_{j=1}^M (t_j+p) - r_0(Q)$ d'après (i). Le calcul de $\phi(p; Q)$ en fonction de $\phi(p; P)$ montre que cet indice égale $\sum_{j=1}^M t_j - r_p(P)$.

Par conséquent, P est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M w_{t_j}^{t_j+p}(0,T)$ dans $\prod_{i=1}^M H^p(0,T)$ d'indice $\sum_{j=1}^M t_j - r_p(P)$.

(iii) l'opérateur $R = (R_{ij})$ avec $R_{ij} u(t) = \sum_{h=0}^{\min(t_j, \alpha_j)} p_{ij} D_t^{j-h} (t^{j-h} u(t))$ est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M w_{\alpha_j}^{t_j+p}(0,T)$ dans $\prod_{i=1}^M H^p(0,T)$ d'indice $\sum_{j=1}^M t_j - r_p(R)$, où $r_p(R)$ est le nombre de zéros ρ vérifiant $\operatorname{Re} \rho > -p - \frac{1}{2}$ du polynôme déterminant $\phi(p; R)$ associé à R , sous la condition que $\phi(p; R)$ n'ait pas de zéro situé sur la droite $\operatorname{Re} \rho = -p - \frac{1}{2}$.

Pour cela, on pose $\alpha'_j = \min(t_j, \alpha_j)$ et on considère les opérateurs $R' = (R'_{ij})$ avec $R'_{ij} u(t) = R'_{ij} (t^{\alpha'_j - \alpha_j} u(t))$ et $P = (P_{ij})$ avec $P_{ij} u(t) = R'_{ij} (t^{t_j - \alpha'_j} u(t))$, c'est-à-dire qu'on a le diagramme :



La multiplication par $t^{t_j - \alpha'_j}$ est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M w_{t_j}^{t_j+p}(0,T)$ dans $\prod_{j=1}^M w_{\alpha'_j}^{t_j+p}(0,T)$ d'indice $-\sum_{j=1}^M (t_j - \alpha'_j)$.

L'opérateur P est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M W_{t_j}^{j+p} (o, T)$ dans $\prod_{i=1}^P H^P(o, T)$ d'indice $\sum_{j=1}^M t_j - r_P(P)$ d'après (ii). Le calcul de $\phi(p; P)$ en fonction de $\phi(p; R')$ montre que cet indice égale $\sum_{j=1}^M \alpha'_j - r_P(R')$ (car $r_P(P) = r_P(R') + \sum_{j=1}^M t_j - \alpha'_j$).

Par conséquent, d'après le diagramme ①, R' est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha'_j}^{j+p} (o, T)$ dans $\prod_{i=1}^M H^P(o, T)$ d'indice $\sum_{j=1}^M t_j - r_P(R')$.

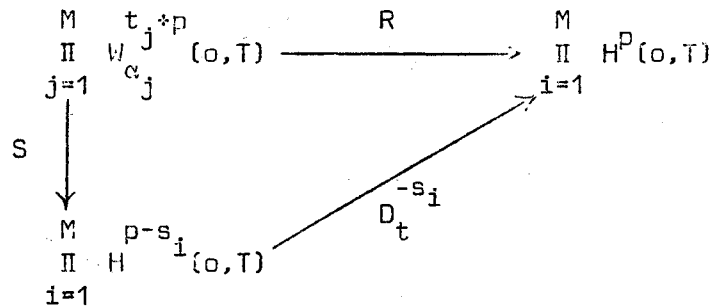
On fait la même opération avec le diagramme ② : R est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{j+p} (o, T)$ dans $\prod_{i=1}^M H^P(o, T)$ d'indice $\sum_{j=1}^M t_j - r_P(R)$.

(iv) Sous les hypothèses de la proposition 2, l'opérateur $S = (S_{ij})$ avec

$S_{ij} u(t) = \sum_{h=0}^{\min(s_i+t_j, \alpha_j)} p_{ij, s_i+t_j-h} D_t^{s_i+t_j-h} (t^{\alpha_j-h} u(t))$ est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{j+p} (o, T)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(o, T)$ d'indice $\sum_{j=1}^M (t_j - s_j) - r_P$.

(On remarquera que $\phi(p; S) = \phi(p; L) = \phi(p)$).

Pour cela, on pose $D_t^{-s_i} S_{ij} u(t) = R_{ij} u(t)$, c'est-à-dire qu'on a le diagramme :



La dérivation $D_t^{-s_i}$ est un opérateur à indice de $H^{p-s_i}(o, T)$ dans $H^P(o, T)$ d'indice $-s_i$.

L'opérateur R est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{j+p} (o, T)$ dans $\prod_{i=1}^M H^P(o, T)$ d'indice $\sum_{j=1}^M t_j - r_P(R)$ d'après (iii) ; le calcul de $\phi(p; R)$ montre qu'il est égal à $\phi(p)$; donc cet indice est égal à $\sum_{j=1}^M t_j - r_P$.

Par conséquent, S est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(0, T)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(0, T)$ d'indice $\sum_{j=1}^M (t_j + s_j) - r_p$.

(v) l'opérateur L-S est un opérateur compact de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(0, T)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(0, T)$.

En effet, L-S est un opérateur linéaire continu de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(0, T)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i+1}(0, T)$ et $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i+1}(0, T)$ s'injecte de façon compacte dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(0, T)$.

(vi) on en déduit que L est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(0, T)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(0, T)$ d'indice $\sum_{j=1}^M (t_j + s_j) - r_p$.

I.5. Démonstration du théorème I.1.

Soit T tel que $0 < T < +\infty$. On considère les opérateurs suivants :

- M : $u \longmapsto (u|_{[0, T]}, u|_{(T, \infty)})$; c'est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)$ dans $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(0, T) \times \prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(T, \infty)$ d'indice $-\prod_{j=1}^M t_j - M_p$;

- N : $(u_1, u_2) \longmapsto (Lu_1, Lu_2)$; c'est un opérateur à indice de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(0, T) \times \prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(T, \infty)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(0, T) \times \prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(T, \infty)$ d'indice $\sum_{j=1}^M (t_j + s_j) - r_p + m_+$ (d'après les propositions 1 et 2) ;

- P : $f \longmapsto (f|_{[0, T]}, f|_{(T, \infty)})$ est un opérateur à indice de $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(0, T) \times \prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(T, \infty)$ d'indice $-M_p + \sum_{i=1}^M s_i$.

Comme $N \circ M = P \circ L$, on en déduit le théorème 1.

I.6. Corollaires.

Du calcul explicite de l'indice, on déduit les résultats de régularité suivants :

Corollaire I.1.

Soient p et q deux entiers ≥ 0 . Si le polynôme $\phi(\rho)$ n'a pas de zéro dans la bande $-(p+q) - \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \rho \leq -p - \frac{1}{2}$ et si le polynôme $\psi(\rho)$ n'a pas de zéro réel alors, si u appartient à $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)$ et si Lu appartient à $\prod_{i=1}^M H^{p+q-s_i}_1(\mathbb{R}_+)$, u appartient à $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p+q}(\mathbb{R}_+)$.

De cette étude sur $\mathbb{R}_+$ et d'une étude analogue sur $\mathbb{R}$, on déduit comme en I.5 le résultat sur $\mathbb{R}$ suivant :

Corollaire I.2.

Soit p un entier ≥ 0 . Si le polynôme $\phi(\rho)$ n'a pas de zéro sur la droite, $\operatorname{Re} \rho = -p - \frac{1}{2}$ et si le polynôme $\psi(\rho)$ n'a pas de zéro réel alors, l'opérateur L , considéré comme opérateur de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R})$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}_1(\mathbb{R})$, est un opérateur à indice, d'indice $\chi_p = \sum_{j=1}^M \alpha_j - 2r_p$.

Il en résulte que le corollaire I.1 reste valable en changeant $\mathbb{R}_+$ en $\mathbb{R}$.

II. ETUDE D'UNE CLASSE DE SYSTEMES D'OPERATEURS AUX DERIVEES PARTIELLES, ELLIPTIQUES ET DEGENERES.

Dans ce chapitre, on établit des majorations a priori, les unes pour l'opérateur (L, B) , les autres pour l'opérateur transposé ; moyennant un lemme abstrait, on en déduit l'existence de l'indice, puis des conséquences de ce résultat. De telles majorations a priori sont d'abord établies dans le cas du demi-espace pour des opérateurs à coefficients constants à partir des résultats obtenus dans le chapitre I pour les opérateurs correspondants à une variable sur $\mathbb{R}_+$, puis avec l'artifice de Korn et avec des cartes locales, on les transporte sur un ouvert Ω régulier.

C'est la méthode utilisée dans [3], dans le cas d'un seul opérateur. Plusieurs difficultés techniques dues aux systèmes apparaissent, et pour faciliter la tâche du lecteur, on donne les calculs correspondants.

II.1. Les estimations a priori dans le demi-espace $\mathbb{R}_+^n$ pour le cas des coefficients constants.

II.1.1. Notations et hypothèses.

Pour $i, j=1, \dots, M$, soient les opérateurs $L_{ij} \equiv L_{ij}(x_n; D_{x'}, D_{x_n})$ définis sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$L_{ij} u(x) \equiv L_{ij}(x_n; D_{x'}, D_{x_n}) \{u(x)\} \equiv \sum_{h=0}^{\inf(s_i+t_j, \alpha_j)} P_{ij}^{s_i+t_j-h} (D_{x'}, D_{x_n}) \{x_n^{\alpha_j-h} u(x)\}$$

où

$$(i) \quad (D_{x'}, D_{x_n}) = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

(ii) s_i et t_j sont des entiers de $\mathbb{Z}$; on suppose $s_i \leq 0$ et $t_j \geq 0$ (on peut se ramener à ce cas).

(iii) α_j sont des entiers de $\mathbb{N}$.

(iv) $P_{ij}^{s_i+t_j-h} (D_{x'}, D_{x_n})$ est un opérateur aux dérivées partielles, à

coefficients constants complexes, homogène d'ordre $s_1 + t_j - h$, ou identiquement nul (si $s_1 + t_j - h$ est < 0 , $P_{ij}^{s_1+t_j-h}(D_{x'}, D_{x_n})$ est l'opérateur identiquement nul) :

$$P_{ij}^{s_1+t_j-h}(D_{x'}, D_{x_n}) = \sum_{|\alpha|+l=s_1+t_j-h} P_{ij,l,\alpha}^{s_1+t_j-h} D_{x'}^\alpha D_{x_n}^l$$

(où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ appartient à $\mathbb{N}^{n-1}$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}$).

On note L l'opérateur matriciel $(L_{ij})_{1 \leq i, j \leq M}$: cet opérateur induit, pour tout entier $p \geq 0$, une application linéaire et continue de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)$ où $W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$ est l'espace de Sobolev avec poids $\{u \in H^{t_j+p-\alpha_j}(\mathbb{R}_+^n), x_n^{\alpha_j} u \in H^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)\}$ muni de la norme canonique (pour les propriétés classiques de ces espaces, on renvoie à [3]).

Par transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^{n-1}$ par rapport aux variables tangentielles $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, l'opérateur L est transformé en un opérateur $L(x_n; \xi', D_{x_n})$ qui est l'opérateur matriciel $(L_{ij}(x_n; \xi', D_{x_n}))$ où chaque opérateur $L_{ij}(x_n; \xi', D_{x_n})$ est un opérateur différentiel ordinaire en x_n , dépendant du paramètre ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$ et défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$L_{ij}(x_n; \xi', D_{x_n}) \{v(x_n)\} = \sum_{h=0}^{\inf\{s_1+t_j, \alpha_j\}} P_{ij}^{s_1+t_j-h}(\xi', D_{x_n}) \{x_n^{\alpha_j-h} v(x_n)\}.$$

L'opérateur $L(x_n; \xi', D_{x_n})$ appartient à la classe des opérateurs étudiés en I. Ceci nous amène à définir les conditions $H_0(\mathbb{R}_+^n)$, $H_1(p; \mathbb{R}_+^n)$, $H_2(p; \mathbb{R}_+^n)$, $H_3(p; \mathbb{R}_+^n)$ suivantes :

$H_0(\mathbb{R}_+^n)$: pour tout (ξ', ρ) appartenant à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, le polynôme $\det(P_{ij}^{s_1+t_j}(\xi', \rho))$ est non nul et pour tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ le nombre $m_+(\xi')$ de zéros à partie imaginaire > 0 du polynôme $\det(P_{ij}^{s_1+t_j}(\xi', \rho))$ en ρ est constant et égal à m_+ .

Pour chaque entier $p \geq 0$, on pose :

$H_1(p; \mathbb{R}_+^n)$: le polynôme $\phi(p) = \det(\phi_{ij}(p-t_j+\alpha_j))$ où $\phi_{ij}(p) = \frac{\inf(s_1+t_j, \alpha_j)}{\sum_{h=0}^{s_1+t_j-h} \alpha_j-h} p(p-1) \dots (p-\alpha_j+h+1)$ n'a pas de zéro p sur la droite $\operatorname{Re} p = -p - \frac{1}{2}$.

On désigne par r_p le nombre de zéros p du polynôme $\phi(p)$ tels que $\operatorname{Re} p > -p - \frac{1}{2}$ et on pose :

$H_2(p; \mathbb{R}_+^n)$: le nombre $\chi_p = m_+ - r_p$ est ≥ 0 .

Etant donné u appartenant à $W_{\alpha_j}^{j+p}(\mathbb{R}_+^n)$, on lui associe t_j+p traces généralisées définies pour x' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$ par :

$$\gamma_q u(x') = \begin{cases} D_{x_n}^q u(x') \text{ pour } q=0, \dots, t_j+p-\alpha_j-1 \text{ si } 0 \leq \alpha_j < t_j+p \\ (-1)^{-q-1} \int_0^{+\infty} x_n^{-q-1} u(x', x_n) dx_n \text{ pour } q=-\alpha_j, \dots, \min(-1, t_j+p-\alpha_j-1) \\ \text{si } 1 \leq \alpha_j. \end{cases}$$

On note $\gamma u = (\gamma_{-\alpha_j} u, \dots, \gamma_{t_j+p-\alpha_j-1} u)$; l'application $\gamma : u \rightarrow \gamma u$ est linéaire, continue et surjective de

$$W_{\alpha_j}^{j+p}(\mathbb{R}_+^n) \text{ sur } \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} H_{t_j+p-\alpha_j-q-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

On définit maintenant les opérateurs frontière. Lorsque χ_p est $\neq 0$, pour $i=1, \dots, \chi_p$, $j=1, \dots, M$ soient les opérateurs $B_{ij}^p \equiv B_{ij}^p(D_{x'})$ définis par :

$$B_{ij}^p \gamma u = \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} B_{ijq}(D_{x'}) \gamma_q u$$

où $B_{ijq}(D_{x'})$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients complexes, homogène d'ordre $\sigma_1 + t_j - \alpha_j - q$ ou identiquement nul, si $\sigma_1 + t_j - q$ est < 0 , $B_{ijq}(D_{x'})$ est l'opérateur identiquement nul, σ_1 étant un entier de $\mathbb{Z}$ tel que $\sigma_1 \leq p-1$.

On note $B_p \gamma$ l'opérateur matriciel $(B_{ij}^p \gamma)_{i=1, \dots, \chi_p; j=1, \dots, M}^p$: cet opérateur induit une application linéaire et continue de

$$\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{j+p}(\mathbb{R}_+^n) \text{ dans } \prod_{i=1}^{\chi_p} H_{p-\sigma_1-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Par transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^{n-1}$, l'opérateur $B_p \gamma$ est transformé en un opérateur $B_p(\xi') \gamma$ qui est l'opérateur matriciel $(B_{ij}^p(\xi') \gamma)$ où chaque opérateur $B_{ij}^p(\xi') \gamma$ dépend du paramètre ξ' de $\mathbb{R}^{n-1}$ et est défini par :

$$B_{ij}^p(\xi') \gamma u = \sum_{q=-\infty}^{t_j+p-\alpha_j-1} B_{ijq}(\xi') \gamma_q u.$$

On pose enfin :

$H_3(p; \mathbb{R}_+^n)$: pour tout ω appartenant à la sphère unité S_{n-2} de $\mathbb{R}^{n-1}$, le problème aux limites :

$$\begin{cases} L(x_n; \omega, D_{x_n}) v(x_n) = 0 \\ B_p(\omega) \gamma v = 0 \end{cases}, \text{ si } x_p > 0$$

ou

$$L(x_n; \omega, D_{x_n}) v(x_n) = 0, \text{ si } x_p = 0$$

n'admet que la solution $v = 0$ dans $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$

II.1.2. Enoncé des résultats.

Pour tout entier $p \geq 0$, on considère l'opérateur $\mathcal{P}_p^\infty$ défini sur $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$ par :

$$\mathcal{P}_p : u \longrightarrow \mathcal{P}_p u = \begin{cases} (Lu, B_p \gamma u) & \text{si } x_p > 0 \\ Lu & \text{si } x_p = 0 \end{cases}$$

C'est un opérateur linéaire et continu de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}_1(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{i=1}^{X_p} H^{p-s_i-\frac{1}{2}}_1(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp. $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}_{j=1}(\mathbb{R}_+^n)$) si $x_p > 0$ (resp. $x_p = 0$).

On désigne enfin par $[H^{p-s_i}_1(\mathbb{R}_+^n)]'$ (resp. $[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)]'$) le dual de $H^{p-s_i}_1(\mathbb{R}_+^n)$ (resp. $W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$). L'opérateur adjoint $\mathcal{P}_p^*$ de $\mathcal{P}_p$ est un opérateur linéaire et continu de $\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}_1(\mathbb{R}_+^n)]' \times \prod_{j=1}^{X_p} [H^{p-s_j+\frac{1}{2}}_1(\mathbb{R}^{n-1})]$ (resp. $\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}_1(\mathbb{R}_+^n)]'$) dans $\prod_{j=1}^M [W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)]'$ si $x_p > 0$ (resp. $x_p = 0$).

On désigne enfin par j_{p-s_1} l'isomorphisme canonique de $[H^{p-s_1}(\mathbb{R}_+^n)]'$ sur $H_0^{-p+s_1}(\mathbb{R}^n)$ espace des distributions de $H^{-p+s_1}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{\mathbb{R}_+^n}$.

On a alors les théorèmes suivants :

Théorème II.1.

Soit un entier $p \geq 0$. On suppose que les conditions $H_0(\mathbb{R}_+^n)$, $H_1(p; \mathbb{R}_+^n)$, $H_2(p; \mathbb{R}_+^n)$, $H_3(p; \mathbb{R}_+^n)$ sont réalisées. Alors, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout u appartenant à $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$ on ait :

$$\|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq c \left\{ \left\| \mathcal{S}_p u \right\|_{\prod_{i=1}^M H^{p-s_1}(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{i=1}^{X_p} H^{p-s_1-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}_+^n)} \right\}$$

$$(\text{resp. } \|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq c \left\{ \left\| \mathcal{S}_p u \right\|_{\prod_{i=1}^M H^{p-s_1}(\mathbb{R}_+^n)} + \|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}_+^n)} \right\})$$

si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$).

Remarque II.1.

Le terme $\|u_j\|_{W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}_+^n)}$ figurant dans le terme complémentaire des estimations précédentes peut être remplacé par $\|u_j\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}_+^n)}$ lorsque $\alpha_j < t_j + p$ et par $\|x_n^{\alpha_j} u_j\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}$ lorsque $\alpha_j \geq t_j + p$.

Théorème II.2. Soit un entier $p \geq 0$. On suppose que les conditions $H_0(\mathbb{R}_+^n)$, $H_1(p; \mathbb{R}_+^n)$, $H_2(p; \mathbb{R}_+^n)$, $H_3(p; \mathbb{R}_+^n)$ sont réalisées. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout (f, g) (resp. f) appartenant à

$$\prod_{i=1}^M [H^{p-s_1}(\mathbb{R}_+^n)]' \times \prod_{i=1}^{X_p} H^{-p+s_1+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \quad (\text{resp. } \prod_{i=1}^M [H^{p-s_1}(\mathbb{R}_+^n)]')$$

si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$) on ait :

$$\left\| (f, g) \right\|_{\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)]} \times \prod_{i=1}^{x_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \leq C \left\{ \left\| \mathcal{S}_p^*(f, g) \right\|_{\prod_{j=1}^M [W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)]} + \sum_{i=1}^M \left\| j_{p-s_i} f \right\|_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R}^n)} + \left\| g \right\|_{\prod_{i=1}^{x_p} H^{-p+\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \right\}$$

$$\left(\text{resp. } \left\| f \right\|_{\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)]} \leq C \left\{ \left\| \mathcal{S}_p^* f \right\|_{\prod_{j=1}^M [W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)]} + \sum_{i=1}^M \left\| j_{p-s_i} f \right\|_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R}^n)} \right\} \right)$$

II.1.3. Démonstration du théorème II.1.

On suppose $\chi_p > 0$. Les hypothèses $H_0(\mathbb{R}_+^n)$, $H_1(p; \mathbb{R}_+^n)$, $H_2(p; \mathbb{R}_+^n)$, $H_3(p; \mathbb{R}_+^n)$ impliquent que pour tout ω appartenant à S_{n-2} le couple d'opérateurs $\mathcal{P}_p(\omega) \equiv (L(x_n; \omega, D_{x_n}), B_p(\omega) \gamma)$ réalise un isomorphisme de $\prod_{i=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)$ sur $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+) \times C^{x_p}$. La sphère S_{n-2} étant compacte, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout ω appartenant à S_{n-2} et pour tout v appartenant à $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)$ on ait :

$$\sum_{j=1}^M \sum_{\ell=0}^{t_j+p} \left\| D_s^\ell (s^{\alpha_j} v_j) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq C \left\{ \sum_{i=1}^{x_p} \left\| \sum_{j=1}^M L_{ij}(s; \omega, D_s) \{v_j(s)\} \right\|_{H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+)} + \sum_{i=1}^{x_p} \left| \sum_{j=1}^M B_{ij}^p(\omega) \gamma u_j \right| \right\}$$

Pour u_j appartenant à $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ et ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$, on pose : $v_j(s) = u_j(x_n)$ avec $s = x_n |\xi'|$.

On vérifie que l'on a les relations :

$$D_s^\ell (s^{\alpha_j} v_j(s)) = |\xi'|^{\alpha_j - \ell} D_{x_n}^\ell (x_n^{\alpha_j} u_j(x_n)) \text{ pour } \ell=0, \dots, t_j+p.$$

$$L_{ij}(s, \omega, D_s) \{v_j(s)\} = |\xi'|^{\alpha_j - s_i - t_j} L_{ij}(x_n; \xi', D_{x_n}) \{u_j(x_n)\} \text{ avec } \omega = \xi' / |\xi'| \text{ pour } i, j=1, \dots, M.$$

$$B_{ijq}(\omega) = |\xi'|^{q - \sigma_i - t_j + \alpha_j} B_{ijq}(\xi') \text{ pour } i=1, \dots, x_p, j=1, \dots, M \text{ et}$$

$$q = -\alpha_j, \dots, t_j + p - \alpha_j - 1$$

$$\gamma_q v_j = |\xi'|^{-q} \gamma_q u_j \text{ pour } q = -\alpha_j, \dots, t_j + p - \alpha_j - 1.$$

Par suite, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$ et u appartenant à $(\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+))^M$ on ait :

$$\sum_{j=1}^M \sum_{l=0}^{t_j+p} |\xi'|^{\alpha_j - l + \frac{1}{2}} \|D_{x_n}^l (x_n^{\alpha_j} u_j(x_n))\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq$$

$$C \left\{ \sum_{i=1}^M \sum_{l=0}^{p-s_i} |\xi'|^{-l + \frac{1}{2}} \left\| \sum_{j=1}^M |\xi'|^{\alpha_j - s_i - t_j} D_{x_n}^l L_{1j}(x_n; \omega, D_{x_n}) \{u_j(x_n)\}\right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{X_p} \left| \sum_{j=1}^M \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} |\xi'|^{-\sigma_i - t_j + \alpha_j} B_{1jq}(\xi') \gamma_q u_j \right| \right\}$$

Cette relation est aussi valable évidemment si l'on remplace $u_j(x_n)$ par $|\xi'|^{-\alpha_j + t_j + p - \frac{1}{2}} u_j(x_n)$. Ce qui donne :

$$\sum_{j=1}^M \sum_{l=0}^{t_j+p} |\xi'|^{t_j+p-l} \|D_{x_n}^l (x_n^{\alpha_j} u_j(x_n))\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq$$

$$C \left\{ \sum_{i=1}^M \sum_{l=0}^{p-s_i} |\xi'|^{-s_i - l + p} \left\| \sum_{j=1}^M D_{x_n}^l L_{1j}(x_n; \omega, D_{x_n}) \{u_j(x_n)\}\right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{X_p} \left| \sum_{j=1}^M \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} |\xi'|^{-\sigma_i + p - \frac{1}{2}} B_{1jq}(\xi') \gamma_q u_j \right| \right\}$$

Ainsi, pour tout u appartenant à $(\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+^n))^M$ et tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$ on a :

$$\sum_{j=1}^M \sum_{l=0}^{t_j+p} |\xi'|^{t_j+p-l} \|D_{x_n}^l (x_n^{\alpha_j} \hat{u}_j(\xi', x_n))\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq$$

$$C \left\{ \sum_{i=1}^M \sum_{l=0}^{p-s_i} |\xi'|^{-s_i - l + p} \left\| \sum_{j=1}^M D_{x_n}^l L_{1j}(x_n; \omega, D_{x_n}) \{\hat{u}_j(\xi', x_n)\}\right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{X_p} \left| \sum_{j=1}^M \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} |\xi'|^{-\sigma_i + p - \frac{1}{2}} B_{1jq}(\xi') \gamma_q \hat{u}_j(\xi', \cdot) \right| \right\}$$

On intègre par rapport à ξ' dans $\mathbb{R}^{n-1}$; ce qui donne :

$$\sum_{j=1}^M \sum_{|\alpha|+l=t_j+p} \|D_{x'}^\alpha D_{x_n}^l (x_n^{\alpha_j} u)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \left\{ \sum_{i=1}^M \sum_{|\alpha|+l=p-s_i} \left\| \sum_{j=1}^M D_{x'}^\alpha D_{x_n}^l L_{1j} u_j \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{X_p} \left\| \sum_{j=1}^M B_{1j} \gamma u_j \right\|_{H^{p-\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \right\} \quad (\text{car } -\sigma_i + p - \frac{1}{2} \geq 0)$$

$$d'où \sum_{j=1}^M \|x_n^{\alpha_j} u_j\|_{H^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \left\{ \left\| \mathcal{P}_p u \right\|_{\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)} \times \prod_{i=1}^{X_p} H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) + \sum_{j=1}^M \|x_n^{\alpha_j} u_j\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \right\}.$$

On en déduit le théorème II.1. et la remarque II.1.

II.14. Démonstration du théorème II.2.

On suppose $\chi_p > 0$. L'espace $[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)]$, étant canoniquement isomorphe au sous-espace des distributions de $[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n)]$, à support dans $\overline{\mathbb{R}_+^n}$, on peut considérer l'opérateur $\mathcal{P}_p^*$ comme un opérateur linéaire et continu de $\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)] \times \prod_{i=1}^{X_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $\prod_{j=1}^M [W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)]$.

Soit (f,g) appartenant à $\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)] \times \prod_{i=1}^{X_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

On va donner l'expression de $\mathcal{P}_p^*(f,g)$ au sens de $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))^M$. Pour cela, on note L_{ij}^* l'opérateur adjoint formel de L_{ij} dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, B_{ijq}^* l'adjoint formel de B_{ijq} dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$, $\delta(x_n)$ la distribution de Dirac en la variable x_n , concentrée à l'origine et enfin $Y(x_n)$ la fonction de Heaviside en la variable x_n (i.e. $Y(x_n) = 1$ pour $x_n > 0$, $Y(x_n) = 0$ pour $x_n \leq 0$).

Soit φ appartenant à $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n))^M$. Par définition de $\mathcal{P}_p^*(f,g)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_p^*(f,g), \overline{\varphi} \rangle_{\mathbb{R}_+^n} &= \left\langle \prod_{j=1}^M [W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)] \times \prod_{j=1}^{X_p} W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n), \overline{\varphi} \right\rangle_{\mathbb{R}_+^n} \\ &= \langle (f,g), \overline{\mathcal{P}_p \varphi} \rangle_{\mathbb{R}_+^n} \\ &= \left[\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)] \times \prod_{i=1}^{X_p} H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \right] \\ &\quad \times \left[\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{i=1}^{X_p} H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^M \langle f_i, \sum_{j=1}^M L_{ij} \overline{\varphi_j} \rangle [H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)]' \times H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n) + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{X_p} \langle g_i, \sum_{j=1}^M \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} \overline{B_{ijq} \gamma_q u_j} \rangle H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \times H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \langle L_{ij}^* j_{p-s_i} f_i, \overline{\varphi_j} \rangle \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) + \sum_{i=1}^{X_p} \sum_{j=1}^M \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} (-1)^{-q-1} \langle \\
 &\quad \langle B_{ijq}^* g_i \otimes x_n^{-q-1} Y(x_n), \overline{\varphi_j} \rangle \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{X_p} \sum_{j=1}^M \sum_{q=0}^{\max(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} i^{-q} \langle B_{ijq}^* g_i \otimes \delta^{(q)}(x_n), \overline{\varphi_j} \rangle \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)
 \end{aligned}$$

d'où l'on en déduit l'expression de $\mathcal{P}_p^*(f, g)$ dans $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))^M$.

Les hypothèses $H_0(\mathbb{R}_+^n)$, $H_1(p; \mathbb{R}_+^n)$, $H_2(p; \mathbb{R}_+^n)$, $H_3(p; \mathbb{R}_+^n)$ impliquent que l'opérateur adjoint $\mathcal{P}_p^*(\omega)$ de l'opérateur $\mathcal{P}_p(\omega)$ est un isomorphisme de

$\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)]' \times \mathbb{C}^{X_p}$ sur $\prod_{j=1}^M [W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)]'$. Pour (f, g) appartenant à $\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)]' \times \mathbb{C}^{X_p}$, $\mathcal{P}_p^*(\omega)(f, g)$ considéré comme élément de $\prod_{j=1}^M [W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R})]'$ a pour composante d'ordre j

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}_p^*(\omega)(f, g))_j &= \sum_{i=1}^M L_{ij}^*(x_n, \omega, D_{x_n}) \{j_{p-s_i} f_i\} + \sum_{i=1}^{X_p} \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} (-1)^{-q-1} \\
 &\quad B_{ijq}^*(\omega) g_i x_n^{-q-1} Y(x_n) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{X_p} \sum_{q=0}^{\max(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} i^{-q} B_{ijq}^*(\omega) g_i \delta^{(q)}(x_n).
 \end{aligned}$$

où j_{p-s_i} désigne ici l'isomorphisme canonique de $[H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)]'$ sur $H_0^{-p+s_i}(\mathbb{R})$.

La compacité de la sphère unité S_{n-2} implique l'existence d'une constante $c > 0$ telle que pour tout w appartenant à S_{n-2} et pour tout (f, g) appartenant à $\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)]' \times \mathbb{C}^{X_p}$, on ait :

$$\begin{aligned}
 (*) \quad \sum_{i=1}^M \|f_i\|_{[H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+)]} + \sum_{i=1}^{X_p} |g_i| \leq C \left\{ \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M L_{ij}^*(s; \omega, D_s) \{j_{p-s_i} f_i\} + \right. \\
 + \sum_{i=1}^{X_p} \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} (-1)^{-q-1} B_{ijq}^*(\omega) g_i s^{-q-1} Y(s) + \\
 \left. + \sum_{j=1}^{X_p} \sum_{q=0}^{\max(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} i^{-q} B_{ijq}^*(\omega) g_i \delta^{(q)}(s) \right\} \Big|_{[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)]}.
 \end{aligned}$$

Soit maintenant (f, g) appartenant à $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n))^M \times (\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}))^{X_p}$ et soit la distribution T_j composante d'ordre j de $\mathcal{S}_p^*(f, g)$:

$$\begin{aligned}
 T_j &= \sum_{i=1}^M L_{ij}^*(j_{p-s_i} f_i) + \sum_{i=1}^{X_p} \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} (-1)^{-q-1} B_{ijq}^* g_i \otimes x_n^{-q-1} Y(x_n) + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{X_p} \sum_{q=0}^{\max(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} i^{-q} B_{ijq}^* g_i \otimes \delta^{(q)}(x_n) \\
 &= \sum_{i=1}^M L_{ij}^*(j_{p-s_i} f_i) + \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} (-1)^{-q-1} \left(\sum_{i=1}^M B_{ijq}^* g_i \right) \otimes x_n^{-q-1} Y(x_n) + \\
 &\quad + \sum_{q=0}^{\max(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} i^{-q} \left(\sum_{i=1}^{X_p} B_{ijq}^* g_i \right) \otimes \delta^{(q)}(x_n)
 \end{aligned}$$

(on remarquera que dans ce cas $j_{p-s_i} f_i$ n'est autre que $\tilde{f}_i$, prolongement par 0 pour $x_n < 0$ de f_i ; et ainsi $j_{p-s_i} f_i = \tilde{f}_i$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$).

Pour tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, la distribution en x_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned}
 \hat{T}_j(\xi', x_n) &= \sum_{i=1}^M L_{ij}^*(x_n; \xi', D_{x_n}) (\widehat{j_{p-s_i} f_i}(\xi', x_n)) + \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} (-1)^{-q-1} \\
 &\quad \sum_{i=1}^{X_p} B_{ijq}^*(\xi') \hat{g}_i(\xi') x_n^{-q-1} Y(x_n) + \sum_{q=0}^{\min(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} i^{-q} \\
 &\quad \sum_{i=1}^{X_p} B_{ijq}^*(\xi') \hat{g}_i(\xi') \delta^{(q)}(x_n).
 \end{aligned}$$

appartient à $\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}) \right]'$. On désigne par $H_{\xi'}$, l'homothétie : $H_{\xi'} : x_n \rightarrow s=x_n |\xi'|$ pour ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$. On note $H_{\xi'}, \hat{T}_j(\xi', \dots)$ la distribution en s définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\langle H_{\xi'}, \hat{T}_j(\xi', \dots), \alpha(s) \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R})} = \langle \hat{T}_j(\xi', \dots), \alpha(x_n |\xi'|) \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R})}$$

pour toute fonction α de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pour tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, on a :

$$\begin{aligned} H_{\xi'}, \hat{T}_j(\xi', \dots) &= \sum_{i=1}^M |\xi'|^{s_i+t_j-\alpha_j-1} L_{ij}^*(s; \omega, D_s) \{ \widehat{j_{p-s_i} f_i}(\xi', \frac{s}{|\xi'|}) \} + \\ &+ \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} (-1)^{-q-1} \sum_{i=1}^{X_p} |\xi'|^{\sigma_i+t_j-\alpha_j} B_{ijq}^*(\omega) \hat{g}_i(\xi') s^{-q-1} Y(s) \\ &+ \sum_{j=1}^{X_p} \sum_{q=0}^{\max(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} (-1)^{-q} |\xi'|^{\sigma_i+t_j-\alpha_j} B_{ijq}^*(\omega) \hat{g}_i(\xi') \delta^{(q)}(s), \end{aligned}$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

On applique l'inégalité (*) à $((|\xi'|^{s_i-1} \widehat{j_{p-s_i} f_i}(\xi', \frac{s}{|\xi'|}))_{i=1, \dots, M}; (|\xi'|^{\sigma_i} \hat{g}_i(\xi'))_{i=1, \dots, X_p})$; ce qui donne :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M |\xi'|^{s_i-1} \|\widehat{j_{p-s_i} f_i}(\xi', \frac{s}{|\xi'|})\|_{H^{-p+s_i}(\mathbb{R})} + \sum_{i=1}^{X_p} |\xi'|^{\sigma_i} |\hat{g}_i(\xi')| &\leq \\ &\leq C \sum_{j=1}^M |\xi'|^{\alpha_j-t_j} \|H_{\xi'}, \hat{T}_j(\xi', \dots)\|_{\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}) \right]}, \end{aligned}$$

On élève au carré, on multiplie les deux membres par $|\xi'|^{-2p+1}$ et on intègre par rapport à ξ' dans $|\xi'| \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_{|\xi'| \geq 1} \sum_{i=1}^M |\xi'|^{2s_i-2p-1} \|\widehat{j_{p-s_i} f_i}(\xi', \frac{s}{|\xi'|})\|_{H^{-p+s_i}(\mathbb{R})}^2 d\xi' + \\ + \int_{|\xi'| \geq 1} \sum_{i=1}^{X_p} |\xi'|^{2\sigma_i-2p+1} |\hat{g}_i(\xi')|^2 d\xi' \\ \leq C \int_{|\xi'| \geq 1} \sum_{j=1}^M |\xi'|^{2\alpha_j-2t_j-2p+1} \|H_{\xi'}, \hat{T}_j(\xi', \dots)\|_{\left[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}) \right]}^2 d\xi' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C \sum_{j=1}^M \|T_j\|_{[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n)]} \quad (\text{cf. lemme 1.1. chap. II, [3]}) \\ &= C \| \mathcal{P}_p^*(f, g) \|_{\prod_{j=1}^M [W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n)]}, \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} &\int_{|\xi'| \geq 1} |\xi'|^{2s_1-2p-1} \left\| \widehat{j_{p-s_1} f_1(\xi', \frac{s}{|\xi'|})} \right\|_{H^{-p+s_1}(\mathbb{R})}^2 d\xi' \\ &\geq \int_{|\xi'| \geq 1} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s_1-p} |\mathcal{F}_{j_{p-s_1}} f(\xi)|^2 d\xi \\ &\int_{|\xi'| \geq 1} |\xi'|^{2\sigma_1-2p+1} |\hat{g}_1(\xi')|^2 d\xi' \geq \int_{|\xi'| \geq 1} (1+|\xi'|^2)^{\sigma_1-p+\frac{1}{2}} |\hat{g}_1(\xi')|^2 d\xi' \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^M \int_{|\xi'| \geq 1} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s_1-p} |\mathcal{F}_{j_{p-s_1}} f(\xi)|^2 d\xi + \\ &+ \sum_{i=1}^{\chi_p} \int_{|\xi'| \geq 1} (1+|\xi'|^2)^{\sigma_1-p+\frac{1}{2}} |\hat{g}_1(\xi')|^2 d\xi' \leq C \| \mathcal{P}_p^*(f, g) \|_{\prod_{j=1}^M [W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n)]}, \end{aligned}$$

Il reste donc à majorer les intégrales pour $|\xi'| \leq 1$. Tout d'abord, il est facile de vérifier que

$$\int_{|\xi'| \leq 1} (1+|\xi'|^2)^{\sigma_1-p+\frac{1}{2}} |\hat{g}_1(\xi')|^2 d\xi' \leq 2 \|g_1\|_{H^{\sigma_1-p-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}^2$$

Pour majorer $\sum_{i=1}^M \int_{|\xi'| \leq 1} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s_1-p} |\mathcal{F}_{j_{p-s_1}} f(\xi)|^2 d\xi$, on

introduit l'opérateur $\mathcal{P}_p(\omega_0)$ pour un certain ω_0 appartenant à S_{n-2} . On

applique l'inégalité (*) à la famille $((\widehat{j_{p-s_1} f_1(\xi', \dots)})_{i=1, \dots, M}$;

$(\hat{g}_1(\xi'))_{i=1, \dots, M}$) et pour $\omega = \omega_0$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 (**) \quad & \sum_{i=1}^M \left\| \widehat{j_{p-s_i} f_i(\xi', \dots)} \right\|_{H^{-p+s_i}(\mathbb{R})} + \sum_{i=1}^{\chi_p} |\hat{g}_i(\xi')| \leq \\
 & C \left\| \mathcal{P}_p^*(\omega_0) \left((\widehat{j_{p-s_i} f_i(\xi', \dots)})_{i=1, \dots, M}; (\hat{g}_i(\xi'))_{i=1, \dots, \chi_p} \right) \right\|_{\prod_{j=1}^M [W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R})]} \\
 \text{Or : } & \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s_1-p} |\mathcal{F} \widehat{j_{p-s_i} f_i(\xi)}|^2 d\xi \leq \left\| \widehat{j_{p-s_i} f_i(\xi', \dots)} \right\|_{H^{-p+s_i}(\mathbb{R})}^2
 \end{aligned}$$

et pour $|\xi'| \leq 1$:

$$\begin{aligned}
 & \left\| (\mathcal{P}_p^*(\xi') - \mathcal{P}_p^*(\omega_0)) \left((\widehat{j_{p-s_i} f_i(\xi', \dots)})_{i=1, \dots, M}; (\hat{g}_i(\xi'))_{i=1, \dots, \chi_p} \right) \right\|_{\prod_{j=1}^M [W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R})]} \\
 & \leq C \left\{ \sum_{i=1}^M \left\| \widehat{j_{p-s_i} f_i(\xi', \dots)} \right\|_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R})} + \sum_{i=1}^{\chi_p} |\hat{g}_i(\xi')| \right\}
 \end{aligned}$$

On élève au carré, on intègre par rapport à ξ' dans $|\xi'| \leq 1$, les deux membres de (**)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^M \int_{|\xi'| \leq 1} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s_1-p} |\mathcal{F} \widehat{j_{p-s_i} f_i(\xi)}|^2 d\xi \leq \\
 & C \left\{ \int_{|\xi'| \leq 1} \left\| \mathcal{P}_p^*(\xi') \left((\widehat{j_{p-s_i} f_i(\xi', \dots)})_{i=1, \dots, M}; (\hat{g}_i(\xi'))_{i=1, \dots, \chi_p} \right) \right\|_{\prod_{j=1}^M [W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R})]}^2 \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{i=1}^M \int_{|\xi'| \leq 1} \left\| \widehat{j_{p-s_i} f_i(\xi', \dots)} \right\|_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R})}^2 + \sum_{i=1}^{\chi_p} \int_{|\xi'| \leq 1} |\hat{g}_i(\xi')|^2 d\xi' \right\}
 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit (cf. lemme 1.2, chapitre II, [3]).

$$\begin{aligned}
 & \leq C \left\{ \left\| \mathcal{P}_p^*(f; g) \right\|_{\prod_{j=1}^M [W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}^n)]} + \sum_{i=1}^M \left\| \widehat{j_{p-s_i} f_i} \right\|_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R}^n)} + \right. \\
 & \quad \left. + \left\| g \right\|_{\chi_p \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{-p+\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \right\}
 \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration du théorème II.2.

II.2. Les estimations a priori dans le demi-espace $\mathbb{R}_+^n$ pour le cas des coefficients variables.

II.2.1. Notations et hypothèses.

Pour $i, j=1, \dots, M$, soient les opérateurs $L_{ij} \equiv L_{ij}(x, x_n; D_{x'}, D_{x_n})$ définis sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$L_{ij} u(x) \equiv L_{ij}(x, x_n; D_{x'}, D_{x_n})\{u(x)\} \equiv \sum_{h=0}^{\inf(s_i+t_j, \alpha_j)} P_{ij}^{s_i+t_j-h}(x; D_{x'}, D_{x_n}) \{x_n^{\alpha_j-h} u(x)\}$$

où

(i) s_i et t_j sont des entiers de $\mathbb{Z}$; on suppose $s_i \leq 0$ et $t_j \geq 0$ (on peut se ramener à ce cas).

(ii) α_j sont des entiers de $\mathbb{N}$.

(iii) $P_{ij}^{s_i+t_j-h}(x; D_{x'}, D_{x_n})$ est un opérateur aux dérivées partielles, à coefficients indéfiniment dérivables et à dérivées bornées dans $\mathbb{R}^n$,

d'ordre au plus $s_i + t_j - h$ (ou identique à 0 si $s_i + t_j - h$ est < 0) :

$$P_{ij}^{s_i+t_j-h}(x; D_{x'}, D_{x_n}) = \sum_{|\alpha|+l \leq s_i+t_j-h} P_{ij, \ell, \alpha}^{s_i+t_j-h}(x) D_{x'}^\alpha D_{x_n}^l.$$

On note L l'opérateur matriciel $(L_{ij})_{i,j=1, \dots, M}$; cet opérateur induit pour tout entier $p \geq 0$, une application linéaire continue de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)$.

A cet opérateur L , on associe l'opérateur matriciel $L^0 \equiv (L_{ij}^0)_{i,j=1, \dots, M}$ où $L_{ij}^0 \equiv L_{ij}^0(x; x_n; D_{x'}, D_{x_n})$ est défini par :

$$L_{ij}^0(x, x_n; D_{x'}, D_{x_n})\{u(x)\} \equiv \sum_{h=0}^{\inf(s_i+t_j, \alpha_j)} P_{ij, s_i+t_j-h}^{s_i+t_j-h}(x; D_{x'}, D_{x_n}) \{x_n^{\alpha_j-h} u(x)\}$$

où

$$P_{ij, s_i+t_j-h}^{s_i+t_j-h}(x; D_{x'}, D_{x_n}) = \sum_{|\alpha|+l = s_i+t_j-h} P_{ij, \ell, \alpha}^{s_i+t_j-h}(x) D_{x'}^\alpha D_{x_n}^l.$$

L'opérateur $L^0(o, x_n; D_{x'}, D_{x_n})$ est un opérateur du type étudié au paragraphe II.1. Les conditions $H_0(\mathbb{R}_+^n)$, $H_1(p; \mathbb{R}_+^n)$ et $H_2(p; \mathbb{R}_+^n)$ associés s'écrivent :

$H_0(\mathbb{R}_+^n)$: pour tout (ξ', ρ) appartenant à $\mathbb{R}^n - \{0\}$, le polynôme $\det(P_{ij, s_i+t_j}^{s_i+t_j}(o; \xi', \rho))$ est non nul et le nombre $m_+(\xi')$ de zéros à partie imaginaire > 0 du polynôme $\det(P_{ij, s_i+t_j}^{s_i+t_j}(o; \xi', \rho))$ en ρ est constant et égal à m_+ .

$H_1(p; \mathbb{R}_+^n)$: le polynôme $\phi^0(\rho) = \det(\phi_{ij}^0(\rho - t_j + \alpha_j))$ où $\phi_{ij}^0(\rho)$

$$= \sum_{h=0}^{\inf(s_i + t_j, \alpha_j)} p_{ij, s_i + t_j - h, 0}^{(0)} i^{\alpha_j - h} \rho(\rho-1) \dots (\rho - \alpha_j + h + 1) \text{ n'a pas de zéro } \rho \text{ sur la droite } \operatorname{Re} \rho = -p - \frac{1}{2}.$$

On désigne par r_p le nombre de zéros du polynôme $\phi^0(\rho)$ tel que $\operatorname{Re} \rho > -p - \frac{1}{2}$ et on pose :

$H_2(p; \mathbb{R}_+^n)$: le nombre $\chi_p = m_+ - r_p$ est ≥ 0 .

On définit maintenant les opérateurs frontière. Lorsque χ_p est > 0 , pour $i=1, \dots, \chi_p$, $j=1, \dots, M$ soient les opérateurs $B_{ij}^p \equiv B_{ij}^p(x', D_{x'})$ définis par :

$$B_{ij}^p \gamma u = \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j + p - \alpha_j - 1} B_{ijq}(x', D_{x'}) \gamma_q u,$$

où $B_{ijq}(x'; D_{x'})$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment dérivables et à dérivées bornées dans $\mathbb{R}^{n-1}$, d'ordre inférieur ou égal à $\sigma_i + t_j - \alpha_j - q$, si $\sigma_i + t_j - \alpha_j - q$ est < 0 , $B_{ijq}(x'; D_{x'})$ est l'opérateur identiquement nul, σ_i étant un entier de $\mathbb{Z}$ tel que $\sigma_i \leq p-1$.

On note $B_p \gamma$ l'opérateur matriciel $(B_{ij}^p \gamma)_{\substack{i=1, \dots, \chi_p \\ j=1, \dots, M}}$: cet opérateur induit une application linéaire et continue de

$$\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j + p}(\mathbb{R}_+^n) \text{ dans } \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p - \sigma_i - \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

A cet opérateur $B_p \gamma$ on associe l'opérateur matriciel

$$B_p^0 \gamma \equiv B_p^0(x', D_{x'}) \gamma \equiv (B_{ij}^{p0}(x', D_{x'}) \gamma)_{\substack{i=1, \dots, \chi_p \\ j=1, \dots, M}} \text{ où } B_{ij}^{p0}(x', D_{x'}) \gamma \text{ est défini par :}$$

$$B_{ij}^{p0}(x'; D_{x'}) \gamma u = \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j + p - \alpha_j - 1} B_{ijq}^{\sigma_i + t_j - \alpha_j - q}(x', D_{x'}) \gamma_q u,$$

$B_{ijq}^{\sigma_i + t_j - \alpha_j - q}(x'; D_{x'})$ étant la somme des termes d'ordre exactement $\sigma_i + t_j - \alpha_j - q$

dans l'opérateur $B_{ijq}(x'; D_{x'})$. On pose enfin :

$H_3(p; \mathbb{R}_+^n)$: pour tout ω appartenant à S_{n-2} , le problème aux limites :

$$\begin{cases} L^0(o; x_n; \omega, D_{x_n}) \{v(x_n)\} = 0 \\ B_p^0(o, \omega) \gamma v = 0 \end{cases}, \text{ si } x_p > 0$$

ou

$$\{L^0(o, x_n; \omega, D_{x_n}) \{v(x_n)\} = 0, \text{ si } x_p = 0$$

n'admet que la solution $v = 0$ dans $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)$.

II.2.2. Enoncé des résultats.

Pour tout entier $p \geq 0$, on considère l'opérateur $\mathcal{P}_p$ défini sur $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$ par :

$$\mathcal{P}_p : u \longrightarrow \mathcal{P}_p u = \begin{cases} (Lu, B_p \gamma u) & \text{si } x_p > 0 \\ Lu & \text{si } x_p = 0. \end{cases}$$

C'est un opérateur linéaire et continu de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{i=1}^M H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$, (resp. $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)$) si $x_p > 0$ (resp. $x_p = 0$).

L'opérateur adjoint $\mathcal{P}_p^*$ de $\mathcal{P}_p$ est un opérateur linéaire et continu de $\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)]' \times \prod_{j=1}^M H^{p+\sigma_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp. $\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)]'$) dans $\prod_{i=1}^M [W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)]'$ si $x_p > 0$ (resp. $x_p = 0$).

On a alors les théorèmes suivants :

Théorème II.3.

Soit un entier $p \geq 0$. On suppose que les conditions $H_0(\mathbb{R}_+^n)$, $H_1(p; \mathbb{R}_+^n)$, $H_2(p; \mathbb{R}_+^n)$, $H_3(p; \mathbb{R}_+^n)$ sont réalisées. Alors, pour tout entier $q \geq 0$ tel que le polynôme $\phi^0(\rho)$ n'ait pas de zéro ρ dans la bande $-p-q-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \rho \leq -p-\frac{1}{2}$, il existe deux constantes $\epsilon_q > 0$ et $C_q > 0$ telles que : si u appartient à $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$, si le support de u est contenu dans la boule de centre 0 et de rayon ϵ_q et si $\mathcal{P}_p u$ appartient à $\prod_{i=1}^M H^{p+q-s_i}(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{i=1}^M H^{p+q-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp. $\prod_{i=1}^M H^{p+q-s_i}(\mathbb{R}_+^n)$) alors :

(i) u appartient à $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p+q}(\mathbb{R}_+^n)$

$$(ii) \|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p+q}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C_q \left\{ \left\| \mathcal{P}_p u \right\|_{\prod_{i=1}^M H^{p+q-s_i}(\mathbb{R}_+^n)} \times \prod_{i=1}^M H^{p+q-s_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})^{\chi_p} + \left\| u \right\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p+q-1}(\mathbb{R}_+^n)} \right\}$$

$$(\text{resp. } \|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p+q}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C_q \left\{ \left\| \mathcal{P}_p u \right\|_{\prod_{i=1}^M H^{p+q-s_i}(\mathbb{R}_+^n)} + \left\| u \right\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p+q-1}(\mathbb{R}_+^n)} \right\})$$

si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$).

Remarque II.2. Lorsque $q=0$, le terme $\|u_j\|_{W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}_+^n)}$ figurant dans le terme

complémentaire $\|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}_+^n)}$ des estimations précédentes peut être

remplacé par $\|(1+x_n)^{\alpha_j} u_j\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}$ lorsque $\alpha_j < t_j + p$ et par $\|x_n^{\alpha_j} u_j\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}$

lorsque $\alpha_j \geq t_j + p$.

Théorème II.4.

Soit un entier $p \geq 0$. On suppose que les conditions $H_0(\mathbb{R}_+^n)$, $H_1(p; \mathbb{R}_+^n)$, $H_2(p; \mathbb{R}_+^n)$ et $H_3(p; \mathbb{R}_+^n)$ sont réalisées. Alors, il existe des constantes $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ telles que pour tout (f, g) (resp. f) appartenant à $\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)]' \times \prod_{i=1}^M H^{p+s_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})^{\chi_p}$ (resp. $\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)]'$) et à support contenu dans la boule de centre 0 et de rayon ε , on ait :

$$\|(f, g)\|_{\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)]' \times \prod_{i=1}^M H^{p+s_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})^{\chi_p}} \leq C \left\{ \left\| \mathcal{P}_p^*(f, g) \right\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} + \sum_{i=1}^M \|j_{p-s_i} f\|_{H^{p-s_i-1}(\mathbb{R}_+^n)} + \left\| g \right\|_{\prod_{i=1}^M H^{p+s_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})^{\chi_p}} \right\}$$

$$\left(\text{resp. } \|f\|_{\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)]} \leq C \left\{ \|\mathcal{P}_p^{*f}\|_{\prod_{j=1}^M [W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)]} + \sum_{i=1}^M \|j_{p-s_i} f_i\|_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R}^n)} \right\} \right)$$

si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$).

II.2.3. Démonstration du théorème II.3.

On suppose $\chi_p > 0$. On note $B(0, \epsilon)$ la boule de centre 0 et de rayon ϵ .

On démontre tout d'abord l'estimation a priori donnée dans le théorème 2.1, (ii) dans le cas où $q=0$. Pour cela, on applique le théorème 1.1. au couple d'opérateurs $(L^0(0, x_n; D_{x'}, D_{x_n}), B_p^0(0; D_{x'})\gamma)$: il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout u appartenant à $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$ on ait :

$$\sum_{j=1}^M \|x_n^{\alpha_j} u_j\|_{H^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \left\{ \sum_{i=1}^M \left\| \sum_{j=1}^M L_{ij}^0(0, x_n; D_{x'}, D_{x_n}) \{u_j(x)\} \right\|_{H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)} + \sum_{i=1}^M \| \sum_{j=1}^M B_{ij}^0(0; D_{x'}) \gamma u_j \|_{H^{p-s_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{j=1}^M \|x_n^{\alpha_j} u_j\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \right\}$$

(cf. la démonstration du théorème II.1).

Les coefficients des opérateurs L_{ij} et B_{ijq} étant de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, il existe une fonction $\alpha(\epsilon) > 0$ tendant vers 0 avec ϵ , telle que pour tout u appartenant à $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$ dont le support est contenu dans $B(0, \epsilon)$, on ait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^M \left\| \sum_{j=1}^M (L_{ij}^0(x, x_n; D_{x'}, D_{x_n}) - L_{ij}^0(0, x_n; D_{x_n})) \{u_j(x)\} \right\|_{H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)} \\ \leq \alpha(\epsilon) \|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} + C(\epsilon) \|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} \\ \sum_{i=1}^M \left\| \sum_{j=1}^M (B_{ij}^0(x'; D_{x'}) - B_{ij}^0(0; D_{x'})) \gamma u_j \right\|_{H^{p-s_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \\ \leq \alpha(\epsilon) \|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} + C(\epsilon) \|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} \end{array} \right.$$

Les hypothèses faites sur les coefficients des opérateurs L_{ij} et B_{ijq} impliquent l'existence d'une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout u appartenant à $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$ on ait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^M \left\| \sum_{j=1}^M (L_{ij}^0(x, x_n; D_{x'}, D_{x_n}) - L_{ij}(x, x_n; D_{x'}, D_{x_n})) \{u_j(x)\} \right\|_{H^{p-s_1}(\mathbb{R}_+^n)}^{p-s_1} \\ \leq \alpha \|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}_+^n)} \\ \sum_{i=1}^{x_p} \left\| \sum_{j=1}^M (B_{ij}^0(x', D_{x'}) - B_{ij}(x', D_{x'})) \gamma u \right\|_{H^{p-\sigma_1+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}^{p-\sigma_1+\frac{1}{2}} \leq \alpha \|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}_+^n)} \end{array} \right.$$

Des inégalités précédentes, on déduit le théorème II.3 (ii) lorsque $q=0$. La remarque II.2 se démontre en notant que pour tout $\beta > 0$, il existe $C_\beta > 0$ telle que, pour tout u appartenant à $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$, on ait :

$$\begin{aligned} \|u_j\|_{W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}_+^n)} &\leq \beta \|u_j\|_{W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} + C_\beta \|(1+x_n^{\alpha_j})u_j\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \text{ lorsque } \alpha_j < t_j + p - 1 \\ \|u_j\|_{W_{\alpha_j}^{t_j+p-1}(\mathbb{R}_+^n)} &\leq \beta \|u_j\|_{W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} + C_\beta \|x_n^{\alpha_j} u_j\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \text{ lorsque } \alpha_j \geq t_j + p - 1 \end{aligned}$$

On démontre maintenant le théorème II.3 ((i),(ii)) dans le cas où $q \geq 1$. Cette démonstration sera faite par récurrence sur q . Soit tout d'abord u appartenant à $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$ tel que son support soit contenu dans $B(o, \varepsilon)$ avec $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et tel que $\mathcal{P}_p u$ appartienne à $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{i=1}^{x_p} H^{p-\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$. On suppose de plus que le polynôme $\phi^0(p)$ n'a pas de zéro p dans la bande $-p-q-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} p \leq -p-\frac{1}{2}$.

On utilise la méthode des quotients différentiels. Pour h appartenant à $\mathbb{R}-\{0\}$ et i compris entre 1 et $n-1$, on pose :

$$\begin{aligned} \tau_{ih} v(x) &= v(x_1, \dots, x_i+h, \dots, x_n) \\ \rho_{ih} v(x) &= \frac{1}{h} (\tau_{ih} v(x) - v(x)). \end{aligned}$$

Si h satisfait à $0 < |h| < \frac{1}{2} (\epsilon_0 - \epsilon)$, les supports de $\tau_{1h} v$ et $\rho_{1h} v$ sont contenus dans $B(0, \epsilon')$ avec $\epsilon' = \epsilon + \frac{1}{2} (\epsilon_0 - \epsilon)$ dès que le support de v est contenu dans $B(0, \epsilon)$. On a :

$$L_{1j}(x, x_n; D_{x'}, D_{x_n}) \{ \rho_{1h} u_j(x) \} = \rho_{1h} (L_{1j}(x, x_n; D_{x'}, D_{x_n}) \{ u_j(x) \}) + \sum_{h=0}^{\alpha_j} \sum_{\ell=0}^{s_1+t_j-h} \sum_{|\alpha|=0}^{s_1+t_j-h-\ell} \rho_{1h} (p_{1j, \ell, \alpha}^{s_1+t_j-h}(x)) D_{x'}^{\alpha} D_{x_n}^{\ell} \{ \tau_{1h}(x_n^{\alpha_j-h} u_j(x)) \}.$$

Les hypothèses faites sur les coefficients de l'opérateur L impliquent l'existence d'une constante $\alpha > 0$, indépendante de u et de h telle que :

$$\left\| \sum_{j=1}^M L_{1j}(\rho_{1h} u_j) \right\|_{H^{p-s_1}(\mathbb{R}_+^n)} \leq \alpha \left\{ \left\| \rho_{1h} \sum_{j=1}^M L_{1j} u_j \right\|_{H^{p-s_1}(\mathbb{R}_+^n)} + \|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} \right\}$$

et de même

$$\left\| \sum_{j=1}^M B_{1j} \gamma(\rho_{1h} u_j) \right\|_{H^{p-\sigma_1-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \alpha \left\{ \left\| \rho_{1h} \sum_{j=1}^M B_{1j} \gamma u_j \right\|_{H^{p-\sigma_1-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} \right\}$$

Les estimations obtenues pour $q=0$ et complétées par la remarque

II.2 appliquées à $\rho_{1h} u$ (pourvu que $0 < \epsilon' < \epsilon_0$) donnent :

$$\left\| \rho_{1h} u \right\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C_0 \left\{ \left\| \mathcal{D}_p(\rho_{1h} u) \right\|_{\prod_{i=1}^M H^{p-s_1}(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{i=1}^{x_p} H^{p-\sigma_1-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{j=1}^M \left\| (1+x_n^{\alpha_j}) \rho_{1h} u_j \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \right\}$$

(lorsque $\alpha_j \geq t_j + p$, le terme $\left\| (1+x_n^{\alpha_j}) \rho_{1h} u_j \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}$ pouvant être remplacé par $\left\| x_n^{\alpha_j} \rho_{1h} u_j \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}$).

D'autre part, il existe une constante β , indépendante de u et de h (pourvu que h reste dans un borné fixe, par exemple $0 < |h| < 1$) telle que

$$\left\| \rho_{1h} \sum_{j=1}^M L_{1j} u_j \right\|_{H^{p-s_1}(\mathbb{R}_+^n)} \leq \beta \left\| \sum_{j=1}^M L_{1j} u_j \right\|_{H^{p-s_1+1}(\mathbb{R}_+^n)}$$

$$\left\| \rho_{1h} \sum_{j=1}^M B_{1j} \gamma u_j \right\|_{H^{p-\sigma_1-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \beta \left\| \sum_{j=1}^M B_{1j} \gamma u_j \right\|_{H^{p-\sigma_1+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Enfin, il existe une constante δ , indépendante de u et de h telle que :

$$\| (1+x_n^{\alpha_j}) \rho_{1h} u_j \|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \leq \delta \| u_j \|_{W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} \quad \text{lorsque } \alpha_j < t_j + p$$

$$\| x_n^{\alpha_j} \rho_{1h} u_j \|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \leq \delta \| x_n^{\alpha_j} u_j \|_{H_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} \quad \text{lorsque } \alpha_j \geq t_j + p.$$

En regroupant tous les résultats précédents, on déduit que $\rho_{1h} u$ demeure dans un borné de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$ lorsque h varie de sorte que $0 < |h| < \frac{1}{2} (\epsilon_0 - \epsilon)$. Il en résulte que $D_{x_i} u_j$ appartient à $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$ avec la majoration :

$$\| D_{x_i} u \|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \left\{ \| \mathcal{P}_p u \|_{\prod_{i=1}^M H^{p-s_i+1}(\mathbb{R}_+^n)} \times \prod_{i=1}^M x_p^{p-s_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+^{n-1}) + \| u \|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} \right\}$$

pour $i=1, \dots, n-1$.

Pour montrer que u appartient à $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+^n)$, il reste à établir que $D_{x_n} u$ appartient à $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$. Pour cela, on remarque que :

$$\sum_{j=1}^M \left(\sum_{h=0}^{\min(s_i+t_j, \alpha_j)} p_{ij, s_i+t_j-h, 0}(x) D_{x_n}^{s_i+t_j-h} \{ x_n^{\alpha_j-h} u_j(x) \} \right) = \sum_{j=1}^M L_{ij} u_j(x) - \sum_{j=1}^M \sum_{h=0}^{\min(s_i+t_j, \alpha_j)} \sum_{\ell=0}^{s_i+t_j, \alpha_j-h-1} \sum_{|\alpha|=0}^{s_i+t_j-h-1} p_{ij, \ell, \alpha}(x) D_{x_n}^{\alpha} D_{x_n}^{\ell} \{ x_n^{\alpha_j-h} u_j(x) \}$$

appartient à $H^{p-s_i+1}(\mathbb{R}_+^n)$ pour $i=1, \dots, M$. On écrira le premier membre sous la

forme $\sum_{j=1}^M \left(\sum_{h=0}^{\infty} p_{ij, s_i+t_j-h, 0}(x) D_{x_n}^{s_i+t_j-h} \{ x_n^{\alpha_j-h} u_j(x) \} \right)$, les coefficients

$p_{ij, s_i+t_j-h, 0}$ étant nuls à partir d'un certain rang. On dérive par rapport

à $D_{x_n}^{-s_i}$ d'où l'on en déduit que :

$\sum_{j=1}^M (\sum_{h=0}^{\infty} p_{ij, s_1+t_j-h, o}^{s_1+t_j-h} D_{x_n}^{t_j-h} \{x_n^{\alpha_j-h} u_j(x)\})$ appartient à $H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n)$ pour

$i=1, \dots, M$. Or, le déterminant $\det (p_{ij, s_1+t_j, o}^{s_1+t_j}(o))$ est non nul, d'après l'hypothèse $H_0(\mathbb{R}_+^n)$, donc la matrice $(p_{ij, s_1+t_j, o}^{s_1+t_j}(x))$ est inversible dans

$B(o, \epsilon)$ pourvu que ϵ soit suffisamment petit. Notant $P_h(x)$ la matrice des

de coefficients $p_{ij, s_1+t_j-h, o}^{s_1+t_j-h}(x)$ pour $i, j=1, \dots, M$ et $D_{x_n}^{t_j-h} \{x_n^{\alpha_j-h} u(x)\}$

le vecteur colonne de composantes $D_{x_n}^{t_j-h} \{x_n^{\alpha_j-h} u_j(x)\}$ pour $j=1, \dots, M$, on

en déduit que :

$$\sum_{h=0}^{\infty} P_o(o) P_o^{-1}(x) P_h(x) (D_{x_n}^{t_j-h} \{x_n^{\alpha_j-h} u(x)\}) \text{ appartient à } (H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n))^M$$

soit en isolant le premier terme

$$P_o(o) (D_{x_n}^{t_j} \{x_n^{\alpha_j} u(x)\}) + \sum_{h=1}^{\infty} R_h(x) (D_{x_n}^{t_j-h} \{x_n^{\alpha_j-h} u(x)\}) \text{ appartient à } (H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n))^M$$

On pose :

$$R_h(x) = R_h(x', o) + x_n S_h(x)$$

où $S_h(x)$ est une matrice à coefficients indéfiniment dérivables et à dérivées

bornées dans $B(o, \epsilon)$. On introduit l'opérateur $\mathcal{L} \equiv (\mathcal{L}_{ij}(x', x_n; D_{x_n}))$ où les

$\mathcal{L}_{ij}(x', x_n; D_{x_n})$ sont des opérateurs différentiels en x_n , dépendant du

paramètre x' et définis par :

$$\mathcal{L}_{ij}(x', x_n; D_{x_n}) \{v(x)\} = p_{ij, s_1+t_j, o}^{s_1+t_j}(o) D_{x_n}^{t_j} \{x_n^{\alpha_j} v(x)\} + \sum_{h=1}^{\infty} r_h^{ij}(x', o) D_{x_n}^{t_j-h} \{x_n^{\alpha_j-h} v(x)\}.$$

Soit $\phi(x'; \rho) = \det (\phi_{ij}(x'; \rho - t_j + \alpha_j))$ où $\phi_{ij}(x', \rho) = p_{ij, s_1+t_j, o}^{s_1+t_j}(o) i^{\alpha_j} \rho(\rho-1) \dots$

$$(\rho - \alpha_j + 1) + \sum_{h=1}^{\infty} r_h^{ij}(x', o) i^{\alpha_j-h} \rho(\rho-1) \dots (\rho - \alpha_j + h + 1).$$

Comme pour $h \geq 1$, $p_{ij, s_1+t_j-h, o}^{s_1+t_j-h}(o) = r_h^{ij}(o)$ le polynôme $\phi_{ij}(o, \rho - t_j + \alpha_j)$

coïncide avec le polynôme $\phi_{ij}^o(\rho)$. Par suite, dès que (x', o) appartient à

$B(0, \epsilon)$ avec ϵ assez petit, le polynôme $\phi(x', \rho)$ n'admet pas de zéro dans la bande $-p - \frac{3}{2} \leq \operatorname{Re} \rho \leq -p - \frac{1}{2}$ et le nombre de zéros tels que $\operatorname{Re} \rho > -\frac{1}{2}$ est égal à r_p .

Comme $\mathcal{L}u$ appartient à $(H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n))^M$, on déduit de l'étude faite pour les opérateurs à une variable que pour presque tout x' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, $u(x', \cdot)$ appartient à $\prod_{j=1}^M w_{\alpha_j}^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+)$; et il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout v appartenant à $\prod_{j=1}^M w_{\alpha_j}^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+)$, on a :

$$\|v\|_{\prod_{j=1}^M w_{\alpha_j}^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+)} \leq C \left\{ \|\mathcal{L}(0, x_n; D_{x_n})v\|_{[H^{p+1}(\mathbb{R}_+)]^M} + \|v\|_{\prod_{j=1}^M w_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)} \right\}$$

D'après la continuité des coefficients de l'opérateur $\mathcal{L}(x', x_n; D_{x_n})$ il existe une constante $\epsilon > 0$ et une constante $C > 0$, telle que pour tout v appartenant à $\prod_{j=1}^M w_{\alpha_j}^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+)$ et tout $(x', 0)$ appartenant à $B(0, \epsilon)$ on ait :

$$\|v\|_{\prod_{j=1}^M w_{\alpha_j}^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+)} \leq C \left\{ \|\mathcal{L}(x', x_n; D_{x_n})v\|_{[H^{p+1}(\mathbb{R}_+)]^M} + \|v\|_{\prod_{j=1}^M w_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)} \right\}$$

On applique cette inégalité à $u(x', \cdot)$ pourvu que le support de u soit contenu dans $B(0, \epsilon)$

$$\|u(x', \cdot)\|_{\prod_{j=1}^M w_{\alpha_j}^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+)} \leq C \left\{ \|\mathcal{L}(x', x_n; D_{x_n})\{v(x', x_n)\}\|_{[H^{p+1}(\mathbb{R}_+)]^M} + \|v(x', \cdot)\|_{\prod_{j=1}^M w_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)} \right\}$$

Soit :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \|x_n^{\max(0, \alpha_j - t_j - p - 1)} u_j(x', x_n)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \sum_{j=1}^M \|x_n^{\alpha_j} u_j(x', x_n)\|_{H^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+)} \\ & \leq C \left\{ \|\mathcal{L}(x', x_n; D_{x_n})\{v(x', x_n)\}\|_{[H^{p+1}(\mathbb{R}_+)]^M} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=1}^M \|x_n^{\max(0, \alpha_j - t_j - p)} u_j(x', x_n)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \sum_{j=1}^M \|x_n^{\alpha_j} u_j(x', x_n)\|_{H^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)} \right\} \end{aligned}$$

On intègre par rapport à x' dans $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$\sum_{j=1}^M \|x_n\|^{\max(0, \alpha_j - t_j - p - 1)} \|u_j\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 + \sum_{j=1}^M \|x_n^{\alpha_j} u_j\|_{H^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+^{n-1})}^2$$

$$\leq C \left\{ \|\mathcal{L} v\|_{[H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n)]^M}^2 + \sum_{j=1}^M \|x_n\|^{\max(0, \alpha_j - t_j - p)} \|u_j\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 + \sum_{j=1}^M \|x_n^{\alpha_j} u_j\|_{H^{t_j+p}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}_+^{n-1}))}^2 \right\}.$$

Ainsi $x_n^{\max(0, \alpha_j - t_j - p - 1)} u_j$ appartient à $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ et $x_n^{\alpha_j} u_j$ appartient à $H^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}_+^{n-1}))$.

Compte-tenu du fait que $D_{x_i} u_j$ appartient à $W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)$ pour $i=1, \dots, n-1$, on en déduit que u_j appartient à $W_{\alpha_j}^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+^n)$. De plus, on a la majoration :

$$\|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p+1}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \left\{ \left\| \mathcal{P}_p^u \right\|_{\prod_{i=1}^M H^{p-s_i+1}(\mathbb{R}_+^n)} \times \prod_{i=1}^M \|x_p\|_{H^{p-\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+^{n-1})}^{p-\sigma_i+\frac{1}{2}} + \left\| u \right\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n)} \right\}$$

Ainsi, on a démontré le théorème II.3 ((i), (ii)) lorsque $q=1$.

Pour $q \geq 1$, on raisonne par récurrence par une méthode analogue.

II.2.4. Démonstration du théorème II.4.

On suppose $x_p > 0$. Comme dans la démonstration du théorème 1.2, on peut écrire l'expression de $\mathcal{P}^*(f, g)$ dans $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^M$ pour tout (f, g) appartenant à $\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)] \times \prod_{i=1}^M H^{p-\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+^{n-1})$.

On applique le théorème II.2 au couple d'opérateurs

$(L^0(o, x_n; D_{x_1}, \dots, D_{x_n}); B_p^0(o, D_{x_1}) \gamma)$: il existe une constante $C > 0$ telle que

pour tout (f, g) appartenant à $\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\mathbb{R}_+^n)] \times \prod_{i=1}^M H^{p-\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+^{n-1})$ on ait :

$$\begin{aligned}
 & \| (f, g) \|_M \prod_{i=1}^M [H^{-p+s_i}(\mathbb{R}_+^n)] \times \prod_{i=1}^M H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \\
 & \leq C \left\{ \sum_{j=1}^M \left\| \sum_{i=1}^M L_{ij}^{0*}(o, x_n; D_{x'}, D_{x_n}) \{j_{p-s_i} f_i\} + \right. \right. \\
 & \quad + \sum_{i=1}^M \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} \chi_p \frac{\sigma_i+t_j-\alpha_j-q^*}{B_{ijq}} (-1)^{-q-1} g_i \otimes x_n^{-q-1} Y(x_n) \\
 & \quad + \sum_{i=1}^M \sum_{q=0}^{\max(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} \chi_p \frac{\sigma_i+t_j-\alpha_j-q^*}{B_{ijq}} g_i \otimes \delta^{(q)}(x_n) \left. \right\} \left[w_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n) \right], \\
 & \quad + \sum_{i=1}^M \left\| j_{p-s_i} f_i \right\|_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R}^n)} + \left\| g \right\|_{\prod_{i=1}^M H^{-p+\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \left. \right\}
 \end{aligned}$$

La continuité des opérateurs L et B_p et les lemmes 1.4, 1.5 et 1.6, chap. II, [3] prouvent l'existence d'une fonction $\alpha(\epsilon)$ tendant vers 0 avec ϵ et d'une fonction $\beta(\epsilon) > 0$ telles que pour tout (f, g) appartenant à $\prod_{i=1}^M H^{-p+s_i}(\mathbb{R}^n) \times \prod_{i=1}^M H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ et à support contenu dans $B(o, \epsilon)$

on ait :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^M \left\| \sum_{i=1}^M (L_{ij}^{0*}(x, x_n; D_{x'}, D_{x_n}) - L_{ij}^{0*}(o, x_n; D_{x'}, D_{x_n})) \{f_i\} \right\| \left[w_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n) \right], \\
 & \leq \alpha(\epsilon) \|f\|_M \prod_{i=1}^M H^{-p+s_i}(\mathbb{R}^n) + \beta(\epsilon) \|f\|_M \prod_{i=1}^M H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R}^n) \\
 & \quad + \sum_{j=1}^M \sum_{q=-\alpha_j}^{\min(-1, t_j+p-\alpha_j-1)} \chi_p \frac{\sigma_i+t_j-\alpha_j-q^*}{B_{ijq}} (x', D_{x'}) - B_{ijq} \frac{\sigma_i+t_j-\alpha_j-q^*}{(o, D_{x'})} g_i \otimes x_n^{-q-1} Y(x_n) \left[w_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+^n) \right], \\
 & \leq \alpha(\epsilon) \|g\|_{\prod_{i=1}^M H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \beta(\epsilon) \|g\|_{\prod_{i=1}^M H^{-p+\sigma_i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^M \max(o, t_j + p - \alpha_j - 1) \sum_{q=0} \chi_p \left\| \sum_{i=1}^M (B_{ijq}^{\sigma_i + t_j - \alpha_j - q*} (x', D_{x'}) - B_{ijq}^{\sigma_i + t_j - \alpha_j - q*} (o, D_{x'})) \right\|_{W_{\alpha_j}^{t_j + p}(\mathbb{R}^n)} \\ \leq \alpha(\epsilon) \|g\|_{\chi_p \prod_{i=1}^M H^{-p + \sigma_i + \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \beta(\epsilon) \|g\|_{\chi_p \prod_{i=1}^M H^{-p + \sigma_i - \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Par ailleurs, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\sum_{j=1}^M \left\| \sum_{i=1}^M (L_{ij}^{\sigma*}(x, x_n; D_{x'}, D_{x_n}) - L_{ij}^*(x, x_n; D_{x'}, D_{x_n})) \{f_i\} \right\|_{W_{\alpha_j}^{t_j + p}(\mathbb{R}^n)} \\ \leq C \|f\|_{\chi_p \prod_{i=1}^M H^{-p + \sigma_i - 1}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\sum_{j=1}^M \min(-1, t_j + p - \alpha_j - 1) \sum_{q=-\alpha_j} \chi_p \left\| \sum_{i=1}^M (B_{ijq}^{\sigma_i + t_j - \alpha_j - q*} (x', D_{x'}) - B_{ijq}^*(x', D_{x'})) \right\|_{W_{\alpha_j}^{t_j + p}(\mathbb{R}^n)} \\ \leq C \|g\|_{\chi_p \prod_{i=1}^M H^{-p + \sigma_i - \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\sum_{j=1}^M \max(o, t_j + p - \alpha_j - 1) \sum_{q=0} \chi_p \left\| \sum_{i=1}^M (B_{ijq}^{\sigma_i + t_j - \alpha_j - q*} (x', D_{x'}) - B_{ijq}^*(x', D_{x'})) \right\|_{W_{\alpha_j}^{t_j + p}(\mathbb{R}^n)} \\ \leq C \|g\|_{\chi_p \prod_{i=1}^M H^{-p + \sigma_i - \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

Le théorème II.4 se déduit de ces inégalités.

II.3 ESTIMATIONS A PRIORI DANS L'OUVERT

II.3.1 : Notations et hypothèses

Soit un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ . On suppose que $\bar{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞ . On se donne une fonction φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ et vérifiant :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; \varphi(x) > 0\} \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n; \varphi(x) = 0\} \\ \text{grad } \varphi(x) \neq 0 \text{ pour } x \text{ appartenant à } \Gamma \end{cases}$$

Pour $i, j = 1, \dots, M$ soient les opérateurs $L_{ij} \equiv L_{ij}(x; D_x)$ définis sur Ω par :

$$L_{ij} u(x) \equiv L_{ij}(x; D_x) \{u_j(x)\} \equiv \sum_{h=0}^{\min(s_i+t_j, \alpha_j)} p_{ij}^{s_i+t_j-h} (x; D_x) \{ \varphi(x)^{\alpha_j-h} u(x) \}$$

où (i) s_i et t_j sont des entiers de $\mathbb{Z}$; on suppose $s_i \leq 0$ et $t_j \geq 0$ (on peut se ramener à ce cas)

(ii) α_j sont des entiers de $\mathbb{N}$

(iii) $p_{ij}^{s_i+t_j-h} (x; D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment dérivables dans $\bar{\Omega}$ d'ordre inférieur ou égal à s_i+t_j-h (ou identique à 0 si $s_i+t_j-h < 0$)

$$p_{ij}^{s_i+t_j-h} (x; D_x) \equiv \sum_{|\alpha| \leq s_i+t_j-h} p_{ij,\alpha}^{s_i+t_j-h} (x) D_x^\alpha$$

$$\text{On note } p_{ij, s_i+t_j-h}^{s_i+t_j-h} (x; D_x) = \sum_{|\alpha| = s_i+t_j-h} p_{ij,\alpha}^{s_i+t_j-h} (x) D_x^\alpha$$

On note L l'opérateur matriciel $(L_{ij})_{i,j=1,\dots,M}$; cet opérateur induit, pour tout entier $p \geq 0$, une application linéaire et continue de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(\Omega)$ où $W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev avec poids

$$\{u \in H^{t_j+p-\alpha_j}(\Omega); \varphi^{\alpha_j} u \in H^{t_j+p}(\Omega)\}$$

muni de la norme canonique (pour les propriétés classiques de ces espaces, on renvoie à [3]).

On introduit les conditions :

$H_0(\Omega)$: Pour tout x appartenant à Γ et pour tout (ξ, ρ) appartenant à $(T_x \times \mathbb{R}) \setminus \{0\}$

où T_x est l'espace cotangent en x à Γ , le polynôme

$$\det (P_{ij, s_i+t_j}^{s_i+t_j} (x; \xi + \rho \operatorname{grad} \Psi(x)))$$

est non nul et pour tout ξ appartenant à T_x , le nombre $m_+(x; \xi)$ de zéros à partie imaginaire > 0 du polynôme

$$\det (P_{ij, s_i+t_j}^{s_i+t_j} (x; \xi + \rho \operatorname{grad} \Psi(x)))$$

en ρ est constant et égal à m_+ .

$H_1(p; \Omega)$: Pour tout x appartenant à Γ , le polynôme $\phi(x; \rho) = \det(\phi_{ij}(x; \rho - t_j + \alpha_j))$

$$\text{où } \phi_{ij}(x; \rho) = \sum_{h=0}^{\min(s_i+t_j, \alpha_j)} P_{ij, s_i+t_j-h}^{s_i+t_j-h} (x; \operatorname{grad} \Psi(x)) \rho(\rho-1) \dots (\rho-\alpha_j+h+1)$$

n'a pas de zéro ρ sur la droite $\operatorname{Re} \rho = -p - \frac{1}{2}$.

$H_2(p; \Omega)$: Pour tout x appartenant à Γ , le nombre $r_p(x)$ de zéros du polynôme

$\phi(x; \tau)$ tels que $\operatorname{Re} \tau > -p - \frac{1}{2}$ est constant et égal à r_p et le nombre $\chi_p = m_+ - r_p$ est ≥ 0 .

Etant donné un élément u de $W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$, on lui associe t_j+p traces généralisées définies pour x appartenant à Γ par :

$$\gamma_q u(x) = \begin{cases} D_t^q u(\psi^{-1}(x, t))|_{t=0} & \text{pour } q=0, \dots, t_j+p-\alpha_j-1 \text{ si } 0 \leq \alpha_j < t_j+p \\ (-1)^{-q-1} \int_0^{+\infty} t^{-q-1} \alpha(t) u(\psi^{-1}(x, t)) dt & \text{pour } q=-\alpha_j, \dots, \min(-1, t_j+p-\alpha_j-1) \\ & \text{si } 1 \leq \alpha_j \end{cases}$$

où α est une fonction de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ égale à 1 au voisinage de 0 et à support suffisamment petit et ψ est l'isomorphisme de $\{x \in \overline{\Omega} ; d(x, \Gamma) < \delta\}$ sur $\Gamma \times [0, \delta[$ défini par $\psi(x) = (x_\Gamma, d(x, \Gamma))$, $d(x, \Gamma)$ désignant la distance de x à Γ , δ étant suffisamment petit et x_Γ étant la projection de x sur Γ .

On note $\gamma u = (\gamma_{-\alpha_j} u, \dots, \gamma_{t_j+p-\alpha_j-1} u)$; l'application $\gamma : u \longrightarrow \gamma u$ est li-

néaire, continue et surjective de $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$ sur $\prod_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} H^{t_j+p-\alpha_j-q-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

On définit maintenant les opérateurs frontières. Lorsque χ_p est > 0 pour $i = 1, \dots, \chi_p$ et $j = 1, \dots, M$ soient les opérateurs $B_{ij}^p \equiv B_{ij}^p(x; D_\Gamma)$ définis par :

$$B_{ij}^p(x; D_\Gamma) \gamma u = \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} B_{ijq}(x; D_\Gamma) \gamma_q u$$

où $B_{ijq}(x; D_\Gamma)$ est un opérateur différentiel sur Γ , à coefficients indéfiniment dérivables sur Γ d'ordre inférieur ou égal à $\sigma_i + t_j - \alpha_j - q$ si $\sigma_i + t_j - \alpha_j - q$ est < 0 , $B_{ijq}(x'; D_\Gamma)$ est l'opérateur identiquement nul, σ_i étant un entier de $\mathbb{Z}$ tel que $\sigma_i \leq p-1$.

On note B_p l'opérateur matriciel $(B_{ij}^p \gamma)_{\substack{i=1, \dots, \chi_p \\ j=1, \dots, M}}$;

cet opérateur induit une application linéaire et continue de

$$\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega) \text{ dans } \prod_{i=1}^{\chi_p} H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

On désigne par $B_{ijq}^{\sigma_i+t_j-\alpha_j-q}(x; D_\Gamma)$ la partie homogène d'ordre $\sigma_i+t_j-\alpha_j-q$ de $B_{ijq}(x; D_\Gamma)$. On pose enfin :

$H_3(p; \Omega)$: Pour tout x appartenant à Γ et pour tout ξ appartenant à T_x , le problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^M \min(s_i+t_j, \alpha_j) \sum_{h=0}^{s_i+t_j-\alpha_j} P_{ij, s_i+t_j-h}^{s_i+t_j-h} (x; \xi + \text{grad } \varphi(x) D_t) \{t^{\alpha_j-h} u_j(t)\} = 0, \quad i=1, \dots, M \\ \sum_{j=1}^M \sum_{q=-\alpha_j}^{t_j+p-\alpha_j-1} B_{ijq}^{\sigma_i+t_j-\alpha_j-q}(x; \xi) \gamma_q u_j = 0, \quad i=1, \dots, \chi_p, \text{ si } \chi_p > 0 \end{array} \right.$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^M \min(s_i+t_j, \alpha_j) \sum_{h=0}^{s_i+t_j-\alpha_j} P_{ij, s_i+t_j-h}^{s_i+t_j-h} (x; \xi + \text{grad } \varphi(x) D_t) \{t^{\alpha_j-h} u_j(t)\} = 0, \quad i=1, \dots, M \end{array} \right.$$

n'admet que la solution $v=0$ dans $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\mathbb{R}_+)$.

Remarque II.3 : Les conditions précédentes sont invariantes par difféomorphisme.

II.3.2 : Enoncé des résultats

Pour tout entier $p \geq 0$, on considère l'opérateur $\mathcal{P}_p$ défini sur $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+1}(\Omega)$ par :

$$\mathcal{P}_p : u \longrightarrow \mathcal{P}_p u = \begin{cases} (Lu, B_p \gamma u) & \text{si } \chi_p > 0 \\ Lu & \text{si } \chi_p = 0 \end{cases}$$

C'est un opérateur linéaire et continu de

$$\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega) \quad \text{dans} \quad \prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(\Omega) \times \prod_{i=1}^M H^{p-\alpha_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

(resp. $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(\Omega)$) si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$). On désigne par $[H^{p-s_i}(\Omega)]'$,

(resp. $[W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)]'$) l'espace dual de $H^{p-s_i}(\Omega)$ (resp. $W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$).

L'opérateur adjoint $\mathcal{P}_p^*$ de $\mathcal{P}_p$ est un opérateur linéaire et continu de

$$\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\Omega)]' \times \prod_{i=1}^M H^{p+\sigma_i-\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (\text{resp. } \prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\Omega)]') \quad \text{dans} \quad \prod_{j=1}^M [W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)]'$$

si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$). On désigne enfin par j_{p-s_i} l'isomorphisme canonique de $[H^{p-s_i}(\Omega)]'$ sur $H_0^{-p+s_i}(\Omega)$ espace des distributions de $H^{-p+s_i}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\bar{\Omega}$.

On a alors les théorèmes suivants :

Théorème II.5 : Soit un entier $p \geq 0$. On suppose que les conditions $H_0(\Omega)$,

$H_1(p;\Omega)$, $H_2(p;\Omega)$, $H_3(p;\Omega)$ sont réalisées. Alors pour tout entier q tel que le

polynôme $\phi(x;p)$ n'ait pas de zéro dans la bande $-p-q-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \rho \leq -p-\frac{1}{2}$

pour tout x appartenant à Γ , il existe une constante $C_q > 0$ telle que :

si u appartient à $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$ et si $\mathcal{P}_p u$ appartient à $\prod_{i=1}^M H^{p+q-s_i}(\Omega)$

$\times \prod_{i=1}^M H^{p+q-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (resp. $\prod_{i=1}^M H^{p+q-s_i}(\Omega)$) alors :

(i) u appartient à $\prod_{i=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p+q}(\Omega)$

(ii) $\|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p+q}(\Omega)} \leq C_q \left\{ \|\mathcal{P}_p u\|_{\prod_{i=1}^M H^{p+q-s_i}(\Omega) \times \prod_{i=1}^M H^{p+q-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p+q-1}(\Omega)} \right\}$

$$\left(\text{resp. } \|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p+q}(\Omega)} \leq C_q \left\{ \left\| \mathcal{P}_p u \right\|_{\prod_{i=1}^M H^{p+q-s_i}(\Omega)} + \|u\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p+q-1}(\Omega)} \right\} \right)$$

si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$)

Théorème II.6 : Soit un entier $p \geq 0$. On suppose que les conditions $H_0(\Omega)$, $H_1(p;\Omega)$, $H_2(p;\Omega)$, $H_3(p;\Omega)$ sont réalisées. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout (f,g) (resp. f) appartenant à

$$\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\Omega)]' \times \prod_{i=1}^M H^{-p+s_i+\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (\text{resp. } \prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\Omega)]') \quad \text{on ait :}$$

$$\begin{aligned} \|(f,g)\|_{\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\Omega)]' \times \prod_{i=1}^M H^{-p+s_i+\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq C \left\{ \|\mathcal{P}_p^*(f,g)\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^M \|j_{p-s_i} f_i\|_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{\prod_{i=1}^M H^{-p+s_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right\} \end{aligned}$$

$$(\text{resp. } \|f\|_{\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\Omega)]'} \leq C \left\{ \|\mathcal{P}_p^* f\|_{\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)} + \sum_{i=1}^M \|j_{p-s_i} f_i\|_{H^{-p+s_i-1}(\mathbb{R}^n)} \right\})$$

si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$).

II.3.3 : Démonstration du théorème et du théorème II.6

Par "cartes locales" et "partition de l'unité" on se ramène par un raisonnement classique au théorème II.3 et aux estimations a priori pour les systèmes d'opérateurs elliptiques. On adapte facilement les techniques utilisées (pour $M = 1$) dans [3].

II.4. Existence des solutions dans les espaces $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$

On utilise les notations du II.3. Soit un entier $p > 0$; on se propose d'étudier maintenant le problème aux limites :

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ B_p \gamma u = g & \text{sur } \Gamma, \quad \text{si } \chi_p > 0 \end{cases}$$

ou $\{Lu = f \text{ dans } \Omega, \text{ si } \chi_p = 0$

du point de vue de l'existence des solutions dans les espaces $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+q}(\Omega)$

où q est un entier $\geq p$.

Le but essentiel de cette étude est de montrer que sous les hypothèses de II.3, l'opérateur $\mathcal{P}_p$ est un opérateur à indice de

$\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}_1(\Omega) \times \prod_{i=1}^M H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (resp. $\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}_1(\Omega)$) si $\chi_p > 0$

(resp. $\chi_p = 0$). Moyennant une hypothèse supplémentaire sur l'opérateur $\mathcal{P}_p$, on montrera que c'est aussi un opérateur à indice de

$\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p+q}(\Omega)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p+q+s_i}_1(\Omega) \times \prod_{i=1}^M H^{p+q-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (resp. $\prod_{i=1}^M H^{p+q-s_i}_1(\Omega)$)

si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$), q étant un entier ≥ 1 . Enfin, on examinera les conditions de compatibilité du problème en utilisant un problème aux limites adjoint.

Plus précisément, on a :

Théorème II.7 : Avec les notations de II.3, on suppose que les conditions

$H_0(\Omega)$, $H_1(p;\Omega)$, $H_2(p;\Omega)$, $H_3(p;\Omega)$ sont réalisées et que pour tout x appartenant

à Γ le polynôme $\phi(x;\rho)$ n'a pas de zéro dans la bande $-p-q-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \rho \leq -p-\frac{1}{2}$,

q étant un entier ≥ 0 . Alors pour tout entier r tel que $0 \leq r \leq q$ l'opérateur

$\mathcal{P}_p$ opérant de

$\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p+r}(\Omega)$ dans $\prod_{i=1}^M H^{p+r-s_i}_1(\Omega) \times \prod_{i=1}^M H^{p+r-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (resp. $\prod_{i=1}^M H^{p+r-s_i}_1(\Omega)$)

possède les propriétés suivantes :

(i) C'est un opérateur à indice dont l'indice est indépendant de r

(ii) Son noyau est égal à $\left\{ u \in \prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p+q}(\Omega) ; \mathcal{P}_p u = 0 \right\}$

(iii) Son image est composée des éléments (f,g) (resp. f) appartenant à

$\prod_{i=1}^M H^{p-s_i+r}_1(\Omega) \times \prod_{i=1}^M H^{p+r-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (resp. $\prod_{i=1}^M H^{p+r-s_i}_1(\Omega)$) tels que :

$$\langle f, \bar{v} \rangle_{\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(\Omega) \times \prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\Omega)]} + \langle g, \bar{\psi} \rangle_{\prod_{i=1}^M H^{p-\sigma_i-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \prod_{i=1}^M H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0$$

$$\left(\text{resp. } \langle f, \bar{v} \rangle_{\prod_{i=1}^M H^{p-s_i}(\Omega) \times \prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\Omega)]} = 0 \right)$$

pour tout (v, φ) (resp. v) appartenant à $\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\Omega)]' \times \prod_{i=1}^M H^{-p+\sigma_i+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (resp. $\prod_{i=1}^M [H^{p-s_i}(\Omega)]'$) vérifiant $\mathcal{P}_p^*(v, \varphi) = 0$ (resp. $\mathcal{P}_p^* v = 0$) si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$) ; $\mathcal{P}_p^*$ désignant l'opérateur adjoint de $\mathcal{P}_p$ considéré pour $r = 0$.

Démonstration : On déduit le théorème II.7 du théorème II.5 et du théorème II.6 de façon classique.

On en déduit en particulier :

Corollaire II.1 : Avec les notations de II.3, on suppose que les conditions

$H_0(\Omega)$, $H_1(p; \Omega)$, $H_2(p; \Omega)$, $H_3(p; \Omega)$ sont réalisées et que pour tout x appartenant à Γ , le polynôme $\phi(x; \rho)$ n'a pas de zéro dans le demi espace $-p - \frac{1}{2} > \text{Re } \rho$.

Alors le noyau de l'opérateur $\mathcal{P}_p$ dans $\prod_{j=1}^M W_{\alpha_j}^{t_j+p}(\Omega)$ est égal à l'espace $\{u \in (C^\infty(\bar{\Omega}))^M ; \mathcal{P}_p u = 0\}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AGMON - DOUGLIS et NIRENBERG : "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary condition II - C.P.A.M. - Vol. XVII, 35-92 (1964).
- [2] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable". Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Tome 51 - p. 429-463 (1972).
- [3] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Etude d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables". Bull. Soc. Math. France, Mémoire 34, p. 55-140, (1973).
- [4] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Opérateurs à indice". Publications des séminaires de Mathématiques de l'Université de Rennes, tome II (1973).
- [5] P. BOLLEY, J. CAMUS - B. HELFFER : "Hypoellipticité partielle d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés". C.R.A.S. Paris, 11 mars 1974, Série A - 775.
- [6] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Régularité de certains espaces de distributions". Astérisque n° 2 et n° 3, 1973.
- [7] D.G. DE FIGUEIREDO : "The coerciveness problem for forms over vector valued functions". C.P.A.M. - Vol. XVI, 1963 - p. 63-94.
- [8] J. NECAS : "Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques". Masson - Paris 1967.
"Sur les normes équivalentes dans $W_p^{(k)}(\Omega)$ et sur la coercivité des formes formellement positives". Sem. Math. Sup. 1965, Univ. Montréal, 1966.