

P. BOLLEY

J. CAMUS

Opérateurs à indice

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 2

« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 1, p. 1-29

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973__2_A1_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

OPERATEURS A INDICE

par

P. BOLLEY et J. CAMUS

Il s'agit d'un exposé de synthèse sur les opérateurs à indice. Certains résultats établis ici seront en particulier utilisés pour l'étude d'une classe de systèmes différentiels elliptiques dégénérés.

INTRODUCTION.

Les opérateurs à indice sont utilisés dans de nombreuses théories. Citons à titre d'exemples : les équations intégrales ([18], ...), les problèmes elliptiques ([3], [4], [15] et la bibliographie de [15], ...), la K-théorie ([2], ...)

Les opérateurs à indice sont étudiés dans de nombreux ouvrages. Citons à titre d'exemple : [5], [8], [9], [11], [14], [17], ...

Définition : Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps K et u un opérateur linéaire de E dans F . On dit que u est un opérateur à indice de E dans F si $\text{Ker } u$ est de dimension finie et si $\text{Im } u$ est de codimension finie dans F . L'indice de u est le nombre $\chi(u) = \dim \text{Ker } u - \text{codim Im } u$.

Remarque : Etant donnés deux espaces vectoriels E et F , il se peut qu'il n'y ait aucun opérateur à indice de E dans F : c'est le cas par exemple si E est de dimension finie et F est de dimension infinie. Dans [5], on donne une condition suffisante pour qu'il existe au moins un opérateur à indice de E dans F .

I. PROPRIETES ALGEBRIQUES DES OPERATEURS A INDICE.

Tous les espaces vectoriels dans ce paragraphe ont pour corps de base un corps K quelconque.

Théorème 1.1.

Soient E_i et F_i , pour $i=1,2$ deux espaces vectoriels. Soient u_i pour $i=1,2$, un opérateur linéaire de E_i dans F_i à indice. Alors, l'opérateur $u_1 \times u_2$ est un opérateur linéaire et à indice de $E_1 \times E_2$ dans $F_1 \times F_2$, dont l'indice est donné par $\chi(u_1 \times u_2) = \chi(u_1) + \chi(u_2)$.

Démonstration : l'opérateur $u_1 \times u_2$ est défini sur $E_1 \times E_2$ par :

$(u_1 \times u_2)(x_1, x_2) = (u_1(x_1), u_2(x_2))$ pour tout (x_1, x_2) appartenant à $E_1 \times E_2$. La démonstration du théorème 1.1. est évidente.

Théorème 1.2.

Soient E, F et G des espaces vectoriels. Soient u un opérateur linéaire de E dans F et v un opérateur linéaire de F dans G . Alors, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) deux des trois opérateurs $u, v, v \circ u$ sont à indice de E dans F , de F dans G , de E dans G respectivement ;
- 2) les trois opérateurs $u, v, v \circ u$ sont à indice de E dans F , de F dans G , de E dans G respectivement.

Dans ce cas, $\chi(v \circ u) = \chi(u) + \chi(v)$.

Démonstration :

(1) On suppose que u est un opérateur à indice de E dans F et v un opérateur à indice de F dans G .

Soient M et N deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\text{Ker}(v \circ u) = \text{Ker } u \oplus M$ et $E = \text{Ker } u \oplus M \oplus N$. Comme $u(M) \subset \text{Ker } v$ et que la restriction de u à M est injective, $\dim M = \dim u(M) \leq \dim \text{Ker } v$ et donc $\dim M < +\infty$. Comme $\dim \text{Ker } u < +\infty$, on en déduit que $\dim \text{Ker}(v \circ u) < +\infty$.

Soient P et Q deux sous-espaces vectoriels de G tels que

$\text{Im } v = \text{Im } (v \circ u) \oplus P$ et $G = \text{Im } (v \circ u) \oplus P \oplus Q$ avec $\dim Q < +\infty$.

Soit F_1 un sous-espace vectoriel de F tel que $F = \text{Im } u \oplus F_1$ avec

$\dim F_1 < +\infty$. Soit v' l'application canonique associée à v de F_1

dans $\text{Im } v / \text{Im } (v \circ u)$; cette application v' est surjective. Comme

$\dim F_1 < +\infty$, et que $\text{Im } v / \text{Im } (v \circ u)$ est isomorphe à P , on en déduit

que $\dim P < +\infty$. Comme $\dim Q < +\infty$, on en déduit que $\dim P \oplus Q < +\infty$

et par suite que $\text{Codim Im } (v \circ u) < +\infty$.

Ainsi, $v \circ u$ est un opérateur à indice de E dans G .

- (ii) On suppose que u est un opérateur à indice de E dans F et $v \circ u$ un opérateur à indice de E dans G .

On conserve les notations de (i). On considère l'opérateur p de $\text{Ker } v$ dans $\text{Ker } v'$ défini par $p(u(x) + y_1) = y_1$ pour x appartenant à E et y_1 appartenant à F_1 . p est surjective et $\text{Ker } p = \text{Ker } v \cap \text{Im } u = u(M)$. Comme $\dim \text{Ker } (v \circ u) < +\infty$, on en déduit que $\dim M < +\infty$ et comme $\text{codim Im } u < +\infty$, on en déduit que $\dim \text{Ker } v' \leq \dim F_1 < +\infty$. Par suite, $\dim \text{Ker } p + \dim \text{Im } p < +\infty$ et donc $\dim \text{Ker } v < +\infty$.

De plus, $\dim (G/\text{Im}(v \circ u)) = \dim P \oplus Q < +\infty$, donc $\dim Q < +\infty$.

Par suite, $\text{codim Im } (v) < +\infty$.

Ainsi v est un opérateur à indice de F dans G .

- (iii) On suppose que v est un opérateur à indice de F dans G et $v \circ u$ un opérateur à indice de E dans G .

On a toujours $\text{Ker } u \subset \text{Ker } v \circ u$, donc $\text{Ker } u < +\infty$. Comme $\dim (G/\text{Im } (v \circ u)) < +\infty$, $\dim (\text{Im } v / \text{Im } (v \circ u)) < +\infty$. De plus, puisque $p(\text{Ker } v) = \text{Ker } v'$ et que $\dim \text{Ker } v < +\infty$, on en déduit que $\dim \text{Ker } v' < +\infty$. Par suite, $\dim \text{Ker } v' + \dim \text{Im } v' < +\infty$ et donc $\dim F_1 = \text{codim Im } u < +\infty$.

Ainsi, u est un opérateur à indice de E dans F .

(iv) On démontre maintenant la formule des indices :

$$\begin{aligned}\chi(v \circ u) &= \dim \operatorname{Ker} (v \circ u) - \operatorname{codim} \operatorname{Im} (v \circ u) \\ &= \dim \operatorname{Ker} u + \dim M - \dim P - \dim Q. \\ &= \dim \operatorname{Ker} u + \dim M - \dim P - \operatorname{codim} \operatorname{Im} v.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Ker} v &= \dim \operatorname{Ker} p + \dim \operatorname{Ker} v' \\ &= \dim u(M) + \dim \operatorname{Ker} v' \\ &= \dim M + \dim \operatorname{Ker} v'\end{aligned}$$

$$\text{d'où } \dim P = \dim F_1 - \dim \operatorname{Ker} v' = \operatorname{codim} \operatorname{Im} u - \dim \operatorname{Ker} v + \dim M$$

$$\begin{aligned}\text{Donc, } \chi(v \circ u) &= \dim \operatorname{Ker} u - \operatorname{codim} \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} v - \operatorname{codim} \operatorname{Im} v \\ &= \chi(v) + \chi(u).\end{aligned}$$

Théorème 1.3.

Soient E et F deux espaces vectoriels et u un opérateur linéaire de E dans F. Alors, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) u est un opérateur à indice de E dans F
- 2) u est inversible modulo les opérateurs de rang fini.

Démonstration :

2 $\implies$ 1 : On suppose qu'il existe un opérateur linéaire v_1 de F dans E et un opérateur linéaire v_2 de F dans E tels que l'opérateur $I_E - v_1 \circ u$ soit un opérateur de rang fini de E dans E et $I_F - u \circ v_2$ soit un opérateur de rang fini de F dans F (I_E désigne l'opérateur identité de E dans E).

On a $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} (v_1 \circ u) \subset \operatorname{Im} (I_E - v_1 \circ u)$ qui est de dimension finie, donc $\dim \operatorname{Ker} u < +\infty$. On a : $\operatorname{Im} u \supset \operatorname{Im} (u \circ v_2) = \operatorname{Im} ((-I_F + u \circ v_2) + I_F) \supset \operatorname{Ker} (u \circ v_2 - I_F)$ qui est de codimension finie dans F car $u \circ v_2 - I_F$ est de rang fini et $\operatorname{Im} (u \circ v_2 - I_F)$ est isomorphe à $F/\operatorname{Ker} (u \circ v_2 - I_F)$, donc $\operatorname{codim} \operatorname{Im} u < +\infty$.

Ainsi, u est un opérateur à indice de E dans F.

1 $\implies$ 2 : On suppose que u est un opérateur à indice de E dans F . On va construire un opérateur linéaire v de F dans E tel que $I_E - v \circ u$ et $I_F - u \circ v$ soient des opérateurs de rang fini de E dans E et de F dans F respectivement et tel que, de plus, $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

Soit R un sous-espace vectoriel de E tel que $E = \text{Ker } u + R$. La restriction u_R de u à R est un isomorphisme de R sur $\text{Im } u$ et on note u_R^{-1} l'opérateur inverse de u_R de $\text{Im } u$ sur R . Soit p un projecteur de F sur $\text{Im } u$. Alors, l'opérateur $v = u_R^{-1} \circ p$ répond à la question. En effet : $\text{Im}(I_E - v \circ u) = \text{Ker } u$ qui est de dimension finie et $\text{Im}(I_F - u \circ v) = \text{Ker } p$ qui est de dimension finie car $\text{codim Im } u < +\infty$.

De plus, comme u est nul sur $\text{Ker } u$, on en déduit que $u \circ v \circ u = u$ et comme v est nul sur $\text{Ker } p$, on en déduit que $v \circ u \circ v = v$.

Remarque 1.1 : L'opérateur v ainsi construit est un opérateur à indice de F dans E et $\chi(v) = -\chi(u)$. Ceci résulte de la construction même de v mais ceci résulte aussi du théorème 1.2 et du théorème 1.4 suivant :

Théorème 1.4.

Soient E et F deux espaces vectoriels et u un opérateur linéaire et à indice de E dans F et v un opérateur de rang fini de E dans F . Alors, $u+v$ est un opérateur à indice de E dans F et $\chi(u+v) = \chi(u)$.

Démonstration :

1er cas. Soient $E = F$ et v un opérateur de rang fini. On va montrer que $I_E + v$ est un opérateur à indice de E dans E et que $\chi(I_E + v) = 0$. L'opérateur $I_E + v$ opère de $\text{Im } v$ dans $\text{Im } v$, on peut donc considérer $I_E + v$ en tant qu'opérateur de $E/\text{Im } v$ dans $E/\text{Im } v$; cet opérateur sera noté $(I+v)_{\frac{E}{\text{Im } v}}$.

Soit φ l'application canonique de E sur $E/\text{Im } v$. Il est clair que : $\varphi \circ (I_E + v) = (I+v)_{\frac{E}{\text{Im } v}} \circ \varphi$. D'une part, φ est un opérateur à indice de E sur

$E/\text{Im } v$ d'indice $\chi(\varphi) = \dim(\text{Im } v)$. D'autre part, $(I+v)_{\frac{E}{\text{Im } v}}$ est un opérateur à indice de $E/\text{Im } v$ sur $E/\text{Im } v$ d'indice $\chi((I+v)_{\frac{E}{\text{Im } v}}) = 0$: c'est en effet un isomorphisme. Par suite, d'après le théorème 1.2, $I_E + v$ est un opérateur à indice de E dans E et d'indice $\chi(I_E + v) = 0$.

Remarque 1.2 : Ce cas particulier complète la remarque 1.1.

2ème Cas : On se place dans le cas général du théorème 1.4. L'opérateur u étant un opérateur à indice de E dans F , le théorème 1.3 affirme qu'il existe un opérateur w de F dans E tel que $u \circ w - I_F$ soit de rang fini et tel que, de plus, d'après la remarque 1.1 (cf. remarque 1.2) w soit un opérateur à indice de F dans E d'indice $\chi(w) = -\chi(u)$. Alors, $(u+v) \circ w - I_F = u \circ w - I_F + v \circ w$ est aussi de rang fini, donc d'après le 1er cas, $(u+v) \circ w$ est un opérateur à indice de F dans F et d'indice $\chi((u+v) \circ w) = 0$. D'après le théorème 1.2, $u+v$ est un opérateur à indice de E dans F et d'indice $\chi(u+v) = -\chi(w)$ i.e. : d'indice $\chi(u+v) = \chi(u)$.

Théorème 1.5.

Soient E et F deux espaces vectoriels, E^* et F^* les duals algébriques de E et F respectivement. Soient u un opérateur linéaire de E dans F et u^* l'opérateur linéaire de F^* dans E^* transposé algébrique de u . Alors, les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) u est un opérateur à indice de E dans F .
- 2) u^* est un opérateur à indice de F^* dans E^* .
- 3) $\text{Ker } u$ et $\text{Ker } u^*$ sont de dimensions finies.

Dans ce cas, $\chi(u) = -\chi(u^*) = \dim \text{Ker } u - \dim \text{Ker } u^*$.

Démonstration : Il existe des isomorphismes canoniques de $(\text{Ker } u)^*$ sur $E^*/\text{Im } u^*$ et de $\text{Ker } u^*$ sur $(F/\text{Im } u)^*$. D'autre part, si G est un espace vectoriel de dimension finie, alors $\dim G^* = \dim G < +\infty$. Ceci suffit pour établir le théorème 1.5.

Théorème 1.6.

Soient E un espace vectoriel et u un opérateur linéaire de E dans E .

- 1) La suite $(\text{Ker } u^n)_{n \geq 0}$ est soit strictement croissante, soit strictement croissante jusqu'à un rang fini $n=v$ à partir duquel elle est constante.
- 2) La suite $(\text{Im } u^n)_{n \geq 0}$ est soit strictement décroissante, soit strictement décroissante jusqu'à un rang fini $n=\mu$ à partir duquel elle est constante.
- 3) Si les deux suites $(\text{Ker } u^n)_{n \geq 0}$ et $(\text{Im } u^n)_{n \geq 0}$ finissent par rester constantes à partir des rangs v et μ respectivement, alors $v=\mu$. Si de plus, $\dim(\text{Ker } u^v) < +\infty$, alors pour tout $n \geq 0$, u^n est un opérateur à indice de E dans E d'indice $\chi(u^n) = 0$.

Démonstration :

- 1) et 2) : On a $(u^p)^{-1}(\text{Ker } u^q) = \text{Ker } u^{p+q}$ et $u^p(\text{Im } u^q) = \text{Im } u^{p+q}$. D'autre part, comme u^n permute avec u , son noyau et son image sont stables par u . D'où $\text{Ker } u^{n+1} = u^{-1}(\text{Ker } u^n) \supset \text{Ker } u^n$ et $\text{Im } u^{n+1} = u(\text{Im } u^n) \subset \text{Im } u^n$, ainsi les suites $(\text{Ker } u^n)_{n \geq 0}$ et $(\text{Im } u^n)_{n \geq 0}$ sont croissante et décroissante respectivement. Si on a : $\text{Ker } u^n = \text{Ker } u^{n+1}$ on a $(u^p)^{-1}(\text{Ker } u^{n+1}) = (u^p)^{-1}(\text{Ker } u^n)$ c'est-à-dire $\text{Ker } u^{n+p} = \text{Ker } u^{n+p+1}$ c'est-à-dire, la suite $(\text{Ker } u^n)_{n \geq 0}$ est stationnaire à partir du rang n . On voit de même que si $\text{Im } u^n = \text{Im } u^{n+1}$, la suite $(\text{Im } u^n)_{n \geq 0}$ est stationnaire à partir du rang n .
- 3) Avec les notations données dans le théorème 1.6, on aura prouvé $\mu \leq v$ si on prouve que $\text{Ker } u^n = \text{Ker } u^{n+1}$ et $\text{Im } u^n \neq \text{Im } u^{n+1}$ impliquent $\text{Im } u^{n+1} \neq \text{Im } u^{n+2}$ (donc aussi $\text{Im } u^{n+2} \neq \text{Im } u^{n+3}$ puisque l'on a aussi $\text{Ker } u^{n+1} = \text{Ker } u^{n+2}$ et ainsi la suite $(\text{Im } u^n)_{n \geq 0}$ serait strictement décroissante). Si on a $\text{Im } u^{n+1} = \text{Im } u^{n+2}$, soit $u^n x$ un élément de $\text{Im } u^n$, alors $u^{n+1} x$ appartient à $\text{Im } u^{n+1} = \text{Im } u^{n+2}$ et est donc de la forme $u^{n+2} y$, donc $u^{n+1}(x - uy) = 0$, c'est-à-dire, puisque $\text{Ker } u^{n+1} = \text{Ker } u^n$, $u^n(x - uy) = 0$, c'est-à-dire $u^n x = u^{n+1} x$ appartient à $\text{Im } u^n$; on aurait donc $\text{Im } u^n = \text{Im } u^{n+1}$ ce qui contredit notre hypothèse.

On prouve de la même façon que $\text{Im } u^n = \text{Im } u^{n+1}$ et $\text{Ker } u^n \neq \text{Ker } u^{n+1}$ impliquent $\text{Ker } u^{n+1} \neq \text{Ker } u^{n+2}$ d'où $\mu \geq \nu$. Ainsi, $\nu = \mu$.

Pour simplifier, posons $E_\infty = \text{Ker } u^\nu$ et $F_\infty = \text{Im } u^\nu$. Alors E est somme directe de E_∞ et F_∞ , de plus u induit un endomorphisme nilpotent dans E_∞ et un isomorphisme dans F_∞ . En effet, tout d'abord $E_\infty \cap F_\infty = \{0\}$ car si x appartient à cette intersection, on a : $x = u^\nu y$ et $u^\nu x = 0$ d'où $u^{2\nu} y = 0$ et même $u^\nu y = 0$ car $\text{Ker } u^\nu = \text{Ker } u^{2\nu}$ c'est-à-dire $x=0$. Soit $\bar{u}$ l'opérateur de E/E_∞ dans E/E_∞ obtenu par passage au quotient de u ; $\bar{u}$ est bijectif, car d'une part, il est injectif, puisque $\text{Ker } u^\nu = \text{Ker } u^{\nu+1}$, d'autre part, il est surjectif, puisque sinon, si l'on applique le raisonnement fait précédemment (début de 3) à $\bar{u}$ pour lequel l'entier correspondant à ν est 0, la suite $\text{Im } \bar{u}^n$ serait strictement décroissante, donc la suite de leurs images réciproques $u^n(E) + E_\infty$ serait strictement décroissante, donc la suite des $\text{Im } u^n$ ne pourrait pas être stationnaire à partir d'un rang ν . Ainsi, $\bar{u}$ est un isomorphisme de E/E_∞ sur E/E_∞ : en particulier $\bar{u}^\nu(E/E_\infty) = E/E_\infty$ ce qui s'écrit $\text{Im } u^\nu + E_\infty = E$, c'est-à-dire, $E_\infty \oplus F_\infty = E$. De plus, dire que $\bar{u}$ est un isomorphisme signifie alors que u induit un isomorphisme sur F_∞ . D'autre part, comme u^ν est nul sur E_∞ , la restriction de u à E_∞ est bien nilpotente.

Enfin, on démontre que si de plus $\dim(\text{Ker } u^\nu) (= \dim E_\infty) < +\infty$ alors la dimension du noyau de u est égale à la codimension de son image. Il suffit de le vérifier séparément pour les restrictions de u à E_∞ et F_∞ . Or, dans l'espace de dimension finie E_∞ , le résultat résulte de ce qui précède, d'autre part u induisant un isomorphisme de F_∞ la codimension de l'image et le noyau de la restriction de u à F_∞ sont tous les deux nuls. On fait le même raisonnement pour u^n avec n quelconque ≥ 0 ; puisque u^n vérifie des propriétés analogues à u (ou bien l'on applique le théorème 1.2).

II. PROPRIETES TOPOLOGIQUES DES OPERATEURS A INDICE.

Pour simplifier, tous les espaces vectoriels topologiques introduits dans ce paragraphe ont pour corps de base $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 2.1.

Soient E et F deux espaces de Fréchet, u un opérateur linéaire continu de E dans F tel que $\text{Im } u$ admette un supplémentaire (algébrique) fermé dans F . Alors $\text{Im } u$ est fermée dans F .

Démonstration : Soit G un supplémentaire (algébrique) fermé de $\text{Im } u$ dans F , c'est-à-dire $F = \text{Im } u \oplus G$. L'opérateur $u + I_G$ de $E \times G$ dans F défini par $(u + I_G)(x, y) = u(x) + y$ est un opérateur linéaire, continu, surjectif de l'espace de Fréchet $E \times G$ dans l'espace de Fréchet F : c'est donc une application ouverte. Or, le complémentaire de $\text{Im } u$ dans F est l'ouvert $(u + I_G)\{E \times (G - \{0\})\}$. Par suite, $\text{Im } u$ est fermée dans F . De plus, la somme directe algébrique $\text{Im } u \oplus G$ est une somme directe topologique.

Théorème 2.2.

Soient E et F deux espaces de Fréchet, u un opérateur linéaire continu de E dans F . Si u est à indice de E dans F , alors $\text{Im } u$ est fermée dans F .

Démonstration : C'est un simple corollaire du théorème 3.1 puisque $\text{Im } u$ est de codimension finie.

Théorème 2.3.

Soient E et F deux espaces de Fréchet, E' et F' leurs duals topologiques respectifs. Soient u un opérateur linéaire et continu de E dans F , u' l'opérateur transposé topologique de u de F' dans E' . Alors, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) u est un opérateur à indice de E dans F .

2) $\text{Im } u$ est fermée dans F , $\text{Ker } u$ et $\text{Ker } u'$ sont de dimensions finies.

Dans ce cas, u' est un opérateur à indice de F' dans E' et $\chi(u) = \chi(u') = \dim \text{Ker } u - \dim \text{Ker } u'$.

Démonstration :

1 $\implies$ 2 : soit u un opérateur à indice de E dans F : $\text{Ker } u$ est de dimension finie et $\text{Im } u$ est fermée dans F ($\text{Im } u$ est fortement et faiblement fermée dans F). D'autre part, $\text{Ker } u'$ est l'orthogonal de $\text{Im } u$ dans F' . Comme $\text{Im } u$ est faiblement fermée dans F et est de codimension finie dans F ; on a donc $\dim \text{Ker } u' = \text{codim } \text{Im } u < +\infty$.

2 $\implies$ 1 : soit u un opérateur de E dans F tel que $\text{Im } u$ soit fermée dans F , tel que $\text{Ker } u$ et $\text{Ker } u'$ soient de dimensions finies. L'adhérence faible de $\text{Im } u$ dans F est l'orthogonal de $\text{Ker } u'$ dans F . Or $\text{Im } u$ étant fermée dans F , on en déduit que $\text{Im } u$ est l'orthogonal de $\text{Ker } u'$ dans F ; on a donc, $\text{codim } \text{Im } u = \dim \text{Ker } u' < +\infty$.

De ce qui précède, on déduit que $\chi(u) = \dim \text{Ker } u - \dim \text{Ker } u'$. D'autre part, l'adhérence faible de $\text{Im } u'$ dans E' est l'orthogonal de $\text{Ker } u$ dans E' . Or $\text{Im } u$ étant fermée (fortement et faiblement) dans F , $\text{Im } u'$ est fermée (fortement et faiblement) dans E' (et c'est équivalent). Par suite, $\text{Im } u'$ est l'orthogonal de $\text{Ker } u$ dans E' ; donc $\text{codim } \text{Im } u' = \dim \text{Ker } u < +\infty$.

Ainsi, si u est un opérateur à indice de E dans F , u' est un opérateur à indice de F' dans E' et $\chi(u) = -\chi(u') = \dim \text{Ker } u - \dim \text{Ker } u'$.

Remarque 2.1 : Si u' est un opérateur à indice de F' dans E' , on ne peut pas affirmer de façon générale que u est un opérateur à indice de E dans F . Ce sera vrai si et seulement si $\text{Im } u'$ est fermée (fortement ou faiblement) dans E' . Cette condition supplémentaire étant automatiquement vérifiée si F' et E' sont des espaces de Fréchet d'après le théorème 2.1.

Théorème 2.4. (Riesz)

Soit E un espace de Fréchet et u un opérateur compact de E dans E .
Alors, $I_E + u$ est un opérateur à indice de E dans E d'indice $\chi(I_E + u) = 0$.

Démonstration : soit V un voisinage de 0 tel que $u(V)$ soit relativement compact dans E . Soit $W = V \cap \text{Ker} (I_E + u)$. On a : $W = (I_E + u - u)(W) = -u(W) \subset -u(V)$ ainsi W est relativement compact, donc précompact. Par conséquent, $\text{Ker} (I_E + u)$ admet un voisinage de 0 précompact, il est donc de dimension finie. L'opérateur transposé u' est un opérateur compact de E' dans E' muni de la topologie forte. Comme $(I_E + u)' = I_{E'} + u'$ la démonstration précédente appliquée à E' et à u' montre que $\text{Ker} (I_E + u)'$ est de dimension finie. On montre maintenant que $\text{Im} (I_E + u)$ est fermée dans E . Considérons un supplémentaire topologique fermé F de $\text{Ker} (I_E + u)$ dans E : ce supplémentaire existe car $\text{Ker} (I_E + u)$ est de dimension finie. Considérant la restriction de u à cet espace F , on doit démontrer que $(I_E + u) F$ est fermé dans E , $I_E + u$ étant maintenant injectif sur F . Soit V un voisinage de 0 convexe et ouvert dans F tel que $u(V)$ soit relativement compact dans E . Soit $p_V(x) = \inf \{ \rho : \rho > 0, x \in \rho V \}$ la jauge de V ; p_V est finie et est continue. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de F telle que $(I_E + u) x_n$ converge vers y dans E : on veut montrer qu'il existe x dans F tel que $y = (I_E + u)x$. Si $\sup_n p_V(x_n) \leq M < +\infty$, alors $(u(x_n))_{n \geq 0}$ est contenu dans l'ensemble relativement compact $M u(V)$; il existe donc une sous-suite $(u(x_{n'}))_{n' \geq 0}$ qui converge vers z dans E et donc $(x_{n'})_{n' \geq 0}$ converge vers $x = y - z$ dans F et on a $y = (I_E + u)x$. Sinon, si $\sup_n p_V(x_n) = +\infty$, il existe une sous-suite $(x_{n'})_{n' \geq 0}$ telle que $\lim_{n'} p_V(x_{n'}) = +\infty$ et donc $(I_E + u) \left(\frac{x_{n'}}{p_V(x_{n'})} \right)$ tend vers 0 dans E . Le raisonnement précédent montre qu'il existe x appartenant à F tel que $\lim_{n'} (x_{n'}' / p_V(x_{n'})) = x$, donc puisque p_V est continue, on a $p_V(x) = 1$. Or, $(I_E + u)x = 0$, c'est-à-dire, $x = 0$, ce qui contredit le fait que $p_V(x) = 1$.

Ainsi, $I_E + u$ est un opérateur à indice de E dans E . Il reste à montrer que $\chi(I_E + u) = 0$. D'après le théorème 1.6, il suffit de démontrer que la suite $(\text{Ker } (I_E + u)^n)_{n \geq 0}$ et la suite $(\text{Im } (I_E + u)^n)_{n \geq 0}$ sont stationnaires à partir d'un certain rang. On démontre tout d'abord ce résultat lorsque E est un espace de Banach, puis on en déduit le cas général où E est un espace de Fréchet :

1er cas : E est un espace de Banach. On procède par l'absurde : si la suite $(\text{Ker } (I_E + u)^n)_{n \geq 0}$ était strictement croissante, on pourrait trouver une suite $(y_n)_{n \geq 0}$ telle que y_n appartienne à $\text{Ker } (I_E + u)^n$, $\|y_n\| \leq 1$, ($\|\cdot\|$ étant la norme de E) et telle que la distance de y_n à $\text{Ker } (I_E + u)^n$ soit au moins égale à $1/2$. On aurait alors pour $m > n$, $u(y_n) - u(y_m) = y_m - x$ où $x = (I_E + u)y_m - u(y_n)$ qui appartient à $\text{Ker } (I_E + u)^m$ par suite $\|y(y_n) - u(y_m)\| \geq \frac{1}{2}$. Or, la suite $(u(y_n))_{n \geq 0}$ est relativement compacte : elle doit donc admettre une valeur d'adhérence, ce qui contredit l'inégalité précédente. Ainsi, la suite $(\text{Ker } (I_E + u)^n)_{n \geq 0}$ est stationnaire à partir d'un certain rang. Appliquant le même raisonnement à $(I_E + u)' = I_{E'} + u'$ dans E' , avec u' compact de E' dans E' , on voit que la suite $(\text{Ker } ((I_E + u)')^n)_{n \geq 0}$ est stationnaire à partir d'un certain rang. Or $((I_E + u)')^n = ((I_E + u)^n)'$ donc l'adhérence de $\text{Im } ((I_E + u)^n)$ dans E est l'orthogonal de $\text{Ker } ((I_E + u)')^n$ dans E . Mais $(I_E + u)^n = I_E + u_n$ où u_n est un opérateur compact de E dans E ; si bien que $\text{Im } (I_E + u)^n$ est fermée dans E et la suite $(\text{Im } (I_E + u)^n)_{n \geq 0}$ est aussi stationnaire à partir d'un certain rang.

2ème Cas : E est un espace de Fréchet. Soient V un voisinage de 0 et A une partie convexe équilibrée et compacte de E tels que $u(V) \subset A$. Soit E_A l'espace vectoriel engendré par A et muni de la semi-norme jauge de A :

$p_A(x) = \inf_{\lambda > 0, x \in \lambda A} \lambda$; en fait, p_A est une norme sur E_A car A est bornée. De plus, c'est une norme d'espace de Banach sur E_A : pour montrer cela, on

commence par remarquer que, puisque A est fermée dans E , A est exactement la boule unité fermée de E_A , ensuite, puisque A est compacte, que l'injection canonique $\varphi: E_A \longrightarrow E$ est compacte, donc continue, et enfin, que si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E_A , alors $(x_n)_n$ est convergente dans E_A . En effet, par homothétie, on peut toujours se ramener au cas où $x_n \in A$ pour tout n , et A étant compacte dans l'espace de Fréchet E , on peut donc extraire une sous-suite $(x_{n_k})_k$ convergente vers $x \in A$ dans E ; par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que si k et $k' \geq k_0$, alors $p_A(x_{n_k} - x_{n_{k'}}) \leq \varepsilon$ i.e. : $x_{n_k} \in x_{n_{k'}} + B_f(0, \varepsilon)$, où $B_f(0, \varepsilon)$ désigne la boule fermée de centre 0 et de rayon ε dans E_A ; comme $B_f(0, 1) = A$ est fermée dans E , il en résulte que $x_{n_k} + B_f(0, \varepsilon)$ est fermé dans E et donc si l'on fait tendre k vers $+\infty$, on obtient que, pour tout $k' \geq k_0$, $x \in x_{n_{k'}} + B_f(0, \varepsilon)$ i.e. : $p_A(x - x_{n_{k'}}) \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $(x_{n_k})_k$ est convergente dans E_A vers x ; il en est donc de même de toute la suite $(x_n)_n$.

Soit maintenant u_0 l'application de E dans E_A induite par u . Il résulte de ce qui précède que l'opérateur $u_0 \circ \varphi$, induit par u , est compacte de l'espace de Banach E_A dans lui-même. Par suite, le raisonnement fait lorsque E est un espace de Banach (cf. 1er cas) montre que la suite $(\text{Ker}(I_{E_A} + u_0 \circ \varphi)^n)_{n \geq 0}$ est stationnaire à partir d'un certain rang. Comme $\text{Ker}(I_E + u)^n = \text{Ker}(I_{E_A} + u_0 \circ \varphi)^n$, on a donc démontré que la suite $(\text{Ker}(I_E + u)^n)_{n \geq 0}$ est stationnaire à partir d'un certain rang. On termine ensuite comme lorsque E est un espace de Banach (cf. 1er cas).

Ce qui termine la démonstration du théorème 2.4.

Corollaire 2.1 (alternative de Riesz-Fredholm) :

Soient E un espace de Fréchet et u un opérateur compact de E dans E . Pour λ appartenant à $\mathbb{C} - \{0\}$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) $u - \lambda I_E$ est un isomorphisme de E sur E

2) $u - \lambda I_E$ est surjectif de E sur E.

3) $u - \lambda I_E$ est injectif de E dans E.

Démonstration : le théorème 2.4 assure que $\dim \text{Ker } (u - \lambda I_E) = \text{codim Im } (u - \lambda I_E)$; ce qui, joint au théorème d'isomorphisme de Banach, démontre le corollaire 2.1.

Remarque 2.2 : on en déduit que tout λ non nul du spectre de u , c'est-à-dire tel que $u - \lambda I_E$ ne soit pas inversible dans l'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans E, est une valeur propre de u , c'est-à-dire tel que $\text{Ker } (u - \lambda I_E) \neq \{0\}$.

Corollaire 2.2.

Soient E un espace de Fréchet et u un opérateur compact de E dans E. Alors le spectre de u est fini ou est fermé de 0 et des points d'une suite qui converge vers 0.

Démonstration : 1er cas : on suppose que E est un espace de Banach. Par définition, le spectre $\sigma(u)$ de u est l'image réciproque par l'application $\lambda \longrightarrow u - \lambda I_E$ de l'ensemble des éléments non inversibles de l'espace des applications linéaires continus de E dans E. E étant un espace de Banach, il est facile de voir que cet ensemble est fermé : il en est donc de même de $\sigma(u)$. De plus, si $|\lambda| > \|u\|$ (norme de l'espace des applications linéaires continus de E dans E), $u - \lambda I_E$ est inversible : donc λ n'appartient pas à $\sigma(u)$. Ainsi $\sigma(u)$ est fermé et borné : il est donc compact.

Soit λ non nul appartenant à $\sigma(u)$: on va montrer que λ est un point isolé de $\sigma(u)$. Soit $E_\lambda = \bigcup_{n \geq 0} \text{Ker } (u - \lambda I_E)^n$ et $F_\lambda = \bigcap_{n \geq 0} \text{Im } (u - \lambda I_E)^n$ (en fait, d'après le théorème 2.4, il existe v tel que $E_\lambda = \text{Ker } (u - \lambda I_E)^v$ et $F_\lambda = \text{Im } (u - \lambda I_E)^v$). On vérifie que E est somme directe (topologique) des deux sous-espaces vectoriels E_λ et F_λ qui sont fermés et stables par u .

Soient u_1 et u_2 les opérateurs induits par u sur E_λ et F_λ respectivement. On a $\sigma(u) = \sigma(u_1) \cup \sigma(u_2)$. Or $\sigma(u_1)$ est réduit à $\{\lambda\}$: en effet, λ appartient évidemment à $\sigma(u_1)$ et si $\mu \neq \lambda$, alors $(u_1 - \mu I_E)$ est injectif sur E_λ : pour montrer cela, soit x appartenant à $\text{Ker } (u - \lambda I_E)^v$ tel que $(u_1 - \mu I_E)x = 0$, donc $0 = (u_1 - \mu I_E)(u - \lambda I_E)^{v-1}x = (\lambda - \mu)(u - \lambda I_E)^{v-1}x$ et de proche en proche, on en déduit que $x = 0$. D'autre part, $\sigma(u_2)$ est compact (d'après ce qui précède) et ne contient pas λ : en effet, si λ appartient à $\sigma(u_2)$, il existe x non nul tel que x appartienne à $\text{Im } (u - \lambda I_E)^v$ et $(u - \lambda I_E)x = 0$, donc $(u - \lambda I_E)^v x = 0$ c'est-à-dire, x appartient à $E_\lambda \cap F_\lambda$. Ceci prouve donc que λ est isolé dans $\sigma(u)$.

Ce qui termine la démonstration du corollaire 2.2 dans le cas où E est un espace de Banach.

2ème Cas : E est un espace de Fréchet. On utilise les notations de la démonstration du théorème 2.4 (cf. 2ème cas). Tout d'abord, on remarque que $\sigma(u) - \{0\} = \sigma(u_0 \circ \varphi) - \{0\}$. En effet, si $\lambda \neq 0$ appartient à $\sigma(u)$, alors λ appartient à $\sigma(u_0 \circ \varphi)$ et inversement, car $\text{Ker } (u - \lambda I_E) = \text{Ker } (u_0 \circ \varphi - \lambda I_{E_A})$. Deux cas peuvent alors se produire : ou bien $0 \notin \sigma(u)$ et alors E est de dimension finie et donc $\sigma(u)$ est fini, ou bien $0 \in \sigma(u)$ et alors, d'après l'égalité $\sigma(u) - \{0\} = \sigma(u_0 \circ \varphi) - \{0\}$ et du 1er cas, on déduit que $\sigma(u)$ est ou bien fini, ou bien fermé de 0 et d'une suite de points tendant vers 0.

Corollaire 2.3.

Soient E et F deux espaces de Fréchet et u un opérateur linéaire continu et à indice de E dans F . Alors, pour tout opérateur compact v de E dans F , $u+v$ est un opérateur à indice de E dans F , d'indice $\chi(u+v) = \chi(u)$.

Démonstration : soit u un opérateur linéaire continu et à indice de E dans F . D'après le théorème 1.3, il existe w linéaire de F dans E tel que $I_F - u \circ w$

soit un opérateur de rang fini de F dans F et $I_E - w \circ u$ soit un opérateur de rang fini de E dans E . De plus, w est un opérateur à indice de F dans E , d'indice $\chi(w) = -\chi(u)$. Il est facile de voir que l'on peut choisir w continu de F dans E dès que u est continu de E dans F . Par suite, $(u+v) \circ w = I_F - (I_F - (u+v) \circ w)$. Or, $I_F - (u+v) \circ w = I_F - u \circ w - v \circ w$ est un opérateur compact de F dans F , donc d'après le théorème 2.4, $(u+v) \circ w$ est un opérateur à indice de F dans F et d'indice $\chi((u+v) \circ w) = 0$. Enfin, d'après le théorème 1.2, on en déduit que $u+v$ est un opérateur à indice de E dans F d'indice $\chi(u+v) = -\chi(w) = \chi(u)$.

Corollaire 2.4.

Soient E et F deux espaces de Fréchet et u un opérateur linéaire continu de E dans F . Alors, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) u est un opérateur à indice de E dans F .
- 2) u est inversible modulo les opérateurs compacts.

Démonstration :

1 $\implies$ 2 : ceci résulte du théorème 1.3 puisqu'un opérateur de rang fini est compact.

2 $\implies$ 1 : on suppose qu'il existe un opérateur linéaire continu v_1 de F dans E et un opérateur v_2 linéaire continu de F dans E tels que $I_E - v_1 \circ u$ soit un opérateur compact de E dans E et $I_F - u \circ v_2$ soit un opérateur compact de F dans F .

On a : $\text{Ker } u \subset \text{Ker } (v_1 \circ u) = \text{Ker } (I_E - (I_E - v_1 \circ u))$. Or, l'opérateur $I_E - (I_E - v_1 \circ u)$ est un opérateur à indice, d'après le théorème 2.4 donc $\dim \text{Ker } u < +\infty$.

On a : $\text{Im } u \supset \text{Im } (u \circ v_2) = \text{Im } (I_F - (I_F - u \circ v_2))$. Or, l'opérateur $I_F - (I_F - u \circ v_2)$ est un opérateur à indice d'après le théorème 2.4, donc $\text{codim Im } u < +\infty$.

Ainsi, u est un opérateur à indice de E dans F .

Corollaire 2.5.

Soient E et F deux espaces de Fréchet et u un opérateur linéaire et continu de E dans F . Alors, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) u est un opérateur à indice de E dans F d'indice nul,
- 2) il existe un opérateur compact v de E dans F tel que $u+v$ soit un isomorphisme de E sur F .

Démonstration :

$2 \implies 1$: s'il existe un opérateur compact v de E dans F tel que $u+v$ soit un isomorphisme de E sur F , alors d'après le corollaire 2.3, $u = u+v-v$ est un opérateur à indice de E dans F d'indice nul.

$1 \implies 2$: soit u un opérateur linéaire continu et à indice de E dans F d'indice nul donc $\dim \text{Ker } u = \text{codim Im } u < +\infty$. Soient E_1 un supplémentaire topologique de $\text{Ker } u$ dans E , $E = \text{Ker } u \oplus E_1$, et F_1 tel que $F = F_1 \oplus \text{Im } u$. $\text{Ker } u$ et F_1 ayant même dimension finie, il est possible de construire un isomorphisme v_1 algébrique, donc topologique de $\text{Ker } u$ sur F_1 . Soit v l'opérateur de rang fini, donc compact de E dans F défini par $v(x) = v_1(x)$ si x appartient à $\text{Ker } u$ et $v(x) = 0$ si x appartient à E_1 . L'opérateur $u+v$ est alors surjectif de E sur F , comme il est d'indice nul de E sur F , c'est un isomorphisme de E sur F .

Théorème 2.5.

Soient E et F deux espaces de Fréchet dont un au moins est un espace de Banach. Pour tout entier n de $\mathbb{Z}$, l'ensemble des opérateurs linéaires continus à indice de E dans F , d'indice n est un ouvert de l'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E .

Démonstration :

1er Cas : On suppose que F est un espace de Banach. Soit u un opérateur linéaire continu à indice de E dans F . D'après le théorème 1.3, il existe un opérateur v linéaire à indice de F dans E , d'indice $\chi(v) = -\chi(u)$ et tel que $I_F - u \circ v$ soit de rang fini de F dans F . Il est facile de voir que v peut être choisi continu de F dans E . Il existe un voisinage ouvert de 0 dans l'espace des opérateurs linéaires et continus de F dans F tel que pour tout w appartenant à ce voisinage, $I_F + w$ soit un isomorphisme de F sur F . Comme l'application $w \longrightarrow w \circ v$ est linéaire et continue de l'espace des applications linéaires et continues de E dans F dans l'espace des applications linéaires et continues de F dans F , on déduit qu'il existe un voisinage ouvert W de 0 dans l'espace des applications linéaires et continues de E dans F tel que pour tout w appartenant à W , l'opérateur $I_F + w \circ v$ soit un isomorphisme de F sur F . Or $(u+w) \circ v = I_F + w \circ v - (I_F - u \circ v)$. Donc, d'après le corollaire 2.3, l'opérateur $(u+w) \circ v$ est un opérateur à indice de E dans F d'indice nul. D'après le théorème 1.2, on déduit que $u+w$ est un opérateur à indice de E dans F , d'indice $\chi(u+w) = -\chi(v) = \chi(u)$.

Ainsi, l'ensemble des opérateurs linéaires continus et à indice de E dans F , d'indice r est un ouvert de l'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans F .

2ème Cas : On suppose que E est un espace de Banach. Soit u un opérateur linéaire continu à indice de E dans F . D'après le théorème 1.3, il existe un opérateur v linéaire à indice de F dans E , d'indice $\chi(v) = -\chi(u)$, tel que $I_E - v \circ u$ soit de rang fini de E dans E . De plus, v peut être choisi continu de F dans E . Il existe un voisinage ouvert de 0 dans l'espace des opérateurs linéaires continus de E dans E tel que pour tout w appartenant à ce voisinage, $I_E + w$ soit un isomorphisme de E sur E . Comme l'application

$w \longrightarrow v \circ w$ est linéaire et continue de l'espace des opérateurs linéaires continus de E dans F dans l'espace des opérateurs linéaires continus de E dans E , on déduit qu'il existe un voisinage W de 0 dans l'espace des applications linéaires et continues de E dans F tel que pour tout w appartenant à W , l'opérateur $I_E + v \circ w$ soit un isomorphisme de E sur E . On termine comme dans le 1er cas.

Corollaire 2.6.

Soient E et F deux espaces de Fréchet, dont un au moins est un espace de Banach. Alors, l'ensemble des opérateurs linéaires continus et à indice de E dans F est un ouvert de l'espace des opérateurs linéaires continus de E dans F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E .

Démonstration : Ceci résulte immédiatement du théorème 2.5.

Corollaire 2.7.

Soient E et F deux espaces de Fréchet, dont un au moins est un espace de Banach. Alors, l'application indice X est continue de l'ensemble des opérateurs linéaires continus et à indice de E dans F , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E , dans $\mathbb{Z}$.

Démonstration : Ceci résulte immédiatement du théorème 2.5.

Corollaire 2.8.

Soient E et F deux espaces de Fréchet, dont un au moins est un espace de Banach. Alors, pour tout entier n de $\mathbb{Z}$, l'ensemble des opérateurs linéaires continus et à indice de E dans F d'indice n est réunion de composantes connexes de l'ensemble des opérateurs linéaires continus à indice de E dans F .

Démonstration : Ceci résulte immédiatement du corollaire 2.7.

Corollaire 2.9.

Soient E et F deux espaces de Fréchet dont un est un espace de Banach et tels que le groupe des isomorphismes de E soit connexe par arcs. Alors, les composantes connexes de l'ensemble des opérateurs linéaires continus et à indice de E dans F sont exactement les ensembles des opérateurs linéaires continus et à indice de E dans F , d'indice n pour n décrivant $\mathbb{Z}$.

Démonstration : On montre tout d'abord que si u_0 et u_1 sont deux opérateurs linéaires continus et à indice de E dans F d'indice n , ayant même image M , il existe un arc $\{u_t ; 0 \leq t \leq 1\}$ joignant u_0 à u_1 , dans l'ensemble des opérateurs linéaires continus et à indice de E dans F . Soient les décompositions en sommes directes topologiques de E , $E = \text{Ker } u_0 \oplus G_0$ et $E = \text{Ker } u_1 \oplus G_1$. Comme $\dim \text{Ker } u_0 = X(u_0) + \text{codim Im } u_0 = X(u_1) + \text{codim Im } u_1 = \dim \text{Ker } u_1$, il existe un isomorphisme h de $\text{Ker } u_0$ sur $\text{Ker } u_1$. Comme u_1/G_1 est un isomorphisme de G_1 sur M , $i=0,1$, $u = \{u_1/G_1\}^{-1} \circ \{u_0/G_0\}$ est un isomorphisme de G_0 sur G_1 . Cet isomorphisme et h donnent un isomorphisme g de E sur E caractérisé par $g/\text{Ker } u_0 = h$ et $g/G_0 = u$. Soit $\{g_t ; 0 \leq t \leq 1\}$ un arc joignant g à I_E dans le groupe des isomorphismes de E sur E . Alors, $v_t = u_1 \circ g_t$ est un opérateur à indice de E dans F , d'indice n et $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$.

On montre maintenant que si u est un opérateur linéaire et continu à indice de E dans F d'indice n et si M est un sous-espace fermé de $\text{Im } u$ de codimension finie dans F , il existe v dans la même composante connexe de l'ensemble des opérateurs linéaires continus et à indice de E dans F que u et tel que $\text{Im } v = M$. Soit p un projecteur continu de F sur M et soit $v = p \circ u$. Si $q = I_F - p$, $tq \circ u$ est un opérateur de rang fini pour tout t de $[0,1]$ et $u_t = v + tq \circ u$ est un arc joignant $u_0 = v$ à $u_1 = u$ dans l'ensemble des opérateurs linéaires continus à indice de E dans F .

On en déduit facilement le corollaire 2.9 (puisque si u_1 et u_2 sont deux opérateurs linéaires continus et à indice de E dans F , d'indice n , $M = \text{Im } u_1 \cap \text{Im } u_2$ est un sous-espace fermé de $\text{Im } u_1$ et de $\text{Im } u_2$ et de codimension finie dans F).

Remarque 2.3 :

- si E est un espace de Banach, alors le groupe des isomorphismes est connexe par arcs si et seulement s'il est connexe.

- si E est un espace de Hilbert, alors le groupe des isomorphismes de E est connexe (cf. [12], [13]). Il en est de même lorsque $E = C_0$ (cf. [1], [16]), $E = \ell_p$ (cf. [16]), $E = C([0,1])$, $E = L^p([0,1])$ (cf. [7]).

Par contre, pour $E = C_0 \oplus \ell^2$ ce n'est pas vrai (cf. [6]) ; en fait, l'ensemble des opérateurs linéaires continus à indice de E dans E d'indice n n'est pas connexe (cf. [13]).

Remarque 2.4 : Certains résultats donnés ici peuvent être étendus à des espaces plus généraux que des espaces de Fréchet, (cf. [10] par exemple).

III. UNE APPLICATION A L'INTERPOLATION.

On se limitera à l'interpolation entre espaces de Banach. On rappelle tout d'abord quelques définitions et propriétés élémentaires de l'interpolation. (Pour plus de détails, on renvoie par exemple à [8'], [15]).

Définition 3.1.

On appelle couple compatible d'espaces de Banach, la donnée de :

- 1) un couple d'espaces de Banach A_1 et A_2
- 2) un espace localement convexe séparé $\mathcal{B}$.
- 3) deux applications injectives et continues j_1 de A_1 dans $\mathcal{B}$ pour $i=1,2$.

Ce couple compatible sera noté (A_1, A_2) .

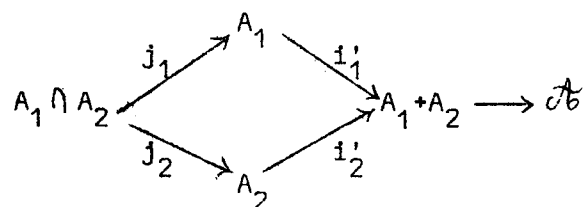
On peut alors considérer A_1 et A_2 comme des sous-espaces de $\mathcal{B}$.

Après identification, on peut définir $A_1 \cap A_2$ et $A_1 + A_2$. On a alors :

Proposition 3.1.

$A_1 \cap A_2$ muni de la norme $\|a\|_{A_1 \cap A_2} = \|a\|_{A_1} + \|a\|_{A_2}$ est un espace de Banach et $A_1 + A_2$ muni de la norme $\|a\|_{A_1 + A_2} = \inf_{\substack{a_1 \in A_1 \\ a_2 \in A_2 \\ a = a_1 + a_2}} (\|a_1\|_{A_1} + \|a_2\|_{A_2})$ est un espace de Banach.

Le diagramme suivant est commutatif :



et chaque flèche représente une injection continue.

Définition 3.2.

Soit (A_1, A_2) un couple compatible d'espaces de Banach. On dit qu'un espace de Banach A est un espace intermédiaire pour le couple (A_1, A_2) s'il

existe des applications injectives continues de $A_1 \cap A_2$ dans A et de A dans $A_1 + A_2$.

c'est-à-dire, si l'on a les inclusions algébriques et topologiques suivantes :

$$A_1 \cap A_2 \subset A \subset A_1 + A_2.$$

Par exemple, A_1 et A_2 sont des espaces intermédiaires.

Définition 3.3.

Un foncteur d'interpolation sur les espaces de Banach est une application ϕ qui à tout couple compatible (A_1, A_2) fait correspondre un espace de Banach $\phi(A_1, A_2)$ tel que :

- 1) $\phi(A_1, A_2)$ est un espace intermédiaire pour le couple (A_1, A_2) ;
- 2) Si (B_1, B_2) est un autre couple compatible, si Π est un opérateur linéaire continu de $A_1 + A_2$ dans $B_1 + B_2$ tel que la restriction de Π à A_i soit linéaire continue de A_i dans B_i pour $i=1,2$, alors la restriction de Π à $\phi(A_1, A_2)$ est linéaire continue de $\phi(A_1, A_2)$ dans $\phi(B_1, B_2)$.

Par exemple, ϕ_n et ϕ_+ définis par $\phi_n(A_1, A_2) = A_1 \cap A_2$ et $\phi_+(A_1, A_2) = A_1 + A_2$ sont deux foncteurs d'interpolation.

Soit (A_1, A_2) un couple compatible et N un sous-espace vectoriel de $A_1 \cap A_2$, fermé dans A_1 et fermé dans A_2 . Par suite, les espaces A_1/N , A_2/N et $A_1/N + A_2/N$ munis des normes habituelles sont des espaces de Banach (notons que $A_1/N + A_2/N$ peut s'écrire aussi $(A_1 + A_2)/N$) et le couple $(A_1/N, A_2/N)$ est un couple compatible. Soit Π l'application canonique de $A_1 + A_2$ sur $A_1/N + A_2/N$. La restriction de Π à A_i est linéaire et continue de A_i dans A_i/N pour $i=1,2$. Par suite, pour tout foncteur d'interpolation ϕ , la restriction de Π à $\phi(A_1, A_2)$ est linéaire continue de $\phi(A_1, A_2)$ dans $\phi(A_1/N, A_2/N)$. Comme Π est linéaire continue et surjective de $\phi(A_1, A_2)$ sur $\phi(A_1/N, A_2/N)$, c'est que $\phi(A_1, A_2)/N$ s'injecte dans $\phi(A_1/N, A_2/N)$.

La proposition suivante donne une condition (restrictive mais vérifiée dans les applications) qui est suffisante pour que ces deux espaces coïncident :

Proposition 3.2.

Soient (A_1, A_2) un couple compatible et N un sous-espace vectoriel de dimension finie de $A_1 \wedge A_2$. Alors, pour tout foncteur d'interpolation ϕ les espaces $\phi(A_1, A_2)/N$ et $\phi(A_1/N, A_2/N)$ s'identifient algébriquement et topologiquement.

Démonstration : L'espace $\phi(A_1, A_2)/N$ est muni de sa norme quotient qui en fait un espace de Banach (N est fermé dans $\phi(A_1, A_2)$).

Soient $(z_1, \dots, z_n)$ une base de N et $z'_1, \dots, z'_n$ des éléments de $A'_1 \wedge A'_2$ (où A'_i est le dual topologique de A_i pour $i=1,2$) tels que $\langle z'_i, z_j \rangle_{(A'_1 \wedge A'_2) \times (A_1 + A_2)} = \delta_{ij}$ pour $i, j=1, \dots, n$. Pour $\bar{a}$ appartenant à $(A_1 + A_2)/N$, on pose :

$$R \bar{a} = a - \sum_{i=1}^n z_i \langle z'_i, a \rangle_{(A'_1 \wedge A'_2) \times (A_1 + A_2)}$$

où a est un représentant quelconque de la classe $\bar{a}$ (il est facile de vérifier que le deuxième membre ne dépend que de la classe $\bar{a}$ et non du représentant a). L'application R envoie $A_1/N + A_2/N$ dans $A_1 + A_2$ de façon linéaire et continue et la restriction de R à A_1/N envoie A_1/N dans A_1 de façon linéaire et continue pour $i=1,2$. Par suite, pour tout foncteur d'interpolation ϕ , la restriction de R à $\phi(A_1/N, A_2/N)$ est linéaire continue de $\phi(A_1/N, A_2/N)$ dans $\phi(A_1, A_2)$. De plus, Π est une application linéaire et continue de $\phi(A_1, A_2)$ dans $\phi(A_1, A_2)/N$. Donc, $\Pi \circ R$ est une application linéaire continue de $\phi(A_1/N, A_2/N)$ dans $\phi(A_1, A_2)/N$ et qui coïncide avec l'identité. En conséquence, les espaces $\phi(A_1/N, A_2/N)$ et $\phi(A_1, A_2)/N$ sont identiques algébriquement et comme l'application identique de $\phi(A_1/N, A_2/N)$ sur $\phi(A_1, A_2)/N$ est continue, ces deux espaces s'identifient aussi topologiquement.

Remarque 3.1.

Soit N' un sous-espace vectoriel de $A_1' \cap A_2'$ de dimension finie. Si l'on note $\{A_1 ; N'\}$ l'ensemble orthogonal $\{a \in A_1 ; \langle z', a \rangle_{A_1' \times A_1} = 0, z' \in N'\}$ qui est un sous-espace fermé de A_1 , alors pour tout foncteur d'interpolation ϕ , les espaces $\{\phi(A_1, A_2) ; N'\}$ et $\phi(\{A_1 ; N'\}, \{A_2 ; N'\})$ s'identifient algébriquement et topologiquement. En effet, soient $(z_1', \dots, z_n')$ une base de N' et $z_1, \dots, z_n$ des éléments de $A_1 \cap A_2$ tels que $\langle z_i', z_j \rangle_{(A_1' + A_2') \times (A_1 \cap A_2)} = \delta_{ij}$ pour $i, j = 1, \dots, n$. Soit N le sous-espace engendré par $z_1, \dots, z_n$. Pour $i = 1, 2$, on a les décompositions en somme directe topologique : $A_i = N \oplus \{A_i ; N'\}$ et les isomorphismes entre $\{A_i ; N'\}$ et A_i/N si bien que $\phi(\{A_1 ; N'\}, \{A_2 ; N'\})$ s'identifie à $\phi(A_1/N, A_2/N)$ et on a la décomposition en somme directe topologique $\phi(A_1, A_2) = N \oplus \{\phi(A_1, A_2) ; N'\}$ et l'isomorphisme entre $\{\phi(A_1, A_2) ; N'\}$ et $\phi(A_1, A_2)/N$ si bien que $\{\phi(A_1, A_2) ; N'\}$ s'identifie à $\phi(A_1, A_2)/N$. La proposition 3.2 permet alors de conclure.

On aura besoin de la proposition suivante :

Proposition 3.3.

Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach, tels que :

- 1) E_2 s'injecte continuellement dans E_1 avec E_2 dense dans E_1 ;
- 2) A_i est un sous-espace fermé de E_i , pour $i = 1, 2$;
- 3) $A_2 = A_1 \cap E_2$.

Alors, si A_1 est de codimension finie dans E_1 ou si A_2 est de codimension finie dans E_2 , ces deux codimensions sont égales.

Démonstration : soit j l'injection continue de E_2 dans E_1 . On lui associe une application $\bar{j}$ linéaire et continue de E_2/A_2 dans E_1/A_1 par $\bar{j}(x_2 + A_2) = j(x_2) + A_1$ pour x_2 dans E_2 . D'après l'hypothèse 3, il est facile de voir que $\bar{j}$ est une injection de E_2/A_2 dans E_1/A_1 . D'autre part, d'après l'hypothèse 1, il est facile de voir que $\bar{j}(E_2/A_2)$ est dense dans E_1/A_1 .

Supposons que A_1 soit de codimension finie dans E_1 donc $\dim E_1/A_1 = \text{codim}_{E_1} A_1 < +\infty$. Comme $\bar{j}$ est injective et que $\bar{j}(E_2/A_2)$ est dense dans E_1/A_1 (donc égal à E_1/A_1) c'est que $\bar{j}$ est un isomorphisme de E_2/A_2 sur E_1/A_1 . Par suite, $\text{codim}_{E_1} A_1 = \dim E_1/A_1 = \dim E_2/A_2 = \text{codim}_{E_2} A_2$.

Supposons que A_2 soit de codimension finie dans E_2 , donc $\dim E_2/A_2 = \text{codim}_{E_2} A_2 < +\infty$. Comme $\bar{j}(E_2/A_2)$ est dense dans E_1/A_1 , on en déduit l'égalité $\bar{j}(E_2/A_2) = E_1/A_1$. Et comme précédemment, on en déduit que $\dim E_1/A_1 = \dim E_2/A_2$.

Remarque 3.2.

Les hypothèses faites sont beaucoup trop fortes. Par exemple, si E_1 et E_2 sont des espaces vectoriels topologiques, A_1 et A_2 des sous-espaces de E_1 et E_2 vérifiant 1 et 2, alors si A_1 est de codimension finie dans E_1 alors $\text{codim}_{E_1} A_1 = \text{codim}_{E_2} A_2$. Si de plus, A_1 et A_2 vérifient 2, alors si A_2 est de codimension finie dans E_1 , $\text{codim}_{E_1} A_1$ égale $\text{codim}_{E_2} A_2$ (l'hypothèse 2 assure que E_2/A_2 et E_1/A_1 sont séparés).

Proposition 3.4.

Soient (A_1, A_2) et (B_1, B_2) deux couples compatibles et u une application linéaire continue de $A_1 + A_2$ dans $B_1 + B_2$ telle que la restriction u_i de u à A_i soit linéaire continue de A_i dans B_i pour $i=1,2$. On suppose que :

- 1) $\text{Ker } u_1 = \text{Ker } u_2$;
- 2) B_1 est dense dans B_2 et l'injection de B_1 dans B_2 est continue ;
- 3) $\text{Im } u_1 = \text{Im } u_2 \cap B_1$ est fermée dans B_1 et $\text{Im } u_2$ est fermée dans B_2 ;
- 4) u_1 ou u_2 est un opérateur à indice.

Alors, u_1 et u_2 sont des opérateurs à indice de A_1 dans B_1 et A_2 dans B_2 respectivement, d'indice $\chi(u_1) = \chi(u_2)$ et pour tout foncteur d'interpolation ϕ , la restriction $\phi(u)$ de u à $\phi(A_1, A_2)$ est un opérateur à indice de $\phi(A_1, A_2)$ dans $\phi(B_1, B_2)$ d'indice $\chi(\phi(u)) = \chi(u_1) = \chi(u_2)$.

Démonstration : les hypothèses 2,3 et 4 permettent d'appliquer la proposition 3.3 au cas présent ce qui donne que $\text{codim}_{B_1} \text{Im } u_1 = \text{codim}_{B_2} \text{Im } u_2 < +\infty$. Avec l'hypothèse 1, on en déduit que u_1 et u_2 sont des opérateurs à indice et de même indice.

Soit N_1 un supplémentaire topologique (de dimension finie) de $\text{Im } u_1$ dans B_1 , c'est-à-dire $B_1 = \text{Im } u_1 \oplus N_1$. Or, $\text{Im } u_2 \oplus N_1$ est un sous-espace fermé de B_2 et est dense dans B_2 d'après les hypothèses 2 et 3, donc, $\text{Im } u_2 \oplus N_1 = B_2$, cette somme directe étant aussi topologique.

Soit $N = \text{Ker } u_1 = \text{Ker } u_2$. Soit $\bar{u}$ l'opérateur linéaire continu de $A_1 + A_2/N$ dans $B_1 + B_2/N_1 = B_2/N_1$ induit par u et défini par : $\bar{u}(x+N) = u(x) + N_1$. La restriction $\bar{u}_i$ de $\bar{u}$ à A_i/N est un isomorphisme de A_i/N sur B_i/N_1 pour $i=1,2$ (c'est le composé de l'isomorphisme de A_i/N sur $\text{Im } u_i$ et de $\text{Im } u_i$ sur B_i/N_1). Par suite, pour tout ϕ , la restriction $\phi(\bar{u})$ de $\bar{u}$ à $(\phi \frac{A_1}{N}, \frac{A_2}{N})$ est un isomorphisme de $\phi(A_1/N, A_2/N)$ sur $\phi(B_1/N, B_2/N)$. D'après la proposition 3.2, puisque N et N_1 sont de dimensions finies dans $A_1 \cap A_2$ et $B_1 \cap B_2$ respectivement, il s'en suit que $\phi(\bar{u})$ est un isomorphisme de $\phi(A_1, A_2)/N$ sur $\phi(B_1, B_2)/N_1$.

De là, on en déduit que $\text{Ker } \phi(u) = N$ où $\phi(u)$ est la restriction de u à $\phi(A_1, A_2)$. En effet, pour x dans $\phi(A_1, A_2)$ tel que $u(x) = 0$, alors $\bar{u}(x+N) = N_1$ donc x appartient à N car $\bar{u}$ est injective sur $\phi(A_1, A_2)/N$. Donc, $\text{Ker } \phi(u) \subset \text{Ker } u$. Evidemment, $\text{Ker } u$, qui est contenu dans $A_1 \cap A_2$ donc dans $\phi(A_1, A_2)$, est contenu dans $\text{Ker } \phi(u)$.

Enfin, on déduit de l'isomorphisme $\phi(\bar{u})$ que $\text{Im } \phi(u)$ est isomorphe à $\frac{\phi(B_1, B_2)}{N_1}$ (puisque $\phi(A_1, A_2)/N$ est isomorphe à $\text{Im } \phi(u)$ donc, que la codimension de $\text{Im } \phi(u)$ dans $\phi(B_1, B_2)$ est égale à la dimension de N_1).

Par suite, $\phi(u)$ est un opérateur à indice et $\chi(\phi(u)) = \chi(u_1) = \chi(u_2)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. ARLT : "Zusammenziehbarkeit der allgemeinen linearen Gruppe des Raumes C_0 der Nullfolgen". Invent. Math. 1, 1966, p. 36-44.
- [2] M.F. ATIYAH : Lectures in K-theory. Benjamin. New-York 1967.
- [3] M.F. ATIYAH & J.M. SINGER : "The index of elliptic operators..." Bull. Amer. Math. Soc. 69, 1963, p. 422-432.
- [4] M.F. ATIYAH & R. BOTT : "The index problem... Differential Analysis". (Bombay Colloquium 1964) Oxford Press 1964, p. 175-186.
- [5] R. BORIC : "Linear functional analysis". Gordon and Breach. New-York 1969.
- [6] A. DOUADY : "Un espace de Banach dont le groupe linéaire n'est pas connexe". Indag. Math. J. 68 (1965), p. 787-789.
- [7] I.E. DELSTEIN, B. MITJAGIN & E. SEMENOV : "The linear groups of C and l^1 are contractile". Bull. Acad. Polon. Sc. 38 (1), 1970, p.27-30.
- [8] I.C. GOMBERG & M.G. KREIN : "The basic propositions"... Amer. Math. Soc. Transl. (2), 13, 1960, p. 185-264.
- [8'] C. GOULAOUIC : Thèse
- [9] P. GRISVARD : "Opérateurs à indice". Séminaire Cartan. Schwartz 16 (1963-1964).
- [10] A. GROTHENDIECK : Exposé 12. "Espaces vectoriels topologiques" : Publicação da Sociedade de Matematica de Sao Paulo, 1964.
- [11] T. KATO : "Perturbation theory for linear operators". Berlin - Springer-Verlag, 1966.

- [12] N. KUIPER : "The homotopy type of the unitary group of Hilbert space."
Topology 3 (1965) - p. 19-30.

- [13] N. KUIPER : Exposé au Séminaire de Mathématiques Supérieures de
l'Université de Montréal, 1969. Presses de l'Université
de Montréal.

- [14] S. LANG : Analysis II, Addison-Wesley ; Reading, Mass, 1969.

- [15] J.L. LIONS & E. MAGENES : "Problèmes aux limites non homogènes."
Tome 1, 1968. Dunod, Paris.

- [16] G. NEUBAUER : "Der Homotopie typ der Automorphismen Gruppe in den
Raumen ℓ^p et C_0 , Math. Annal. 174 (1967), p. 33-40.

- [17] R. PALAIS : "Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem". Annals of
Math. Studies 57 ; Princeton University Press 1965.

- [18] F. RIESZ & G. NAGY : Leçons d'analyse fonctionnelle. Academie des
Sciences Hongroise. 1955.