

PIERRE LENGYEL

Racines de fonctions différentiables

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 1

« Séminaires d'analyse », , exp. n° 4, p. 1-23

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973__1_A4_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RACINES DE FONCTIONS DIFFERENTIABLES

par

Pierre LENGYEL

Soit f une application de classe C^∞ d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$; supposons qu'en chaque point x de Ω , la série de Taylor de f est la puissance $q^{\text{ième}}$ d'une série formelle. Alors, avec ces seules hypothèses, f n'admet pas toujours (même localement) une racine $q^{\text{ième}}$ de classe C^∞ . Par exemple, dans [1], G. Glaeser donne un exemple d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement positive en dehors de l'origine et plate à l'origine, n'admettant pas de racine carrée de classe C^2 au voisinage de 0. Un autre exemple est fourni par la fonction de deux variables réelles : $y^2 + e^{-\frac{1}{x^2}}$. Visiblement, les conditions formelles sont satisfaites en tout point de $\mathbb{R}^2$ et pourtant $y^2 + e^{-\frac{1}{x^2}}$ n'est pas, au voisinage de l'origine, le carré d'une fonction de classe C^1 (d'après le théorème des fonctions implicites ordinaire). On a cependant le résultat suivant dû à G. Glaeser ([1] ou [2]) : si f est une application de classe C^2 de Ω dans $\mathbb{R}^+$, 2-plate sur l'ensemble de ses zéros, alors sa racine carrée est de classe C^1 sur Ω .

Dans le § 2, nous considérons des fonctions positives, de classe C^p dans l'ouvert Ω , p -plate sur l'ensemble de leurs zéros ; nous donnons des conditions suffisantes pour que f admette une racine avec une certaine classe de différentiabilité. Les conditions envisagées sont des conditions de régularité, liées à l'inégalité de Łojasiewicz (ceci est développé dans le § 1). Dans le § 3, nous considérons une application f de Ω dans $\mathbb{C}$, de classe C^∞ et plate en aucun point de Ω . Modulo certaines inégalités analogues à celles utilisées par Hörmander [3], et l'existence d'une racine $q^{\text{ième}}$ formelle en chaque point de Ω , nous montrons que f admet localement une racine $q^{\text{ième}}$ de classe C^∞ .

§ 1. INEGALITES DE ŁOJASIEWICZ.

Nous allons établir tout d'abord des résultats dont nous nous servirons par la suite. Le point générique x de $\mathbb{R}^n$ aura pour coordonnées $x_1, \dots, x_n$ relativement à une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$; $H_{n,q}$ désignera l'espace des polynômes homogènes sur $\mathbb{R}^n$ de degré q à coefficients réels ; si A est une partie de $\mathbb{R}^n$, on

pose :
$$\|P\|_A = \sup_{x \in A} |P(x)| \text{ et } \|P\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |P(x)|.$$

Enfin, si Δ est une demi-droite issue de l'origine de $\mathbb{R}^n$ et si $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, on notera $\mathcal{C}_{\Delta, \theta}$ le cône plein ensemble des x de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ tels que l'angle de Ox et Δ soit majoré par θ .

Lemme 1.1.

Il existe une constante $C > 0$, telle que, pour tout polynôme P de $H_{n,q}$,

tout Δ et tout θ ,

$$\|P\|_{\mathcal{C}_{\Delta, \theta}} \geq C \cdot \theta^q \cdot \|P\|.$$

Preuve :

L'image de l'ensemble $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n ; x_i \geq 0, i=1, \dots, n ; x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$ par l'application linéaire U_θ définie par : $U_\theta(e_1) = e_1 ; U_\theta(e_i) = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_i$ si $i \geq 2$ est contenue dans $\mathcal{C}_{Ox_1, \theta}$. Soit O_Δ une transformation linéaire orthogonale de $\mathbb{R}^n$ appliquant le demi-axe Ox_1 sur Δ ; O_Δ transforme $\mathcal{C}_{Ox_1, \theta}$ en $\mathcal{C}_{\Delta, \theta}$ et alors $\|P\|_{\mathcal{C}_{\Delta, \theta}} \geq \|P \circ O_\Delta \circ U_\theta\|_\Gamma \geq C \|P \circ O_\Delta \circ U_\theta\|$ où C est une constante > 0 . Comme pour tout P et tout $\Delta, \|P \circ O_\Delta\| = \|P\|$, il suffit donc d'établir le résultat suivant :

(1) il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout P et tout θ ,

$$\|P \circ U_\theta\| \geq C \cdot \theta^q \cdot \|P\|.$$

Si $x' = (x_2, \dots, x_n)$, tout polynôme P s'écrit sous la forme $P(x) = \sum_{i=0}^q P_i(x') x_1^{q-i}$ où $P_i(x')$ est un polynôme homogène de degré i en x' .

Si $Q(x) = P \circ U_\theta(x) = \sum_{i=0}^q Q_i(x') x_1^{q-i}$, $Q(x) = \sum_{i=0}^q \sin^i \theta P_i(x') (x_1 + \cos \theta (x_2 + \dots + x_n))^{q-i}$

$$= \sum_{i=0}^q \sin^i \theta P_i(x') \sum_{j=i}^q C_{q-i}^{q-j} x_1^{q-j} (\cos \theta (x_2 + \dots + x_n))^{j-i} \text{ et ainsi :}$$

$Q_j(x') = \sum_{i=0}^j C_{q-i}^{q-j} \sin^i \theta P_i(x') [\cos \theta (x_2 + \dots + x_n)]^{j-i}$. On en déduit l'existence d'une constante $C' > 0$ telle que $\sin^j \theta \|P_j\| \leq \|Q_j\| + C' \sum_{i=0}^{j-1} \sin^i \theta \|P_i\|$.

Puis, par récurrence sur j , l'existence d'une constante $C'' > 0$ telle que :

$$\sin^j \theta \|P_j\| \leq C'' \sum_{i=0}^j \|Q_i\|. \text{ En particulier :}$$

$$\sin^q \theta \sum_{j=0}^q \|P_j\| \leq (q+1) C'' \sum_{j=0}^q \|Q_j\|, \text{ d'où le résultat.}$$

Lemme 1.2.

Soit φ une fonction numérique, définie et de classe C^p sur l'intervalle $[0, 1]$. Posons, pour tout $q=0, \dots, p$, $M_q = \sup_{t \in [0, 1]} |\varphi^{(q)}(t)|$. Alors :

$$M_q \leq 2 \left(e^2 \frac{p}{q}\right)^q M_0^{1-\frac{q}{p}} \left[\sup (M_p, p! M_0)\right]^{\frac{q}{p}}.$$

Preuve : Ce résultat est démontré dans [4].

Soit f une fonction numérique, définie et de classe C^p sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. La dérivée $q^{\text{ième}}$ de f en un point x de Ω s'identifie à un élément de $H_{n,q}$ et avec cette identification, A désignant une partie de $\mathbb{R}^n$,

$$\|f^{(q)}(x)\| = \sup_{A \ni h \in A} |f^{(q)}(x)(h^q)|, \|f^{(q)}(x)\| = \sup_{\|h\| \leq 1} |f^{(q)}(x)(h^q)|. \text{ Si } \rho > 0 \text{ et } x \in \Omega,$$

soit $\mathcal{C}_{\Delta, \theta, \rho}^x$ le cône de sommet x , translaté de l'homothétique $\rho \cdot \mathcal{C}_{\Delta, \theta}$ du cône $\mathcal{C}_{\Delta, \theta}$.

Enfin, pour toute partie B de Ω , soit $\|f^{(q)}\|_B = \sup_{x \in B} \|f^{(q)}(x)\|$.

Lemme 1.3.

Avec les notations précédentes, il existe une constante $C > 0$, ne dépendant que de n et p telle que pour tout entier q , $0 \leq q \leq p$, tout $x \in \Omega$ et tout f de classe C^p dans Ω :

$$\|f^{(q)}(x)\| \leq \frac{C}{\theta^q} \|f\|_{\mathcal{C}_{\Delta, \theta, \rho}^x}^{1-\frac{q}{p}} \cdot \left[\sup_{\rho^p} \left(\frac{p!}{\rho^p} \|f\|_{\mathcal{C}_{\Delta, \theta, \rho}^x}, \|f^{(p)}\|_{\mathcal{C}_{\Delta, \theta, \rho}^x} \right) \right]^{\frac{q}{p}}$$

Si $y \in \mathcal{E}_{\Delta, \theta, \rho}^x$, posons pour $t \in [0, 1]$, $\varphi_y(t) = f((1-t)x + ty)$.
 $\varphi_y^{(q)}(t) = f^{(q)}((1-t)x + ty) \cdot (y-x)^q$; d'où $\varphi_y^{(q)}(0) = f^{(q)}(x) (y-x)^q$ et ainsi
 $\sup_y |\varphi_y^{(q)}(0)| = \|f^{(q)}(x)\|_{\mathcal{E}_{\Delta, \theta}} \cdot \rho^q$; $\sup_{t,y} |\varphi_y(t)| \leq \|f\|_{\mathcal{E}_{\Delta, \theta, \rho}^x}$,
 $\sup_{t,y} \|\varphi_y^{(p)}(t)\| \leq \|f^{(p)}\|_{\mathcal{E}_{\Delta, \theta, \rho}^x} \cdot \rho^p$; d'après les inégalités précédentes et (1.2)
 appliqué à φ_y on a :

$$\|f^{(q)}(x)\|_{\mathcal{E}_{\Delta, \theta}} \cdot \rho^q \leq 2 \left(e^2 \cdot \frac{p}{q}\right)^q \|f\|_{\mathcal{E}_{\Delta, \theta, \rho}^x}^{1-\frac{q}{p}} \left[\sup(p! \|f\|_{\mathcal{E}_{\Delta, \theta, \rho}^x}, \|f^{(p)}\|_{\mathcal{E}_{\Delta, \theta, \rho}^x}) \right]^{\frac{q}{p}}$$
 et l'on conclut en appliquant (1.1).

Soit $\mathcal{E}(\Omega)$ l'anneau des fonctions numériques f , définies et de classe C^∞ dans Ω , $V_k(f)$ l'ensemble des points de k -platitude de f , c'est-à-dire l'ensemble des points où f et ses k premières dérivées s'annulent, $V_\infty(f)$ l'ensemble des points de platitude de f , c'est-à-dire l'ensemble des points où f et toutes ses dérivées s'annulent.

Proposition 1.4.

Si f est dans $\mathcal{E}(\Omega)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) *Toute fonction $g \in \mathcal{E}(\Omega)$, plate sur $V_0(f)$ est divisible par f dans $\mathcal{E}(\Omega)$.*
- 2) *Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe des constantes $C > 0$, $\alpha > 0$ telles que pour tout $x \in K$, $|f(x)| \geq C d(x, V_0(f))^\alpha$ (i.e. f vérifie une inégalité de Łojasiewicz par rapport à l'ensemble de ses zéros).*
- 3) $V_\infty(f) = \emptyset$; en outre, la condition suivante est satisfaite : (3') *Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe des constantes $C > 0$, $\alpha \geq 1$ et pour tout $x \in K - V_0(f)$ une boule $B(x, \rho_x)$ avec $\rho_x \geq C d(x, V_0(f))^\alpha$ tels que pour tout $x' \in B(x, \rho_x)$:*
 $|f(x)| \geq \frac{1}{2} |f(x')|$.
- 4) $V_\infty(f) = \emptyset$; en outre, la condition suivante est satisfaite : (4') *Pour tout*

compact $K \subset \Omega$, il existe des constantes $C_1, C_2, C_3 > 0$ et $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 1, \alpha_3 \geq 0$ et pour tout $x \in K - V_0(f)$ un cône $\mathcal{C}_{\Delta_x, \theta_x, \rho_x}^x$ avec $\theta_x \geq C_1 d(x, V_0(f))^{\alpha_1}$,

$\rho_x \geq C_2 d(x, V_0(f))^{\alpha_2}$ tels que :

pour tout $x' \in \mathcal{C}_{\Delta_x, \theta_x, \rho_x}^x$, $|f(x)| \geq C_3 |f(x')| d(x, V_0(f))^{\alpha_3}$.

1 $\iff$ 2. cf. [5], chap. V, proposition 4.3.

2 $\implies$ 3. Des inégalités $|f(x')| \leq |f(x)| + |f(x) - f(x')| \leq |f(x)| + A d(x, x')$ où A est une constante > 0 dépendant de K , il vient si

$$\rho_x = \frac{C}{A} d(x, V_0(f))^\alpha : |f(x')| \leq 2|f(x)|.$$

En outre, la condition 2 implique que $V_\infty(f) = \emptyset$, ce qui n'est pas trivial, malgré les apparences ; cf. [5], appendice.

3 $\implies$ 4. évident.

4 $\implies$ 2. La condition (2) étant de nature locale, il suffit de démontrer l'inégalité (2) au voisinage d'un point x_0 de Ω . Comme $V_\infty(f) = \emptyset$, il existe un voisinage compact K de x_0 dans Ω , un réel $\beta_1 > 0$ et un entier q tels que pour tout $x \in K$, $\|f^{(q)}(x)\| \geq \beta_1$. Si l'on pose $p=q+1$, il existe une constante $\beta_2 > 0$ telle que pour tout $x \in K$, $\|f^{(p)}\|_{\mathcal{C}_{\Delta_x, \theta_x, \rho_x}^x} \leq \beta_2$, les $\mathcal{C}_{\Delta_x, \theta_x, \rho_x}^x$ étant les cônes associés par l'hypothèse (4') au compact K .

On a, d'après l'hypothèse (4') :

$$C_3 \|f\|_{\mathcal{C}_{\Delta_x, \theta_x, \rho_x}^x} d(x, V_0(f))^{\alpha_3} \leq |f(x)|, \theta_x \geq C_1 d(x, V_0(f))^{\alpha_1}, \rho_x \geq C_2 d(x, V_0(f))^{\alpha_2}.$$

La condition (2) résulte alors de (1.3) appliqué au cône $\mathcal{C}_{\Delta_x, \theta_x, \rho_x}^x$ et des cinq inégalités précédentes.

Nous utiliserons au paragraphe suivant des inégalités analogues à celles de (4'). On dira qu'une fonction numérique f de classe C^p dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$

vérifie une "condition de Łojasiewicz faible" s'il existe trois constantes

$\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 1, \alpha_3 \geq 0$ pour lesquelles elle vérifie la condition : $\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$:

Il existe trois constantes $C_1 > 0, C_2 > 0, C_3 > 0$ telles que pour tout $x \in \Omega \setminus V_0(f)$ il existe un cône $\mathcal{C}_{\Delta_x, \theta_x, \rho_x}^x$ avec $\theta_x \geq C_1 d(x, V_0(f))^{\alpha_1}, \rho_x \geq C_2 d(x, V_0(f))^{\alpha_2}$ tels

que pour tout x' de $\mathcal{C}_{\Delta_x, \theta_x, \rho_x}^x$, $|f(x)| \geq C_3 |f(x')| d(x, V_0(f))^{\alpha_3}$.

D'après la proposition précédente, la fonction f vérifie une inégalité de Łojasiewicz par rapport à l'ensemble de ses zéros, si et seulement si $V_\infty(f) = \emptyset$ et f vérifie une "condition de Łojasiewicz faible".

§ 2. RACINES D'UNE FONCTION DE CLASSE C^p , p-PLATE SUR L'ENSEMBLE DE SES ZEROS.

Théorème 2.1.

Soit f une fonction positive de classe C^p dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, p -plate sur l'ensemble non vide $V_0(f)$ de ses zéros ; on suppose qu'il existe trois constantes $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 1, \alpha_3 \geq 0$ pour lesquelles f vérifie la condition $\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Alors, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, f^α est de classe C^k et k -plate sur $V_0(f)$, où $k = \left[\left[\frac{p}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \right] \alpha \right]$

Nous utiliserons les deux lemmes suivants :

Lemme 2.2.

Si E, F, G sont trois espaces de Banach, f une application de classe C^p au voisinage d'un point $x \in E$ dans F , g une application de classe C^p au voisinage de $f(x)$ dans G , alors $g \circ f$ est une application de classe C^p au voisinage de x dans G et l'on a pour $0 \leq q \leq p$:

$$\|(g \circ f)^{(q)}(x)\| \leq \sum_{k=1}^q \|g^{(k)}(f(x))\| \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_q = k \\ m_1 + 2m_2 + \dots + qm_q = q}} \frac{q!}{m_1! m_2! \dots m_q!} \left(\frac{\|f'(x)\|}{1!} \right)^{m_1} \dots \left(\frac{\|f^{(q)}(x)\|}{q!} \right)^{m_q}$$

Preuve :

Des développements limités à l'ordre p de f et g respectivement en x et f(x), on en déduit pour $0 \leq q \leq p$:

$$\frac{1}{q!} (g \circ f)^{(q)}(x) [h, \dots, h] =$$

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = q \\ 1 \leq i_j \leq q}} g^{(k)}(f(x)) \left[\frac{1}{i_1!} f^{(i_1)}(x)(h^{i_1}), \dots, \frac{1}{i_k!} f^{(i_k)}(x)(h^{i_k}) \right]$$

$$\text{d'où } (g \circ f)^{(q)}(x) [h_1, \dots, h_q] =$$

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = q \\ 1 \leq i_j \leq q}} \sum_{\substack{1 \leq j \leq k \\ 1 \leq \alpha_1^j < \dots < \alpha_{i_1^j}^j \leq q \\ \alpha_i^u \neq \alpha_j^v \text{ pour } (u,i) \neq (v,j)}} g^{(k)}(f(x)) \left[f^{(\alpha_1^1)}(x)(h_{\alpha_1^1}^1), \dots, h_{\alpha_{i_1^1}^1}^1 \right]$$

et aussi :

$$\| (g \circ f)^{(q)}(x) (h_1, \dots, h_q) \| \leq$$

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = q \\ 1 \leq i_j \leq q}} \frac{q!}{i_1! \dots i_k!} \| g^{(k)}(f(x)) \| \| f^{(i_1)}(x) \| \dots \| f^{(i_k)}(x) \| \| h_1 \| \dots \| h_q \|^k$$

$$\text{Mais de l'égalité } \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = q \\ 1 \leq i_j \leq q}} \frac{q!}{i_1! \dots i_k!} \| f^{(i_1)}(x) \| \dots \| f^{(i_k)}(x) \| =$$

$$\sum_{\substack{m_1 + \dots + m_q = k \\ m_1 + 2m_2 + \dots + qm_q = q}} \frac{k! q!}{(1!)^{m_1} \dots (q!)^{m_q} m_1! \dots m_q!} \| f^{(1)}(x) \|^{m_1} \dots \| f^{(q)}(x) \|^{m_q}$$

On déduit le résultat.

Lemme 2.3.

Si f est une application de classe C^p au voisinage d'un point x d'un espace de Banach dans $\mathbb{R}_*^+$, alors pour tout $\alpha \in]0, 1[$, f^α est de classe C^p au voisinage de x et l'on a pour $0 \leq q \leq p$:

$$\|\varphi^{(q)}(x)\| \leq \frac{q!}{f(x)^{q-\alpha}} \sum_{\substack{m_0+\dots+m_q=q \\ m_1+2m_2+\dots+qm_q=q}} \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-q+m_0+1)|}{m_1! \dots m_q! (1!)^{m_1} \dots (q!)^{m_q}} (f(x))^{m_0} \|f'(x)\|^{m_1} \dots \|f^{(q)}(x)\|^{m_q}$$

Preuve :

Il suffit d'appliquer 2.2 à $g : x \longrightarrow x^\alpha$.

Preuve de 2.1.

Soit $x_0 \in V_0(f)$, U un voisinage de x_0 dans Ω , $M_p = \sup_{y \in U} \|f^{(p)}(y)\|$ et des entiers $0 \leq q \leq k \leq p$. Il existe une constante $C_1 > 0$ ne dépendant que de n et p

(1.3 et les hypothèses de 2.1) telle que pour tout $x \in U \setminus V_0(f)$

$$\|f^{(q)}(x)\| \leq \frac{C_1 (f(x))^{1-\frac{q}{k}}}{d(x, V_0(f))^{\alpha_1 q + \alpha_3 (1-\frac{q}{k})}} \cdot \left(\sup \left(\frac{k! f(x)}{C_2^k C_3 d(x, V_0(f))^{\alpha_2 k + \alpha_3}}, \|f^{(k)}\|_{\mathcal{C}_{\Delta_x, \theta_x, \rho_x}^x} \right) \right)^{\frac{q}{k}}$$

Il existe donc une constante $C_2 > 0$ ne dépendant que de n et p telle que :

$$\|f^{(q)}(x)\| \leq C_2 (f(x))^{1-\frac{q}{k}} \cdot M_p^{\frac{q}{k}} d(x, V_0(f))^r$$

$$\text{où } r = (\inf(p-k, p-\alpha_2 k - \alpha_3)) \frac{q}{k} - (\alpha_1 q + \alpha_3 (1 - \frac{q}{k})).$$

En appliquant (2.3) à $\varphi = f^\alpha$, il existe une constante $C_3 > 0$ telle que :

$$\|\varphi^{(q)}(x)\| \leq C_3 (f(x))^{\alpha-\frac{q}{k}} \cdot M_p^{\frac{q}{k}} d(x, V_0(f))^s;$$

$$\text{où } s = (\inf(p-k, p-\alpha_2 k - \alpha_3) - (\alpha_1 k + \alpha_3 (k-1))) \frac{q}{k}$$

Si l'on prend $s \geq 0$ et $\alpha - \frac{q}{k} \geq 0$,

$\alpha \geq \frac{q}{k}$, $p-k \geq \alpha_1 k + \alpha_3 (k-1)$ et $p-\alpha_2 k - \alpha_3 \geq \alpha_1 k + \alpha_3 (k-1)$, ou encore

$$q \leq [k\alpha] \text{ et } k \leq \left[\inf \left(\frac{p}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \frac{p+\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_3 + 1} \right) \right] = \left[\frac{p}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \right],$$

($[x]$ désigne la partie entière de x),

$\varphi^{(q)}(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 .

Il suffit alors d'appliquer le lemme d'Hestenes (cf. [5], p. 80), pour déduire le résultat.

Corollaire 2.4.

Soit f une application de classe C^∞ d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$, plate sur l'ensemble non vide de ses zéros $V_0(f)$, vérifiant une condition de Łojasiewicz faible $\kappa(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; alors, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, f^α est de classe C^∞ sur Ω .

Corollaire 2.5.

Soit f une application de classe C^p (resp. C^∞) d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, p -plate (resp. plate) sur l'ensemble non vide de ses zéros, au voisinage desquels elle est monotone ; alors, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, f^α est de classe $C^{[p\alpha]}$ (resp. C^∞).

Preuve :

Il suffit de prendre $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ $\alpha_2 = 1$.

Corollaire 2.6.

Soit f une application de classe C^p d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ p -plate sur l'ensemble non vide de ses zéros $V_0(f)$. On suppose qu'il existe deux constantes $A > 0$, $B > 0$ telles que pour tout $x \in \Omega \setminus V_0(f)$ et tout $x' \in B(x, \rho_x)$, où $\rho_x \geq A d(x, V_0(f))$, $f(x) \geq B f(x')$.

Alors, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, f^α est de classe $C^{[p\alpha]}$.

On peut aussi démontrer le résultat suivant :

Proposition 2.7.

Pour tout entier p , tout fermé X de $\mathbb{R}^n$ et tout ouvert Ω le contenant, il existe une application positive f de classe C^p sur Ω , vérifiant une condition de Łojasiewicz faible $\kappa(0, 1, 0)$ et telle que $V_0(f) = V_p(f) = X$.

Exemple 2.8.

Soit φ l'application de classe C^∞ dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ pour $|x| < 1$ et 0 pour $|x| \geq 1$. Posons $\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n} \varphi(2n(n+1)x - (2n+1))$

nulle en dehors de $I_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ ($n \geq 1$) et de classe C^∞ dans $\mathbb{R}$. Posons

$\psi(x) = \sum_{n \geq 1} \varphi_n(x)$, définie, positive sur $\mathbb{R}$, plate en les points $\frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Sur I_n , $\psi^{(k)}(x) = \frac{1}{2^n} (2n(n+1))^k \varphi^{(k)}(2n(n+1)x - (2n+1))$ et donc $\psi^{(k)}(x)$ tend

vers 0 lorsque x tend vers 0. Ainsi, ψ est de classe C^∞ , plate en ses zéros et

vérifie une condition de Łojasiewicz faible $\mathcal{L}(0,1,0)$ tout en n'étant pas monotone à l'origine.

§ 3. RACINES D'UNE FONCTION C^∞ PLATE EN AUCUN POINT.

Soit f une application de classe C^∞ d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$, plate en aucun point et vérifiant une inégalité de Łojasiewicz par rapport à l'ensemble non vide V_0 de ses zéros : Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe deux constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ telles que $\forall x \in K : |f(x)| \geq C d(x, V_0)^\alpha$.

On suppose que f possède en tout point $x \in V_0$ une racine p ^{ième} formelle, c'est-à-dire un jet $\varphi(x) = (\varphi_k(x))_{|k| \geq 0}$ tel que :

$$\left[\sum_{|k| \geq 0} \varphi_k(x) \frac{x^k}{k!} \right]^p = \sum_{|k| \geq 0} D^k f(x) \frac{x^k}{k!}.$$

Les fermés emboîtés $V_k = \{x \in \Omega \mid f \text{ et ses } k \text{ premières dérivées s'annulent en } x\}$, vérifient alors : $\forall x \geq 1, V_{(r-1)p} = V_{rp-1}$ et $V_\infty = \emptyset$. Soit $W_r = V_{(r-1)p} - V_{rp}$.

On suppose en outre que pour tout entier $r \geq 1$, il existe des constantes $\alpha_r > 0$,

$C_r > 0$, telles que $\forall x \in W_r \|f^{(rp)}(x)\| \geq C_r d(x, V_{rp})^{\alpha_r}$. (H) (On convient que $d(x, \emptyset) = 0$).

Théorème 3.1.

Avec les hypothèses précédentes, f possède au voisinage de tout point de Ω une racine $p^{\text{ième}}$ de classe C^∞ .

Nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme 3.2.

Soit $\mathcal{P}_q$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ formé des polynômes de degré $\leq q$, $\mathbb{C}$ espace de Banach de dimension finie pour la norme :

$$\left\| \sum_{(k)} a_k \frac{x^k}{k!} \right\| = \sup_{(k)} |a_k| ;$$

il existe deux constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ pour lesquelles, $\forall f \in \mathcal{P}_q$, $\forall g \in \mathcal{P}_r$:

$$C_1 \|f\|_q \|g\|_r \leq \|f \cdot g\|_{q+r} \leq C_2 \|f\|_q \|g\|_r .$$

Preuve : La seconde inégalité est évidente ; pour la première, on raisonne par l'absurde ; en utilisant la compacité des boules unités de $\mathcal{P}_q$ et $\mathcal{P}_r$, on exhibe $f \in \mathcal{P}_q$ et $g \in \mathcal{P}_r$ vérifiant : $\|f\|_q = \|g\|_r = 1$ et $\|f \cdot g\|_{q+r} = 0$.

Soit G_p le groupe des racines $p^{\text{ième}}$ de l'unité. Nous utilisons dans la preuve de 3.1, la démonstration du lemme suivant :

Lemme 3.3.

Soient E un espace métrique, F une $\mathbb{C}$ algèbre normée, f une application d'un voisinage Ω d'un point $x_0 \in E$, dans F , vérifiant $f(x_0) \neq 0$, et :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x, y \in \Omega}} \prod_{s \in G_p} \|sf(x) - f(y)\| = 0.$$

Alors, il existe une application continue g d'un voisinage de x_0 dans F telle que $g^p = f^p$.

Preuve : Soit $d = \inf_{\substack{s \neq t \\ s, t \in G_p}} |s-t|$ et $\mu = \frac{d}{d+3} \|f(x_0)\|$. Il existe $\eta > 0$ tel que :

$\forall x \in B(x_0, \eta), x \in \Omega$ et $\prod_{s \in G_p} \|sf(x) - f(x_0)\| \leq \mu^p$. Il existe donc une application u de $B(x_0, \eta)$ dans G_p telle que $\forall x \in B(x_0, \eta) \quad \|u(x) f(x) - f(x_0)\| \leq \mu$ et $u(x_0) = 1$. Montrons que $g = u \cdot f$ est continue dans $B(x_0, \eta)$.

Soit $0 < \epsilon < \mu$ et $x \in B(x_0, \eta)$. Il existe $\eta' > 0$ tel que pour $d(x, y) \leq \eta'$ et $d(x_0, y) \leq \eta$, $\prod_{s \in G_p} \|sf(y) - f(x)\| \leq \epsilon^p$ et donc, il existe $s \in G_p$ tel que $\|sf(y) - g(x)\| \leq \epsilon$. Comme $d(x_0, y) \leq \eta$ et $d(x, x_0) \leq \eta$, $\|g(x) - g(y)\| \leq 2\mu$. Or, si $s \neq u(y)$, $\|g(x) - g(y)\| \geq d\|f(y)\| - \epsilon > \frac{2d}{d+3} \|f(x_0)\| = 2\mu$; d'où le résultat.

Le lemme qui suit, fondamental pour la suite, utilise essentiellement le théorème du prolongement de Whitney (cf. [5], chap. IV, p. 68-73).

Lemme 3.4.

Soient $X \supset Y$ deux compacts de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de Whitney de classe C^∞ sur Y , g un jet sur $X-Y$, $\mathcal{C}$ une application de X dans Y telle que $\|x - \mathcal{C}(x)\| = d(x, Y)$. On suppose :

(3.4.1). Il existe, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, un module de continuité ω tel que

$\forall x \in X-Y$ et $\forall |k| \leq m$:

$$\left| g_k(x) - \sum_{\substack{|l| \leq m \\ l \geq k}} f_l(\mathcal{C}(x)) \frac{(x - \mathcal{C}(x))^{l-k}}{(l-k)!} \right| \leq \omega(\|x - \mathcal{C}(x)\|) \|x - \mathcal{C}(x)\|^{m-|k|}$$

(3.4.2). Il existe, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, des constantes $\alpha > 0$, $C > 0$ et un module de continuité ω tels que : $\forall x \in X-Y$, $\forall x' \in B(x, Cd(x, Y)^\alpha) \cap X-Y$ et $\forall k, |k| \leq m$:

$$\left| g_k(x) - \sum_{\substack{|l| \leq m \\ l \geq k}} g_l(x') \frac{(x - x')^{l-k}}{(l-k)!} \right| \leq \omega(\|x - x'\|) \|x - x'\|^{m-|k|} ;$$

Alors, f et g définissent sur X une fonction de Whitney de classe C^∞ .

Preuve. 1°) Soit h le jet défini par f sur Y et g sur $X-Y$. Supposons, tout d'abord que f est nul : - Soit $x \in X-Y$ et $x' \in X-Y$; ou bien $\|x - x'\| \leq C(x, Y)^\alpha$ et alors,

$$\text{d'après (3.4.2) : } \left| h_k(x) - \sum_{\substack{|\ell| \leq m \\ \ell \geq k}} h_\ell(x') \frac{(x-x')^{\ell-k}}{(\ell-k)!} \right| \leq \omega(\|x-x'\|) \|x-x'\|^{m-|k|},$$

ou bien $\|x-x'\| > C d(x,Y)^\alpha$, c'est-à-dire $d(x,Y) \leq \left(\frac{\|x-x'\|}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Il existe deux constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ ne dépendant que de m et un entier p tels que :

$$d(x,Y)^{p-|k|} \leq C_1 \|x-x'\|^{m-|k|} \text{ et } d(x',Y)^{p-|k|} \leq C_2 \|x-x'\|^{m-|k|}.$$

$$\text{Alors, comme } \left| h_k(x) - \sum_{\substack{|\ell| \leq m \\ \ell \geq k}} h_\ell(x') \frac{(x-x')^{\ell-k}}{(\ell-k)!} \right| \leq \omega_1(d(x,Y)) d(x,Y)^{p-|k|} + \omega_2(d(x',Y)) d(x',Y)^{p-|k|}$$

(d'après (3.4.1) et l'hypothèse $f=0$), il existe un modulo de continuité ω_3 ne dépendant que de m tel que $\forall |k| \leq m$:

$$\left| h_k(x) - \sum_{\substack{|\ell| \leq m \\ \ell \geq k}} h_\ell(x') \frac{(x-x')^{\ell-k}}{(\ell-k)!} \right| \leq \omega_3(\|x-x'\|) \|x-x'\|^{m-|k|}.$$

$$\text{- Soit } x \in X-Y \text{ et } y \in Y : \left| h_k(x) - \sum_{\substack{|\ell| \leq m \\ \ell \geq k}} h_\ell(y) \frac{(x-y)^{\ell-k}}{(\ell-k)!} \right| = |g_k(x)| \leq$$

$$\omega(d(x,Y)) d(x,Y)^{m-|k|} \leq \omega(\|x-y\|) \|x-y\|^{m-|k|} \text{ et}$$

$$\left| h_k(y) - \sum_{\substack{|\ell| \leq m \\ \ell \geq k}} h_\ell(x) \frac{(y-x)^{\ell-k}}{(\ell-k)!} \right| \leq \sum_{\substack{|\ell| \leq m \\ \ell \geq k}} |g_\ell(x)| \frac{\|x-y\|^{|\ell|-|k|}}{(\ell-k)!} \leq \omega_1(\|x-y\|) \|x-y\|^{m-k}.$$

Ainsi, si f est nul, h est une fonction de Whitney de classe C^∞ sur X .

2°) Etude du cas général. D'après le théorème de Whitney, il existe une fonction de classe C^∞ , $\tilde{f}$ au voisinage de Y telle que $f = (D^k \tilde{f})|_{|k| \geq 0}$. Le champ $h - \tilde{f}$ est nul sur Y et donc d'après ce qui précède, c'est une fonction de Whitney sur X . Ainsi, $h = (h - \tilde{f}) + \tilde{f}$ est une fonction de Whitney de classe C^∞ sur X .

Preuve de 3.1.

La démonstration consiste à prouver que $\forall x \in V_0$, il existe un voisinage sur lequel on a une détermination du jet φ qui est une fonction de Whitney de classe C^∞ . On montre d'abord (3.6) qu'il existe une détermination continue de φ

au voisinage d'un point $x \in W_r$, dans W_r ; puis (3.7 et 3.8) que pour cette détermination, φ est une fonction de Whitney de classe C^∞ . A l'aide du lemme de prolongement (3.4), on montre (3.9) qu'il existe dans un voisinage de x dans $V_{(r-2)p}$ une détermination de φ qui est une fonction de Whitney de classe C^∞ ; et ainsi, de proche en proche, on parvient à exhiber un voisinage de x dans V_0 sur lequel φ admet une détermination de classe C^∞ .

3.5 $\forall x \in V_0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, soit $f^i(x) = \sum_{|k|=i} D^k f(x) \frac{x^k}{k!}$ le polynôme homogène de

degré i associé au $i^{\text{ème}}$ terme de la série de Taylor de f en x , et par analogie :

$$\varphi^i(x) = \sum_{|k|=i} \varphi_k(x) \frac{x^k}{k!}.$$

Soit $j \in \mathbb{N}$, $y \in V_0$.

$$\text{On a : } f^{(j)}(x) = f^{(j)}(y) + f^{(j+1)}(y) \frac{(x-y)^1}{1!} + \dots + f^{(i)}(y) \frac{(x-y)^{i-j}}{(i-j)!} + \dots$$

(développement de Taylor de $f^{(j)}$).

$$\text{Soit } f^{i,j}(x,y) = \begin{cases} \frac{f^{(i)}(y)(x-y)^{i-j}}{(i-j)!} (X, \dots, X) = \sum_{\substack{|k|=i \\ |l|=j \\ k \geq l}} D^k f(y) \frac{(x-y)^{k-l}}{(k-l)!} \cdot \frac{x^l}{l!} & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$$

$$\text{et par analogie : } \varphi^{i,j}(x,y) = \begin{cases} \sum_{|k|=i, |l|=j, k \geq l} \varphi_k(y) \cdot \frac{(x-y)^{k-l}}{(k-l)!} \frac{x^l}{l!} & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$$

$$\text{On vérifie que : } f^{i,j}(x,y) = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_p = i \\ j_1 + \dots + j_p = j}} \varphi^{i_1, j_1}(x,y) \dots \varphi^{i_p, j_p}(x,y) \quad (3.5.1)$$

Soit $i \geq j$ et $|l|=j$. Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\left| \varphi_\ell(x) - \sum_{\substack{|k| \leq i \\ k \geq l}} \varphi_k(y) \frac{(x-y)^{k-l}}{(k-l)!} \right| \leq C \left\| \varphi^j(x) - \sum_{j \leq k \leq i} \varphi^{k,j}(x,y) \right\| \quad (3.5.2)$$

(où $\|\cdot\|$ est la norme de $\mathcal{P}_j$ (3.2)). De même pour f .

Ainsi, les quantités qui apparaissent dans 3.4.1 et 3.4.2 seront maniées sous forme de polynômes homogènes en utilisant (3.2) et les inégalités (3.5)

L'étude étant locale, on suppose V_0 compact. On convient de noter $A, B, C, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ des constantes > 0 dépendant éventuellement de f et de ses dérivées ou de paramètres entiers, mais indépendantes du point générique de W_r .

Pour tout $x \in W_r$, $(\varphi^r(x))^p = f^{rp}(x)$ et d'après (3.2),

$$\|\varphi^r(x)\| \leq A \|f^{rp}(x)\|^{\frac{1}{p}} \leq B.$$

$$f^{rp+j}(x) = p(\varphi^r(x))^{p-1} \cdot \varphi^{r+j}(x) + \sum_{\substack{|\ell|=rp+j \\ \ell_i < r+j}} \varphi^{\ell_1}(x) \dots \varphi^{\ell_p}(x). \quad (3.5.3)$$

On en déduit par récurrence que, $\forall j \geq 0$, il existe C et α telles que :

$$\|\varphi^{r+j}(x)\| \leq \frac{C}{d(x, V_{rp})^\alpha} \quad (3.5.4) \quad (\text{d'après (H)}).$$

$$\text{Pour tout } x, y \in V_0, \forall i \text{ et } j \leq i, \|\varphi^{i,j}(x, y)\| \leq C \frac{\|x-y\|^{1-j}}{\|\varphi^r(y)\|^\alpha} \quad (3.5.5)$$

où C et α sont des constantes ne dépendant que de i . /

3.6 *Il existe une détermination continue de φ au voisinage de tout point de W_r ; plus précisément, si $V_{rp} \neq \emptyset$, il existe une constante C et, $\forall x \in W_r$, une détermination continue de φ sur $U_x = B(x, C d(x, V_{rp})^\alpha)^r \cap W_r$ telles que :*

$$\forall y \in U_x, \|\varphi^r(x) - \varphi^r(y)\| \leq \frac{d}{d+3} \|\varphi^r(x)\|.$$

Preuve.

On utilise ici la preuve de (3.3). Si $V_{rp} \neq \emptyset$, soit $x \in W_r$, $\mu = \frac{d}{d+3} \|\varphi^r(x)\|$.

Il existe une constante $C > 0$ telle que $\mu^p \geq C \|f^{rp}(x)\|$. On a :

$$\prod_{s \in G_p} \|s \varphi^r(x) - \varphi^r(y)\| \leq C_1 \|f^{rp}(x) - f^{rp}(y)\| \leq C_2 \|x-y\|$$

où C_1 et C_2 sont des constantes > 0 .

On vérifie, d'après (H) qu'il existe une constante C telle que

$$\prod_{s \in G_p} \|s \varphi^r(x) - \varphi^r(y)\| \leq \mu^p \text{ dès que } \|x-y\| \leq C d(x, V_{rp})^\alpha.$$

D'où résulte la continuité d'une détermination de φ^r . (3.3). On montre

par récurrence la continuité d'une détermination de φ sur U_x . (3.5.3, 3.5.4, 3.5.5). /

Par abus de notations, sur U_x , φ désignera une détermination continue du champ φ .

3.7 Avec les notations de 3.6, si $V_{rp} \neq \emptyset$, $\forall m \geq r$, il existe des constantes C, α et un module de continuité ω tels que :

$$\forall x \in W_r, \forall y \in [B(x, C d(x, V_{rp})^\alpha) \cap W_r] \subset U_x \text{ et } \forall j \leq m$$

$$\|\varphi^j(x) - \sum_{0 \leq i \leq m} \varphi^{i,j}(x,y)\| \leq \omega(\|x-y\|) \|x-y\|^{m-j}$$

Pour des commodités de notations, on introduit la propriété suivante :

Soit $x \in W_r$; un point $y \in U_x$ vérifie une propriété $\mathcal{P}(x)$ si $y \in B(x, C d(x, V_{rp})^\alpha)$
où C et α sont deux constantes indépendantes de y et x , ne dépendant éventuellement que de paramètres entiers.

Preuve : On raisonne par récurrence sur l'entier j et "on restreint à chaque nouvelle étape la propriété $\mathcal{P}(x)$ que y vérifiait à l'étape précédente". Comme il n'y a que $m+1$ étapes, on trouve en définitive la propriété $\mathcal{P}(x)$ que doit vérifier y .

A l'ordre $j=0$; soit $m' = (m+1)p$.

$$\left[\sum_{i \leq m', p} \varphi^{i,0}(x,y) \right]^p = \sum_{i_k \leq m', p} \varphi^{i_1,0} \dots \varphi^{i_p,0} = \sum_{i \leq m', p} f^{i,0}(x,y) + \sum_{\substack{i_k \leq m', p \\ i_1 + \dots + i_p > m', p}} \varphi^{i_1,0} \dots \varphi^{i_p,0}$$

(d'après 3.5.1).

D'après (3.5.5), il existe des constantes C, α ne dépendant que de m pour

$$\text{lesquelles } \forall y \in U_x, \left\| \left(\sum_{i \leq m', p} \varphi^{i,0}(x,y) \right)^p \right\| \leq C \left[\|x-y\|^{m'p+1} + \frac{\|x-y\|^{m'+1}}{d(x, V_{rp})^\alpha} \right].$$

Si y vérifie $\mathcal{P}(x)$, on a $\left\| \left(\sum_{i \leq m', p} \varphi^{i,0}(x,y) \right)^p \right\| \leq C \|x-y\|^{m'}$ et alors,

$$\text{d'après (3.2) : } \left\| \sum_{i \leq m} \varphi^{i,0}(x,y) \right\| \leq C \left[\|x-y\|^{m+1} + \frac{\|x-y\|^{m+1}}{d(x, V_{rp})^\alpha} \right].$$

Enfin, si y vérifie $\mathcal{P}(x)$, (on a restreint deux fois le voisinage de x)

$$\left\| \sum_{i \leq m} \varphi^{i,0}(x,y) \right\| \leq \omega_{0,m}(\|x-y\|) \|x-y\|^m \text{ où } \omega_{0,m} \text{ est un module de conti-}$$

nuité ne dépendant que de m .

A l'ordre $j=r-1$, les ordres inférieurs étant supposés vérifiés.

Soit $m' = (m+1)p + r - 1$

D'après (3.2) et (3.5.1),

$$\left\| \sum_{i \leq m'p} \varphi^{i,(r-1)p}(x,y) \right\| = \left\| \sum_{i \leq m'p} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_p = i \\ j_1 + \dots + j_p = (r-1)p}} \varphi^{i_1, j_1} \dots \varphi^{i_p, j_p} \right\| \leq C \|x-y\|^{m'p+1-(r-1)p}$$

Soit $A_k = \{(j_1, \dots, j_p) \mid |j| = (r-1)p; j_i \geq k; \exists u \ j_u = k\}$. $k=0, \dots, r-1$.

$$\sum_{k=0}^{r-1} A_k = \left[|j| = (r-1)p \right]$$

$$\sum_{\substack{|i| \leq m'p \\ (j) \in A_k}} \varphi^{i_1, j_1} \dots \varphi^{i_p, j_p} = \sum_{i_1 \leq m'} \varphi^{i_1, k} \cdot \sum_{\substack{|j| = (r-1)p-k \\ j \geq k \\ |i| \leq m'(p-1)}} \varphi^{i_1, j_1} \dots \varphi^{i_p, j_p} u(x,y).$$

$$\text{où } \|u(x,y)\| \leq C \frac{\|x-y\|^{m'+1-k}}{d(x, V_{rp})^\alpha}$$

Si donc y vérifie $\mathcal{P}(x)$ (on restreint une nouvelle fois le voisinage de x)

$$\left\| \sum_{|i| \leq m'p} \varphi^{i_1, r-1}, \dots, \varphi^{i_p, r-1} \right\| \leq C \|x-y\|^{m'-(r-1)}.$$

Enfin, si y vérifie $\mathcal{P}(x)$, (on a restreint un certain nombre de fois le voisinage

$$\text{de } x) \left\| \sum_{i \leq m} \varphi^{i, r-1}(x,y) \right\| \leq \omega_{r-1,m}(\|x-y\|) \|x-y\|^{m-(r-1)} \text{ où } \omega_{r-1,m} \text{ est un module de}$$

continuité ne dépendant que de $r-1$ et m .

- A l'ordre $j=r$, les ordres inférieurs étant supposés vérifiés.

Soit $m' = (m+1)p + r$.

On a :

$$\begin{aligned} \|(\varphi^r(x))^p - (\sum_{i \leq m'} \varphi^{i,r}(x,y))^p\| \leq C \left[\|f^{rp}(x) - \sum_{i \leq m'p} f^{i,rp}(x,y)\| + \right. \\ \left. + \left\| \sum_{\substack{|i| \leq m'p \\ |j| = rp}} \varphi^{i_1 j_1} \dots \varphi^{i_p j_p} - \sum_{i_k \leq m'} \varphi^{i,r}, \dots, \varphi^{i_p,r} \right\| \right] \end{aligned}$$

On en déduit comme précédemment par découpage et application de l'hypothèse de récurrence : $\|(\varphi^r(x))^p - (\sum_{i \leq m'} \varphi^{i,r}(x,y))^p\| \leq C \|x-y\|^{m'-r}$ si y vérifie $\mathcal{P}(x)$.

Pour chaque y, il existe un $s \in G_p$ tel que :

$$\|\varphi^r(x) - s \sum_{i \leq m'} \varphi^{i,r}(x,y)\| \leq C \|x-y\|^{m+1}$$

et en particulier, si y vérifie $\mathcal{P}(x)$. (On restreint encore une fois le voisinage de x) $\|\varphi^r(x) - s \varphi^r(y)\| \leq C \sqrt{\|x-y\|}$. Si $s \neq 1$:

$$\|\varphi^r(x) - s \varphi^r(y)\| \geq d \|\varphi^r(x)\| - \frac{d}{d+3} \|\varphi^r(x)\| \geq C d(x, V_{rp})^\alpha.$$

Ainsi, si y vérifie $\mathcal{P}(x)$, $s=1$ et on a :

$$\|\varphi^r(x) - \sum_{i \leq m} \varphi^{i,r}(x,y)\| \leq \omega_{r,m}(\|x-y\|) \|x-y\|^{m-r}.$$

- A l'ordre $r+j$, les ordres inférieurs étant supposés vérifiés $\forall m$.

Soit $m' = (m+1)p + r + j$.

On multiplie $\varphi^{r+j}(x) - \sum_{i \leq m'p} \varphi^{i,r+j}(x,y)$ par $p(\varphi^r(x))^{p-1}$ et par

3.5.3, on peut faire apparaître :

$$f^{rp+j}(x) - \sum_{i \leq m'p} f^{i,rp+j}(x,y), \text{ quantité majorée en norme par}$$

$C\|x-y\|^{m'+1-(rp+j)}$. On fait "un développement limité" à l'ordre m' des

$$\varphi^{j_k}(x) = \sum_{i \leq m'} \varphi^{i,j_k}(x,y) + u_{j_k}(x,y) \text{ où } \|u_{j_k}(x,y)\| \leq \omega(\|x-y\|) \|x-y\|^{m'-j_k}$$

(On utilise l'hypothèse de récurrence à l'ordre m' pour des $j_k \leq r+j-1$).

Puis, à l'aide d'un découpage analogue à celui de l'étape $j=r-1$, on montre (y vérifiant $\mathcal{P}(x)$) que :

$$\|p(\varphi^r(x))^{p-1} \cdot \varphi^{r+j}(x) - \sum_{i \leq m'} p(\varphi^r(x))^{p-1} \varphi^{i,r+j}(x,y)\| \leq \omega(\|x-y\|) \|x-y\|^{m'-(r+j)}.$$

Enfin, si y vérifie $\mathcal{P}(x)$:

$$\|\varphi^{r+j}(x) - \sum_{i \leq m} \varphi^{i,r+j}(x,y)\| \leq \omega_{r+j,m}(\|x-y\|) \|x-y\|^{m-(r+j)} /$$

3.8 Avec les notations de (3.6) et (3.7), φ est un champ de Whitney de classe C^∞ sur U_x .

Preuve :

Soit m fixé. D'après (3.7), il existe deux constantes C, α et un module de continuité ω tels que :

$$\forall y \in U_x, \forall z \in B(y, Cd(y, V_{rp})^\alpha) \cap U_x, \forall |j| \leq m :$$

$$\|\varphi^j(y) - \sum_{i \leq m} \varphi^{i,j}(y,z)\| \leq \omega(\|y-z\|) \|y-z\|^{m-j}.$$

$$\text{Soit, } \rho = \inf_{y \in U_x} Cd(y, V_{rp})^\alpha > 0.$$

Pour $\|y-z\| \leq \rho$ et $|j| \leq m$:

$$\|\varphi^j(y) - \sum_{i \leq m} \varphi^{i,j}(y,z)\| \leq \omega(\|y-z\|) \|y-z\|^{m-j}.$$

Ainsi, φ est un champ de Whitney de classe C^m sur U_x et ceci $\forall m \geq 0$. /

On a donc montré qu'il existe une détermination de φ , fonction de Whitney de classe C^∞ au voisinage de tout $x \in W_r$. D'où la possibilité d'un raisonnement par récurrence. Comme on l'a déjà remarqué, c'est l'application du lemme de prolongement (3.4) qui permet de passer d'un W_r à un W_{r-1} . L'étape suivante permet de vérifier (3.4).

3.9 Avec les notations précédentes, il existe une détermination de classe C^∞ de φ sur un voisinage de U_x dans $V_{(r-2)p}$.

Preuve :

Soit $V_x = B(x, Cd(x, V_{rp})^{\alpha_r}) \cap W_{r-1}$ avec C telle que $U_x = B(x, Cd(x, V_{rp})^{\alpha_r}) \cap W_r$.

Soit $\mathcal{E}$ une application de V_x dans U_x satisfaisant à

$$\|y - \mathcal{E}(y)\| = d(y, U_x) = d(y, V_{(r-1)p}).$$

En procédant comme dans (3.7), nous obtenons le résultat suivant :

Pour tout $m \geq r-1$, il existe une constante C telle que :

$$\forall y \in V_x, \quad \left\| \sum_{i \leq m} \varphi^{i,j}(y, \mathcal{E}(y)) \right\| \leq Cd(y, V_{(r-1)p})^{m+1-j} \text{ et}$$

$$\left\| (\varphi^{r-1}(y))^p - \left(\sum_{i \leq m} \varphi^{i,r-1}(y, \mathcal{E}(y)) \right)^p \right\| \leq C^p d(y, V_{(r-1)p})^{(m+1-(r-1))p}$$

Jusqu'ici, une détermination de φ n'a pas été choisie "en dehors" de U_x . Nous allons voir que sur une "bande" entourant U_x , il existe une seule détermination de φ prolongeant celle de U_x et satisfaisant à (3.4).

Soit $q_0 = \left\lceil \frac{\alpha_{r-1}}{p} \right\rceil + 1$ et $q_1 = q_0 + (r-1)$. Pour tout $y \in V_x$, il existe $s \in G_p$ tel que :

$$\|s \varphi^{r-1}(y) - \sum_{i \leq q_1} \varphi^{i,r-1}(y, \mathcal{E}(y))\| \leq C_0 d(y, V_{(r-1)p})^{q_0}.$$

$$(\text{On a même } \|s \varphi^{r-1}(y) - \sum_{i \leq q_1} \varphi^{i,r-1}(y, \mathcal{E}(y))\| \leq C_1 d(y, V_{(r-1)p})^{q_1+1-(r-1)}).$$

Un raisonnement élémentaire utilisant l'inégalité précédente et (H) prouve qu'un tel s est unique si $d(y, V_{(r-1)p}) \leq A_{q_1}$ (A_{q_1} étant un réel indépendant de y).

Il existe donc une "bande entourant U_x " et une détermination de φ unique prolongeant celle sur U_x telle que pour tout y de cette bande, $\varphi(y)$ désignant la détermination de φ en y :

$$\| \varphi^{r-1}(y) - \sum_{i \leq q_1} \varphi^{i,r-1}(y, \mathcal{E}(y)) \| \leq C_1 d(y, V_{(r-1)p})^{q_1+1-(r-1)} \leq C_0 d(y, V_{(r-1)p})^{q_0}$$

Par le même raisonnement et en utilisant la même méthode que dans (3.7) dernière étape, on exhibe une suite décroissante de réels $(A_q)_{q \geq q_1}$ et une suite de réels $(B_q)_{q \geq q_1}$ telles que :

$\forall q \geq q_1$, $\forall y \in V_x$ et $d(y, V_{(r-1)p}) \leq A_q$, $\forall j \leq q$:

$$\| \varphi^j(y) - \sum_{i \leq q} \varphi^{i,j}(y, \mathcal{E}(y)) \| \leq B_q d(y, V_{(r-1)p})^{q+1-j}.$$

Ainsi, sur un voisinage U'_x de U_x dans $V_{(r-2)p}$, la condition (3.4.1) est satisfaite.

Nous allons montrer que (3.4.2) est vérifiée, en restreignant U'_x .

Il existe (3.8) C, α et $\forall y \in U'_x \setminus U_x$ une détermination C^∞ de φ notée $s.\varphi$ sur $B(y, C d(y, V_{(r-1)p})^\alpha) \cap W_{r-1}$.

Nous allons montrer que $s.\varphi$ coïncide avec φ (détermination de φ sur $U'_x \setminus U_x$) pour $d(y, V_{(r-1)p})$ assez petit. On aura ainsi trouvé un voisinage $U''_x \supset U_x$ convenable.

Soit $z \in B(y, C d(y, V_{(r-1)p})^\alpha) \cap W_{r-1}$.

$$\begin{aligned} \| s\varphi^{r-1}(z) - \sum_{i \leq q_1} \varphi^{i,r-1}(z, \mathcal{E}(z)) \| &\leq \| s\varphi^{r-1}(z) - \sum_{i \leq q_1} \varphi^{i,r-1}(z, y) \| + \\ &\| \sum_{i \leq q_1} \varphi^{i,r-1}(z, y) - \sum_{i \leq q_1} \varphi^{i,r-1}(z, \mathcal{E}(y)) \| + \\ &\| \sum_{i \leq q_1} \varphi^{i,r-1}(z, \mathcal{E}(y)) - \sum_{i \leq q_1} \varphi^{i,r-1}(z, \mathcal{E}(z)) \| \\ &\leq \omega(\|z-y\|) \|z-y\|^{q_1-(r-1)} + C \left[\|z-\mathcal{E}(y)\|^{q_1+1-(r-1)} + \|z-\mathcal{E}(z)\|^{q_1+1-(r-1)} \right] \end{aligned}$$

C et ω ne dépendant que de q_1 .

Une telle expression sera majorée par $C_0 d(z, V_{(r-1)p})^{q_0}$ pour y assez près de $V_{(r-1)p}$. D'après ce qui précède $s.\varphi$ dans un nouveau voisinage U''_x de U_x dans $V_{(r-2)p}$ coïncide avec φ .

Les conditions (3.4) sont ainsi satisfaites et φ est bien de classe C^∞ sur U''_x . /

3.10

CONCLUSION

Par récurrence, tout point $x \in V_0$ possède un voisinage U dans V_0 sur lequel il existe une détermination C^∞ de φ . D'après le théorème de Whitney ([5]), il existe une fonction g de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $D^k g = \varphi_k$ sur U . $g^P - f$ étant plate sur U , f vérifiant une inégalité de Łojasiewicz par rapport à V_0 , $\frac{g^P - f}{f}$ est prolongeable en une application h de classe C^∞ sur un voisinage de x dans Ω . ([5]). D'où le résultat, puisque $g^P = (1+h)f$ sur ce voisinage.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GLAESER G. : "Racine carrée d'une fonction différentiable". (1963),
Ann. Inst. Fourier, Tome XIII, Fascicule 2.

- [2] DIEUDONNE J. : "Sur un théorème de Glaeser". Journal d'analyse Mathématique,
Volume XXIII, (1970).

- [3] HÖRMANDER L. : "On the division of distributions by polynomials".
Ark. Mat. Stockholm, (1958).

- [4] CARTAN H. : "Sur les classes de fonctions définies par des inégalités
portant sur leurs dérivées successives".
Act. Sci. et ind. n° 867, (1940).

- [5] TOUGERON J.Cl. : "Idéaux de fonctions différentiables". Erg der math,
band 71 - Springer Verlag (1972).