

J. C. TOUGERON

Courbes analytiques sur un germe d'espace analytique et applications

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 1

« Séminaires d'analyse », , exp. n° 2, p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973__1_A2_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COURBES ANALYTIQUES SUR UN GERME D'ESPACE
ANALYTIQUE ET APPLICATIONS

par

J.C. TOUGERON

Si X désigne le germe en 0 (supposé non vide ; réduit ou non) d'une sous-variété algébrique de $\mathbb{C}^N$, on note $\mathcal{A}_X$ l'anneau des germes de fonctions algébriques sur X ; $\mathcal{O}_X$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur X ; $\hat{\mathcal{O}}_X$ le complété de $\mathcal{A}_X$ pour la topologie $\underline{m}_X$ -adique, $\underline{m}_X$ désignant l'idéal maximal de $\mathcal{A}_X$; $\tilde{m}_X$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_X$; $\hat{m}_X$ l'idéal maximal de $\hat{\mathcal{O}}_X$. Les anneaux $\mathcal{A}_X$, $\mathcal{O}_X$, $\hat{\mathcal{O}}_X$ seront toujours munis de leurs topologies : $\underline{m}_X$ -adique, $\tilde{m}_X$ -adique, $\hat{m}_X$ -adique, respectivement. Si Y est un second germe de variété algébrique et si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme algébrique, on note $f^* : \mathcal{A}_Y \longrightarrow \mathcal{A}_X$; $\tilde{f}^* : \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$; $\hat{f}^* : \hat{\mathcal{O}}_Y \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_X$, les homomorphismes de $\mathbb{C}$ -algèbres déduits de f . Cela posé, considérons les deux conjectures suivantes :

(A) L'application induite par $f^* : \mathcal{A}_Y \longrightarrow \mathcal{A}_X$ est ouverte.

(B) $\tilde{f}^* (\mathcal{O}_Y)$ est fermé dans $\mathcal{O}_X$.

La condition (A) signifie qu'il existe une application $\mathbb{N} \ni q \longrightarrow e(q) \in \mathbb{N}$ telle que, pour tout q :

$$f^*(\underline{m}_Y^q) \supset \underline{m}_X^{e(q)} \cap f^*(\mathcal{A}_Y).$$

Visiblement, si (A) est satisfaite, les applications $\tilde{f}^*$ et $\hat{f}^*$ sont aussi ouvertes ; en outre : $\ker \tilde{f}^* = \ker f^* \cdot \mathcal{O}_Y$; $\ker \hat{f}^* = \ker f^* \cdot \hat{\mathcal{O}}_Y$. S'il en est ainsi, $\hat{f}^*(\hat{\mathcal{O}}_Y)$ est complet, donc fermé dans $\hat{\mathcal{O}}_X$; il en résulte que l'adhérence de $\tilde{f}^*(\mathcal{O}_Y)$ dans $\mathcal{O}_X$ est égale à $\hat{f}^*(\hat{\mathcal{O}}_Y) \cap \mathcal{O}_X$. Si la condition (A) est vérifiée, la condition (B) est donc équivalente à la suivante :

$$(B') \quad \hat{f}^*(\hat{\mathcal{O}}_Y) \cap \mathcal{O}_X = \tilde{f}^*(\mathcal{O}_Y).$$

Nous démontrons (A) lorsque le germe X est réduit ; nous démontrons (B) sous des hypothèses encore plus restrictives (par exemple, si Y' , germe de variété

algébrique associé à l'idéal $\ker f^*$ de $\mathcal{K}_Y$, est régulier). En fait, si la conjecture (1.9) est vraie (cela paraît raisonnable ; voir fin du paragraphe 1), (B) et donc (B') sont vrais, lorsque X est réduit.

Signalons enfin que les résultats précédents sont faux en géométrie analytique. On sait en effet (voir [3]) qu'il existe des germes d'applications analytiques $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ telles que $\ker f^* = 0$ et $\ker \hat{f}^* \neq 0$.

La démonstration utilise quelques résultats simples concernant les courbes analytiques sur un germe d'espace analytique.

1. COURBES ANALYTIQUES SUR UN GERME D'ESPACE ANALYTIQUE.

Soit $\mathcal{P}_{n,q}$ de sous-espace de $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ formé des polynômes de degré $\leq q$. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de la norme $\|x\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, on pose, si

$P \in \mathcal{P}_{n,q}$ et A est un sous-ensemble de la boule $B(0, \frac{1}{2})$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \leq \frac{1}{2}} |P(x)|$$

$$\|P\|_A = \sup_{x \in A} |P(x)|$$

Lemme 1.1.

Il existe une constante $C_n > 0$, indépendante de q, telle que pour tout $P \in \mathcal{P}_{n,q}$ et tout sous-ensemble A de $B(0, \frac{1}{2})$, la mesure de Lebesgue de $\bar{A}$ étant supposée non nulle :

$$\|P\| \leq \frac{C_n^q}{(\text{mes } \bar{A})^{nq}} \cdot \|P\|_A$$

Preuve : On peut supposer A fermé. Procédons par récurrence sur n. Si $n=1$, il existe des points $x_0 < x_1 < \dots < x_q$ appartenant à $A \subset [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$, tels que, $\forall i$,

$$|x_i - x_{i+1}| \geq \frac{\text{mes } A}{q}. \text{ On a l'identité :}$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^q P(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \text{ d'où :}$$

$$\|P\| \leq \|P\|_A \frac{(q)^q}{(\text{mes } A)^q} \sum_{i=0}^q \frac{1}{i! (q-i)!} = \frac{\|P\|_A}{(\text{mes } A)^q} \frac{(2q)^q}{q!} \leq \frac{(2e)^q}{(\text{mes } A)^q} \|P\|_A.$$

Supposons le résultat démontré jusqu'à l'ordre $n-1$ et démontrons le pour n . Pour tout $x_1 \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$, soit A_{x_1} l'ensemble des points de A dont la première coordonnée est x_1 . A_{x_1} étant muni de sa mesure $(n-1)$ -dimensionnelle, l'ensemble $B = \{x_1 \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] ; \text{mes } A_{x_1} \geq \frac{\text{mes } A}{2}\}$ a une mesure $\geq \frac{\text{mes } A}{2}$ (car sinon, on aurait d'après Fubini : $\text{mes } A = \int_B \text{mes } A_{x_1} dx_1 + \int_{\mathbb{C}B} \text{mes } A_{x_1} dx_1 < \frac{\text{mes } A}{2} + \frac{\text{mes } A}{2}$). Posons $P_{x_1} = P(x_1, \dots) \in \mathcal{F}_{n-1, q}^{\mathbb{R}}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, si $x_1 \in B$:

$$\|P_{x_1}\| \leq \frac{(2^{n-1} C_{n-1})^q}{(\text{mes } A)^{(n-1)q}} \cdot \|P\|_A$$

Puisque $\text{mes } B \geq \frac{\text{mes } A}{2}$, en appliquant le cas $n=1$:

$$\|P\| \leq \frac{(4e)^q}{(\text{mes } A)^q} \cdot \frac{(2^{n-1} C_{n-1})^q}{(\text{mes } A)^{(n-1)q}} \|P\|_A, \text{ c.q.f.d. } /$$

Soient $\mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]] = \mathcal{F}_n^{\mathbb{R}}$ l'anneau des séries formelles ;
 $\mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\} = \mathcal{C}_n^{\mathbb{R}}$ l'anneau des séries convergentes. Identifions l'espace projectif $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ à l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^n$ issues de l'origine.

Proposition 1.2.

Soit $\varphi \in \mathcal{F}_n^{\mathbb{R}}$ et soit A un sous-ensemble mesurable et de mesure non nulle de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$.

(1) Si φ est analytique sur toute droite appartenant à A , i.e.

$\varphi(a_1 t, \dots, a_n t) \in \mathbb{R}\{t\}$ pour tout $\bar{a} = (\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \in A$, alors $\varphi \in \mathcal{C}_n^{\mathbb{R}}$.

(2) Si φ est μ -plate sur toute droite appartenant à A , alors φ est μ -plate.

Preuve : (1) Posons $\varphi = \sum_{q=0}^{\infty} \varphi_q$, où φ_q désigne la forme homogène de degré q de φ .

Par hypothèse, la fonction $f(\bar{a}) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \sqrt[q]{|\varphi_q(\frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|})|}$ prend des valeurs finies sur A .

Il en résulte qu'il existe un sous-ensemble A' de A mesurable et de mesure non nulle et un $\rho > 0$, tels que l'on ait uniformément sur A' , $f(\bar{a}) \leq 2\rho$. Soit A'' l'ensemble de mesure n -dimensionnelle non nulle, intersection du cône de A' avec la boule $B(o, \frac{1}{2})$; on a : $\|\varphi_q\|_{A''} \leq \rho^q$. D'après 1.1 :

$$\|\varphi_q\| \leq \left(\frac{C_n \cdot \rho}{(\text{mes } A'')^n} \right)^q.$$

D'après une inégalité classique (cf. [2], page 12, l'inégalité (10) est encore valable pour plusieurs variables), si $\varphi_q(x) = \sum_{|\omega|=q} a_\omega x^\omega$:

$$|a_\omega| \leq \frac{(2q)^q}{q!} \|\varphi_q\| \leq (2e)^q \|\varphi_q\|$$

La série φ est donc convergente.

(2) La preuve de (2) est immédiate et laissée au lecteur. /

Bien entendu, le résultat précédent est vrai a fortiori dans le cas complexe. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 1.3.

Soit $\varphi \in \mathcal{F}_n^t = \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ et soit A un sous-ensemble mesurable, et de mesure non nulle de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$.

1) Si φ est analytique sur toute droite appartenant à A , i.e.

$\varphi(a_1 t, \dots, a_n t) \in \mathbb{C}\{t\}$ pour tout $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A$, alors :

$$\varphi \in \mathcal{G}_n = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}.$$

2) Si φ est μ -plate sur toute droite appartenant à A , alors φ est μ -plate.

Soit $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)) \in \mathbb{C}\{t\}^n$, $\xi(0) = 0$, un germe de courbe analytique à l'origine de $\mathbb{C}^n$. Désignons par $\mathcal{C}_v(\xi)$ l'ensemble des courbes $\xi'(t)$ telles que $\xi(t) - \xi'(t)$ soit v -plate à l'origine. On a le résultat suivant :

Lemme 1.4.

Avec les notations précédentes :

1) Si $\varphi \in \mathcal{F}'_n$ est analytique sur chaque courbe $\xi'(t) \in \mathcal{C}_v(\xi)$, alors φ est analytique.

2) Il existe une application $\mathbb{N} \ni \mu \longrightarrow e(\mu) \in \mathbb{N}$ telle que si $\varphi \in \mathcal{F}'_n$ $e(\mu)$ -plate sur chaque courbe $\xi'(t) \in \mathcal{C}_v(\xi)$, φ est μ -plate.

Preuve : On peut supposer que ξ est égale à son jet d'ordre v à l'origine. Si $\xi = 0$, la proposition résulte immédiatement de 1.3. Si $\xi \neq 0$, on peut, par un changement linéaire de coordonnées, supposer que $\xi_i \neq 0$, pour $i=1, \dots, n$.

Considérons alors le germe d'application analytique f :

$$(z_1, \dots, z_n) \longmapsto (\xi_1(z_1^{v+1} + z_n), \dots, \xi_{n-1}(z_{n-1}^{v+1} + z_n), \xi_n(z_n))$$

Visiblement, si η est le germe de droite $t \longmapsto (a_1 t, \dots, a_{n-1} t, t)$, $f \circ \eta$ appartient à $\mathcal{C}_v(\xi)$.

(1) Si φ est analytique sur chaque courbe $\xi'(t) \in \mathcal{C}_v(\xi)$, $\varphi \circ f$ est analytique sur chaque droite η et, d'après 1.3. 1), $\varphi \circ f \in \mathcal{C}_n$. Le morphisme f étant visiblement plat et fini, $\varphi \in \mathcal{C}_n$ (on rappelle que $\mathcal{F}'_n$ est fidèlement plat sur $\mathcal{C}_n$, donc que $\mathcal{F}'_n / \mathcal{C}_n$ est plat sur $\mathcal{C}_n$).

(2) Le morphisme f étant plat et fini, il existe, d'après le théorème d'Artin-Rees, une application $\mathbb{N} \ni \mu \longrightarrow e(\mu) \in \mathbb{N}$ telle que l'hypothèse $\varphi \circ f$ est $e(\mu)$ -plate entraîne que φ est μ -plate. Si φ est $e(\mu)$ -plate sur chaque courbe $\xi'(t) \in \mathcal{C}_v(\xi)$, $\varphi \circ f$ est $e(\mu)$ -plate sur chaque droite η ; d'après 1.3. 2), $\varphi \circ f$ est $e(\mu)$ -plate, d'où le résultat. /

1.5.

On se propose d'étendre le résultat précédent, le germe régulier $(\mathbb{C}^n, 0)$ étant remplacé par un germe irréductible d'espace analytique X . Soient $\mathcal{O}_X$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur X ; $\hat{\mathcal{O}}_X$ son complété pour la topologie $\mathfrak{m}_X$ -adique ($\mathfrak{m}_X$: idéal maximal de $\mathcal{O}_X$). Soit n la dimension de $\mathcal{O}_X$.

On peut réaliser X comme germe d'espace analytique à l'origine de $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{N-n}$, les conditions suivantes étant satisfaites (cf. [4], page 49) :

(1.5.1) Si Π désigne la projection $X \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, l'homomorphisme Π^* :

$$\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \longrightarrow \mathcal{O}_X = \frac{\mathcal{O}_N}{\mathcal{I}} \text{ est injectif et fini.}$$

(1.5.2) Si p est la dimension du corps des fractions de $\mathcal{O}_X$ sur le corps des fonctions de $\mathcal{O}_n$, le polynôme minimal de $\bar{z}_{n+1}$ est un polynôme distingué :

$$P(Z) = Z^p + \sum_{i=1}^p a_i Z^{p-i}, \text{ à coefficients } a_i \in \mathcal{O}_n \text{ (donc } z_{n+1}^p + \sum_{i=1}^p a_i z_{n+1}^{p-i} \in \mathcal{A})$$

(1.5.3) Si Δ est le discriminant de ce polynôme, $\Delta \neq 0$, et :

$$\Delta \cdot \mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_n + \mathcal{O}_n \cdot \bar{z}_{n+1} + \dots + \mathcal{O}_n \cdot \bar{z}_{n+1}^{p-1}$$

$$\text{En particulier, } \Delta \cdot \bar{z}_{n+j} = \sum_{i=0}^{p-1} a_{ij} \bar{z}_{n+1}^i, \text{ pour } j=2, \dots, N-n, \text{ les } a_{ij} \in \mathcal{O}_n.$$

Enfin, le complété $\hat{\mathcal{O}}_X$ de $\mathcal{O}_X$ est intègre ; les résultats précédents subsistent en remplaçant $\mathcal{O}_X$ par $\hat{\mathcal{O}}_X$, $\mathcal{O}_n$ par $\mathcal{F}_n$; en particulier $\hat{\mathcal{O}}_X$ est de type fini sur $\mathcal{F}_n$ et :

$$\Delta \cdot \hat{\mathcal{O}}_X \subset \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_n \cdot \bar{z}_{n+1} + \dots + \mathcal{F}_n \cdot \bar{z}_{n+1}^{p-1}.$$

Soit $\eta(t)$ un germe de courbe analytique à l'origine de $\mathbb{C}^n$, tel que $\Delta(\eta(t)) \neq 0$. D'après ce qui précède et le théorème de Puiseux (voir [4], lemme 8.1, chap. III), la courbe $\eta(t)$ se relève en des courbes dans X , analytiques en $t^{1/p}$: $\xi^1(t), \dots, \xi^p(t)$ (donc $\Pi \circ \xi^i(t) = \eta(t)$). Si l'on pose $\xi^i(t) = (\xi_1^i(t), \dots, \xi_N^i(t))$, les $\xi_{n+1}^1(t), \dots, \xi_{n+1}^p(t)$ sont les zéros du polynôme $Z^p + \sum_{i=1}^p a_i(\eta(t)) Z^{p-i}$, et donc vérifient l'identité :

$$\prod_{i < j} (\xi_{n+1}^i(t) - \xi_{n+1}^j(t))^2 = \Delta(\eta(t)).$$

Considérons une courbe analytique $\xi(t)$ dans X . Si λ et ν sont des entiers ≥ 1 , désignons par $\mathcal{C}_\nu^\lambda(\xi)$ l'ensemble des courbes $\xi'(t)$ dans X analytiques en $t^{1/\lambda}$ telles que $\xi'(t) - \xi(t)$ soit ν -plate à l'origine (cela signifie que $\xi'(t^\lambda) - \xi(t^\lambda)$ est $\lambda\nu$ -plate à l'origine, i.e. les tronqués à l'ordre $\lambda\nu$ des germes d'applications analytiques $\xi'(t^\lambda)$ et $\xi(t^\lambda) : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow X$ sont égaux).

La démonstration du résultat principal nécessite deux lemmes préliminaires.

Lemme 1.6.

Soit $\xi(t)$ une courbe analytique dans X ; posons $\eta = \Pi \circ \xi$. Si

$\Delta(\eta(t)) \neq 0$, à tout entier $v \geq 1$, on peut associer un entier $v_0 \geq 1$, tel que :

$$\Pi \mathcal{C}_v^{p!}(\xi) \supset \mathcal{C}_{v_0}(\eta)$$

i.e. chaque courbe de $\mathcal{C}_{v_0}(\eta)$ se relève en une courbe de $\mathcal{C}_v^{p!}(\xi)$.

Preuve : Posons $\Delta(\eta(t)) = \alpha_1 t^{v_1} + \alpha_2 t^{v_1+1} + \dots$, avec $\alpha_1 \neq 0$. On sait que $\xi_{n+1}(t)$ est l'une des racines du polynôme distingué : $Z^p + \sum_{i=1}^p a_i(\eta(t)) Z^{p-i}$.

Il existe donc un entier $v_0 \geq v + v_1$ vérifiant la condition suivante : si

$\eta'(t) \in \mathcal{C}_{v_0}(\eta)$, il existe $\xi'_{n+1}(t)$ racine du polynôme $Z^p + \sum_{i=1}^p a_i(\eta'(t)) Z^{p-i}$ telle que $\xi_{n+1}(t) - \xi'_{n+1}(t)$ soit $v+v_1$ -plate à l'origine. Soit $\xi' = (\xi'_1, \dots, \xi'_N)$

la courbe de X relevant $\eta'(t)$ et correspondant à cette racine. D'après 1.5. 3),

pour $j=2, \dots, N-n$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta(\eta(t)) \cdot \xi_{n+j}(t) &= \sum_{i=0}^{p-1} a_{ij}(\eta(t)) \xi_{n+1}(t)^i \\ \Delta(\eta'(t)) \cdot \xi'_{n+j}(t) &= \sum_{i=0}^{p-1} a_{ij}(\eta'(t)) \xi'_{n+1}(t)^i \end{aligned}$$

Or, $\Delta(\eta(t)) - \Delta(\eta'(t))$, de même que la différence des seconds membres des égalités précédentes, sont $v + v_1$ -plates à l'origine. Puisque $\Delta(\eta(t)) = \alpha_1 t^{v_1} + \dots$, $\Delta(\eta'(t)) = \alpha_1 t^{v_1} + \dots$, la différence $\xi_{n+j}(t) - \xi'_{n+j}(t)$ est v -plate à l'origine. Ainsi, la courbe $\xi'(t)$ appartient à $\mathcal{C}_v^{p!}(\xi)$, c.q.f.d. /

Lemme 1.7.

Il existe une application $\mathbb{N} \ni \mu \longrightarrow e'(\mu) \in \mathbb{N}$ vérifiant la propriété suivante : si deux éléments $f \in \mathcal{O}_X$, $g \in \mathcal{O}_X$ sont tels que $f \cdot g$ soit $e'(\mu)$ -plate à l'origine, alors f (ou g) est μ -plate à l'origine.

Preuve : Posons $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_N / \mathcal{F}$, et soit $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ un système de générateurs de l'idéal $\mathcal{F}$. Considérons l'équation implicite :

$$y_1 \cdot y_2 = \sum_{j=1}^q y_{j+2} \cdot \varphi_j(z)$$

On sait (voir [1]) qu'il existe une application $\mathbb{N} \ni \mu \longrightarrow e'(\mu) \in \mathbb{N}$ telle que toute solution formelle $\bar{y}(z)$ de cette équation, modulo $\underline{m}^{e'(\mu)+1}$ ($\underline{m}$: idéal maximal de $\mathcal{O}_N$) puisse être approchée à l'ordre μ par une solution analytique. En conséquence, si $f.g$ est $e'(\mu)$ -plate à l'origine, il existe $f' \in \mathcal{O}_X$, $g' \in \mathcal{O}_X$, tels que $f'.g' = 0$, et $f-f'$, $g-g'$ sont μ -plates à l'origine. Si par exemple, $f'=0$, on en déduit que f est μ -plate à l'origine, c.q.f.d. /

Proposition 1.8.

Soit $\xi(t)$ une courbe analytique dans X ; posons $\eta = \Pi \circ \xi$ et supposons que $\Delta(\eta(t)) \neq 0$. Il existe une application $\mathbb{N} \ni \mu \longrightarrow e(\mu) \in \mathbb{N}$ telle que, si $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_X$ est $e(\mu)$ -plate sur chaque courbe $\xi'(t) \in \mathcal{C}_v^{pl}(\xi)$, alors φ est μ -plate.

Preuve : D'après 1.6, $\Pi \mathcal{C}_v^{pl}(\xi) \supset \mathcal{C}_{v_0}(\eta)$. D'après 1.4.2, il existe une application $\mathbb{N} \ni \mu \longrightarrow e''(\mu) \in \mathbb{N}$ telle que, si $\psi \in \mathcal{F}'_n$ est $e''(\mu)$ -plate sur chaque courbe $\eta'(t) \in \mathcal{C}_{v_0}(\eta)$, ψ est μ -plate.

Soit $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_X$, et supposons qu'il existe $\psi_1, \dots, \psi_s \in \mathcal{F}'_n$ telles que $\varphi^s + \sum_{i=1}^s \psi_i \varphi^{s-i}$ soit $e''(e'e'')^{s-1}(\mu)$ -plate à l'origine de X et φ $e''(e'e'')^{s-1}(\mu)$ -plate sur chaque courbe $\xi'(t) \in \mathcal{C}_v^{pl}(\xi)$. Montrons alors par récurrence sur s , que φ est μ -plate à l'origine de X (La fonction e' est celle fournie par le lemme 1.7 ; d'autre part, on suppose que les fonctions e' et e'' sont croissantes, ce qui n'est pas restrictif).

C'est vrai pour $s=1$. Si $s > 1$, on voit que ψ_s est $(e' e'')^{s-1}(\mu)$ -plate à l'origine de $\mathbb{C}^n$. D'après 1.7, ou φ est $e''(e'e'')^{s-2}(\mu)$ -plate à l'origine de X , ou $\varphi^{s-1} + \sum_{i=1}^{s-1} \psi_i \varphi^{s-i-1}$ est $e''(e'e'')^{s-2}(\mu)$ -plate. Dans le 1er cas, le résultat est démontré ; dans le second, on applique l'hypothèse de récurrence.

Ceci démontre la proposition, car tout $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_X$ vérifie une équation de dépendance intégrale :

$$\varphi^s + \sum_{i=1}^s \psi_i \varphi^{s-i} = 0, \text{ avec } s \leq p \text{ et } \psi_i \in \mathcal{F}'_n. /$$

L'analogue de la proposition précédente, la platitude étant remplacée par l'analyticité, serait le résultat suivant :

Conjecture 1.9.

Soit $\xi(t)$ une courbe analytique dans X ; posons $\eta = \Pi \circ \xi$ et supposons que $\Delta(\eta(t)) \neq 0$. Alors, si $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_X$ est analytique sur chaque courbe $\xi'(t) \in \mathcal{C}_V^{p!}(\xi)$, φ est analytique, i.e. $\varphi \in \mathcal{O}_X$.

D'après 1.4. 1), ceci est vrai lorsque X est régulier. On a aussi le résultat suivant, facile à vérifier : soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme analytique entre germes irréductibles ; si $f^* : \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$ est injectif et fini et si X vérifie 1.9, Y le vérifie également. Signalons enfin qu'il suffirait de démontrer 1.9, lorsque X est un germe irréductible d'hypersurface à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$. On peut démontrer le résultat suivant, plus faible et malheureusement d'aucune utilité pour la suite :

Proposition 1.10.

Soit $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_X$; si φ est analytique sur chaque courbe analytique dans X , φ est analytique, i.e. $\varphi \in \mathcal{O}_X$.

Preuve : Soit $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_X$; d'après 1.5, il existe $a_1, \dots, a_p \in \mathcal{F}'_n$ telles que :

$$\Delta \cdot \varphi = \sum_{i=1}^p a_i \bar{z}_{n+1}^{p-i}.$$

Soit $\eta(t)$ une courbe analytique dans $(\mathbb{C}^n, 0)$ telle que $\Delta(\eta(t)) \neq 0$. Soient $\xi^1(t), \dots, \xi^p(t)$ les courbes dans X qui relèvent $\eta(t)$. Par hypothèse, pour $j=1, \dots, p$: $\sum_{i=1}^p a_i (\eta(t)) \xi_{n+1}^j(t)^{p-i} = \sigma_j(t)$ est analytique.

Résolvant ce système et remarquant que le carré de son déterminant est $\Delta(\eta(t)) \neq 0$, on vérifie que $a_1(\eta(t)), \dots, a_p(\eta(t))$ sont analytiques. D'après 1.3.1) $a_1, \dots, a_p$ sont analytiques. Ainsi, $\Delta \cdot \varphi \in \mathcal{O}_X$; l'anneau $\mathcal{F}'_X$ étant fidèlement plat sur $\mathcal{O}_X$, $\varphi \in \mathcal{O}_X$, c.q.f.d. /

2. PREUVES DE (A) et (B) (X REDUIT).

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme algébrique entre germes de variétés algébriques. Si X est réduit, nous démontrons (A) et, parallèlement, modulo 1.9, la conjecture (B). Visiblement, on peut supposer que l'homomorphisme $f^* : \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$ est injectif.

2.1. Passage du cas réduit au cas irréductible.

Supposons (A) et (B) démontrées lorsque X est irréductible. Si X est simplement réduit, soient $X_1, \dots, X_p$ ses composantes irréductibles ; $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_p$ les idéaux premiers de $\mathcal{O}_X$ associés à $X_1, \dots, X_p$ respectivement ; $Y_1, \dots, Y_p$ les germes de variétés irréductibles associés à $f^{*-1}(\mathcal{P}_1), \dots, f^{*-1}(\mathcal{P}_p)$ respectivement. On a un diagramme commutatif d'applications injectives :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{O}_X \\ \downarrow i_Y & & \downarrow i_X \\ \prod_{i=1}^p \mathcal{O}_{Y_i} & \xrightarrow{\prod f_i^*} & \prod_{i=1}^p \mathcal{O}_{X_i} \end{array}$$

Par hypothèse, $\prod f_i^*$ est un isomorphisme topologique de $\prod_{i=1}^p \mathcal{O}_{Y_i}$ sur son image ; il en sera de même de f^* , et donc (A) est démontrée.

On a de même un diagramme commutatif d'applications injectives :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y & \xrightarrow{\sim f^*} & \mathcal{O}_X \\ \downarrow \sim i_Y & & \downarrow \sim i_X \\ \prod_{i=1}^p \mathcal{O}_{Y_i} & \xrightarrow{\prod \sim f_i^*} & \prod_{i=1}^p \mathcal{O}_{X_i} \end{array}$$

Par hypothèse, l'image de $\prod \sim f_i^*$ est fermée dans $\prod_{i=1}^p \mathcal{O}_{X_i}$; l'image de $\sim f^*$ sera donc aussi fermée dans $\mathcal{O}_X$, car $\mathcal{O}_Y$ est fermé dans $\prod_{i=1}^p \mathcal{O}_{Y_i}$; ceci démontre (B).

Nous supposons désormais que X est irréductible et que $f^* : \mathcal{A}_Y \longrightarrow \mathcal{A}_X$ est injective. Soient $[\mathcal{A}_X]$, $[\mathcal{A}_Y]$ les corps des fractions de $\mathcal{A}_X$ et $\mathcal{A}_Y$ respectivement.

Lemme 2.2.

Soit p le degré de transcendance de $[\mathcal{A}_X]$ sur $[\mathcal{A}_Y]$. Alors, $f = \Pi \circ g$, où $g : X \longrightarrow Y \times (\mathbb{C}^p, 0) = V$ est un germe d'application algébrique tel que g^* soit injective et $[\mathcal{A}_X]$ une extension algébrique finie de $[\mathcal{A}_V]$; $\Pi : Y \times (\mathbb{C}^p, 0) \longrightarrow Y$ la projection évidente.

Preuve : Soient $\xi_1, \dots, \xi_p \in \underline{m}_X$ tels que $\xi_1, \dots, \xi_p$ soient algébriquement indépendants sur $[\mathcal{A}_Y]$ et $[\mathcal{A}_X]$ soit une extension algébrique finie de $[\mathcal{A}_Y[\xi_1, \dots, \xi_p]]$. Il suffit de prendre pour $\mathcal{A}_V$ le localisé de $\mathcal{A}_Y[\xi_1, \dots, \xi_p]$ par rapport à l'idéal maximal engendré par $\underline{m}_Y$ et $\xi_1, \dots, \xi_p$.

Soit q la dimension de $[\mathcal{A}_X]$ sur $[\mathcal{A}_V]$. Le corps $[\mathcal{A}_X]$ est engendré, en tant qu'algèbre sur $[\mathcal{A}_V]$, par un élément $\theta \in [\mathcal{A}_X]$. Visiblement, quitte à multiplier θ par un élément de $\mathcal{A}_V \setminus \{0\}$, on peut supposer que $\theta \in \mathcal{A}_X$, ou mieux que $\theta \in \underline{m}_X$, et que son polynôme minimal :

$$P(Z) = Z^q + \sum_{i=1}^q a_i Z^{q-i}$$

a ses coefficients $a_i \in \mathcal{A}_V$. Soit $\theta_1, \dots, \theta_r$ une famille d'éléments de $\underline{m}_X$ telle que tout élément de $\mathcal{A}_X$ soit de la forme $\mathcal{Q}(1 + \mathcal{P})^{-1}$ où $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$ sont des polynômes en $\theta_1, \dots, \theta_r$ à coefficients dans $\mathcal{A}_V$, $\mathcal{P} \in \underline{m}_X$. Il existe des polynômes

$Q_j(Z) = \sum_{i=0}^{p-1} a_{ij} Z^i$, à coefficients $a_{ij} \in \mathcal{A}_V$ et $S \in \mathcal{A}_V$, $S \neq 0$, tels que, pour

$j=1, \dots, r$:

$$S \cdot \theta_j = \sum_{i=0}^{p-1} a_{ij} \theta_j^i.$$

Lemme 2.3.

Soit $\xi(t)$ un germe de courbe analytique dans X et posons : $\eta(t) = g \circ \xi(t)$. Supposons que $S(\eta(t)) \neq 0$. Alors, il existe un entier $v \geq 1$, tel que pour tout entier

$\lambda \geq 1$, toute courbe dans $V : \eta'(t) \in \mathcal{C}_V^\lambda(\eta)$ se relève (par g) en une courbe analytique en $t^{\frac{1}{\lambda \cdot q!}}$ dans X .

Preuve : Par hypothèse :

$$\theta(\xi(t))^q + \sum_{i=1}^q a_i (\eta(t)) \theta(\xi(t))^{q-i} = 0 \text{ et pour } j=1, \dots, r :$$

$$S(\eta(t)) \cdot \theta_j(\xi(t)) = \sum_{i=0}^{p-1} a_{ij} (\eta(t)) \theta(\xi(t))^i.$$

Puisque $S(\eta(t)) \neq 0$,

$$S(\eta(t)) = \alpha_1 t^{v_1} + \alpha_2 t^{v_1+1} + \dots, \text{ avec } \alpha_1 \neq 0, v_1 \text{ entier } \geq 0.$$

Choisissons $v \geq v_1$ assez grand de telle sorte que, si $\eta'(t) \in \mathcal{C}_V^\lambda(\eta)$, il existe $\bar{\theta}(t)$ analytique en $t^{\frac{1}{q! \lambda}}$ telle que :

$$\bar{\theta}(t)^q + \sum_{i=1}^q a_i (\eta'(t)) \bar{\theta}(t)^{q-i} = 0$$

et $\theta(\xi(t)) - \bar{\theta}(t)$ soit v_1 -plate.

Définissons $\bar{\theta}_1(t), \dots, \bar{\theta}_r(t)$ par les identités :

$$S(\eta'(t)) \cdot \bar{\theta}_j(t) = \sum_{i=0}^{p-1} a_{ij} (\eta'(t)) \bar{\theta}(t)^i$$

Visiblement, $S(\eta'(t)) = \alpha_1 t^{v_1} + \dots$; puisque $\sum_{i=0}^{p-1} a_{ij} (\eta(t)) \theta(\xi(t))^i$ est v_1 -

plate à l'origine (car $\theta_j(\xi(t))$ est 0-plate), il en est de même de

$\sum_{i=0}^{p-1} a_{ij} (\eta'(t)) \bar{\theta}(t)^i$; ainsi, pour $j=1, \dots, r$, $\bar{\theta}_j(t)$ est 0-plate.

L'homomorphisme $\eta'^* : \mathcal{A}_V \longrightarrow \mathbb{C}\{t^{1/\lambda}\}$ se prolonge de manière unique en un homomorphisme $\xi'^* : \mathcal{A}_V[\theta]_S \longrightarrow [\mathbb{C}\{t^{1/(q! \lambda)}\}]$ tel que $\xi'^*(\theta) = \bar{\theta}(t)$ ($\mathcal{A}_V[\theta]_S$ désigne l'anneau des polynômes en θ à coefficients de la forme φ/S^s , $\varphi \in \mathcal{A}_V$, s entier). Cet homomorphisme ξ'^* induit un homomorphisme $\xi'^* :$

$$\mathcal{A}_V[\theta_1, \dots, \theta_r] \longrightarrow \mathbb{C}\{t^{1/(q! \lambda)}\} \text{ tel que, pour } j=1, \dots, r : \xi'^*(\theta_j) = \bar{\theta}_j(t) ;$$

enfin, ce dernier se prolonge de manière unique en un homomorphisme, noté encore

$$\xi'^* : \mathcal{A}_X \longrightarrow \mathbb{C}\{t^{1/(q! \lambda)}\}. \text{ La courbe } \xi' \text{ ainsi obtenue relève } \eta', \text{ c.q.f.d. } \quad \square$$

2.4. Preuves de (A) et (B).

Rappelons tout d'abord qu'il existe $\Delta \in \mathcal{A}_Y \setminus \{0\}$ (a priori $\Delta \in \mathcal{C}_Y$, mais en utilisant le théorème de normalisation pour les variétés algébriques, on voit qu'on peut choisir Δ dans $\mathcal{A}_Y$) et un entier $\lambda \geq 1$ tels que, si $\gamma(t)$ est une courbe analytique dans Y , vérifiant $\Delta(\gamma(t)) \neq 0$:

(1) Il existe une application $\mathbb{N} \ni \mu \longrightarrow e(\mu) \in \mathbb{N}$ telle que si $\varphi \in \hat{\mathcal{C}}_Y$ est $e(\mu)$ -plate sur chaque courbe $\gamma'(t) \in \mathcal{C}_Y^\lambda(\gamma)$, alors φ est μ -plate, (d'après 1.8).

Et en admettant 1.9 :

(2) Si $\varphi \in \hat{\mathcal{C}}_Y$ est analytique sur chaque courbe $\gamma'(t) \in \mathcal{C}_Y^\lambda(\gamma)$, $\varphi \in \mathcal{C}_Y$.

Ceci rappelé, il existe une courbe analytique $\xi(t)$ dans X , telle que, si l'on pose $\eta(t) = g \circ \xi(t) : ((\Delta \circ \Pi).S)(\eta(t)) \neq 0$ (sinon, $g^*((\Delta \circ \Pi).S)$ serait nul sur toute courbe analytique dans X , donc nulle ; il en résulterait que $(\Delta \circ \Pi).S=0$, ce qui est absurde). Posons $\gamma(t) = \Pi \circ \eta(t) = f \circ \xi(t)$; on a $\Delta(\gamma(t)) \neq 0$. D'après 2.3, il existe un entier ν tel que toute courbe $\gamma'(t) \in \mathcal{C}_Y^\lambda(\gamma)$ (qui se relève de manière évidente en une courbe $\eta'(t) \in \mathcal{C}_\nu^\lambda(\eta)$) se relève par f en une courbe analytique dans X , en $t^{1/\lambda.q!}$.

Preuve de (A) : Si $\varphi \in \mathcal{A}_Y$ est telle que $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ est $\lambda.q!$ $e(\mu)$ -plate, $\varphi \circ f$ est $e(\mu)$ -plate sur chaque courbe en $t^{1/\lambda.q!}$; donc φ est $e(\mu)$ -plate sur toute courbe $\gamma'(t) \in \mathcal{C}_Y^\lambda(\gamma)$; d'après (1), φ est μ -plate.

Preuve de (B) : Si $\varphi \in \hat{\mathcal{C}}_Y$ est telle que $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ est analytique, alors est analytique sur chaque courbe $\gamma'(t) \in \mathcal{C}_Y^\lambda(\gamma)$; d'après (2), $\varphi \in \mathcal{C}_Y$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARTIN M. : "On the solutions of analytic equations", Invent. Math. 5 - 277 - 291 (1968).

- [2] CARTAN H. : "Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives". Actualités Scientifiques et Industrielles, 867 - Hermann (1940).

- [3] GABRIELOV A.M. : "The formal relations between analytic functions". Functional Anal. Appl. 5 (1971), 318-319.

- [4] TOUGERON J.C1. : "Idéaux de fonctions différentiables". Ergebnisse Der Mathematik". Band 71, Springer Verlag (1972).