

J. CL. TOUGERON

$\mathcal{G}$ -stabilité des germes d'applications différentiables

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 1

« Séminaires d'analyse », , exp. n° 1, p. 1-29

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973__1_A1_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

$\mathcal{G}$ -STABILITE DES GERMES D'APPLICATIONS DIFFERENTIABLES

par

J.C1. TOUGERON

1. Notations et définitions.

1.1. Soient Y un sous-espace d'un espace topologique X ; $\mathcal{G}$ un groupe opérant sur X (i.e. on a une application : $\mathcal{G} \times X \ni (g, x) \longrightarrow g.x \in X$ telle que, $\forall g, g', x : g'.(g.x) = (g'.g)x$, et telle que pour tout $g \in \mathcal{G}$, $x \longmapsto g.x$ soit continu et donc un homéomorphisme de X sur lui-même). Un point $y \in Y$ est dit $\mathcal{G}$ -stable dans Y si $\mathcal{G}.y \cap Y$ est un ouvert de Y . Les points $\mathcal{G}$ -stables forment un ouvert de Y . Si cet ouvert est dense dans Y , nous dirons que la $\mathcal{G}$ -stabilité (dans Y) est générique. Dans cet article, nous étudions un exemple de $\mathcal{G}$ -stabilité.

1.2. Soit $\mathfrak{r}$ un sous-groupe de Lie de dimension q du groupe linéaire $GL(p, \mathbb{R})$. Soient $C_{0,e}^r(\mathbb{R}^n, \Gamma) = G_r$ le groupe des germes en 0 des applications g de classe C^r de $\mathbb{R}^n$ dans Γ telles que $g(0) = e$; $C_0^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = X_r$, l'espace des germes en 0 des applications φ de classe C^r de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$; Dif_r le groupe des germes en 0 des difféomorphismes τ de classe C^r d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, tels que $\tau(0) = 0$. Si $\varphi \in X_r$, on désigne par $j^r(\varphi)$ le jet d'ordre r de φ à l'origine et l'on note $\hat{X}_r$ l'espace de tous ces jets, φ décrivant X_r . Enfin, on munit X_r de l'unique topologie compatible avec sa structure de groupe additif et telle qu'un système fondamental de voisinages de 0 soit formé des $(j^s)^{-1}(0)$, s fini $\leq r$.

Les groupes G_r et Dif_r opèrent de manière évidente sur X_r ; si $g \in G_r$, $\tau \in \text{Dif}_r$ et $\varphi \in X_r$, par définition : $g.\varphi = (x \longmapsto g(x). \varphi(x))$ et $\tau.\varphi = \varphi \circ \tau^{-1}$. On a visiblement : $\tau.(g.\varphi) = (g \circ \tau^{-1}).(\tau.\varphi)$. Munissons l'ensemble $\mathcal{G}_r = G_r \times \text{Dif}_r$ de la structure de groupe définie par la multiplication :

$(g', \tau').(g, \tau) = (g'.g \circ \tau'^{-1}, \tau' \circ \tau)$: il est immédiat que le groupe $\mathcal{G}_r$ opère sur X_r par la formule : $(g, \tau).\varphi = g.(\tau.\varphi)$.

Enfin, on désigne par $\hat{G}_r$ (resp. $\hat{\text{Dif}}_r$) le groupe des jets d'ordre r des éléments de G_r (resp. Dif_r) ; par $\hat{\mathcal{G}}_r$ l'ensemble $\hat{G}_r \times \hat{\text{Dif}}_r$ muni de la structure de groupe quotient de $\mathcal{G}_r$. Visiblement, $\hat{\mathcal{G}}_r$ est un groupe de Lie opérant analytiquement sur $\hat{X}_r$ (on quotiente l'action de $\mathcal{G}_r$ sur X_r).

Définition 1.3 : Un jet $\omega \in \hat{X}_s$ est $\mathcal{G}_r$ -suffisant dans X_m ($m \geq s$, $m \geq r$) si pour tous $\varphi, \varphi' \in X_m$ tels que $j^s(\varphi) = j^s(\varphi') = \omega$, il existe $(g, \tau) \in \mathcal{G}_r$ tel que $\varphi' = (g, \tau) \cdot \varphi$.

En particulier, s'il en est ainsi, l'orbite de φ sous l'action du groupe $\mathcal{G}_r$ contient ω (considéré comme le germe d'une application polynomiale de $d^0 \leq s$).

Avec cette définition, on voit qu'un germe $\varphi \in X_m$ ($m < \infty$) est $\mathcal{G}_r$ -stable dans X_m ($r \leq m$) si et seulement si $j^m(\varphi)$ est $\mathcal{G}_r$ -suffisant dans X_m . De même, un germe $\varphi \in X_\infty$ est $\mathcal{G}_r$ -stable dans X_∞ si et seulement s'il existe $s < \infty$ tel que $j^s(\varphi)$ soit $\mathcal{G}_r$ -suffisant dans X_∞ .

Dans les paragraphes suivants, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un germe $\varphi \in X_\infty$ soit $\mathcal{G}_\infty$ -stable dans X_∞ (§ 2) ; $\mathcal{G}_r$ -stable dans X_∞ , $r < \infty$ (§ 4). Dans le paragraphe 3, nous caractérisons les groupes Γ pour lesquels la $\mathcal{G}_\infty$ -stabilité dans X_∞ est générique. Enfin, nous terminons par quelques exemples (§ 5).

Ce travail s'inspire de [6]. La plupart des résultats du chapitre II de l'article précité sont des cas particuliers des théorèmes qui suivent ; en outre, ces résultats sont démontrés de manière plus naturelle et plus agréable.

Les entiers n et p sont fixés une fois pour toutes ; aussi n'apparaissent-ils pas dans les notations. En outre, l'indice ∞ sera omis et nous noterons $\mathcal{G}$ au lieu de $\mathcal{G}_\infty$; X au lieu de X_∞ , etc...

2. Critères de $\mathcal{G}$ -stabilité dans X .

Soient $\mathcal{E}_r$ l'anneau des germes en 0 des applications de classe C^r de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$; $\underline{m}_r$ l'idéal maximal de $\mathcal{E}_r$. Rappelons tout d'abord (cf. [6], chap. II, corollaire prop. 1, lorsque $r = \infty$) le résultat fondamental suivant
($x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_s)$ sont des systèmes de coordonnées de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^s$ respectivement) :

Lemme 2.1 : Soit $f = (f_1, \dots, f_p)$ le germe à l'origine d'une application de classe C^r ($r \geq 3$) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que $f(0,0) = 0$. Soit M l'application $\mathcal{E}_{r-1}$ -linéaire de $\mathcal{E}_{r-1}^s$ dans $\mathcal{E}_{r-1}^p$ définie par la matrice jacobienne $(\frac{\partial f}{\partial y_1}(x,0), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_s}(x,0))$; posons $\mathcal{Y} = \text{Ann}(\text{coker } M)$.

Si $f(x,0) = M \cdot \beta(x)$, où $\beta(x)$ a toutes ses composantes dans $\mathcal{Y} \cdot \underline{m}_{r-2}$, (en particulier, si $f(x,0)$ a toutes ses composantes dans $\mathcal{Y}^2 \cdot \underline{m}_{r-2}$), il existe $y(x)$ ayant ses composantes dans $\mathcal{Y} \cdot \mathcal{E}_{r-2} \cap \mathcal{Y} \cdot \underline{m}_{r-2} \cdot \mathcal{E}_{r-3}$ telle que $f(x, y(x)) = 0$.

Preuve : Par hypothèse, $f(x,0) = M \cdot \sum_{i=1}^m \delta_i \cdot \beta^i$, où $\delta_1, \dots, \delta_m \in \mathcal{Y}$ et $\beta^1, \dots, \beta^m$

ont leurs composantes dans $\underline{m}_{r-2}$. Visiblement, il existe des matrices N_j :

$\mathcal{E}_{r-1}^p \xrightarrow{\quad} \mathcal{E}_{r-1}^s$ telles que $M \circ N_j = \delta_j \cdot I$, pour $j=1, \dots, m$ (I : matrice unité $p \times p$).

Posons $Z = (Z_1, \dots, Z_s)$; $Z^i = (Z_1^i, \dots, Z_s^i)$ pour $i=1, \dots, m$. Développons par la formule de Taylor le germe d'application $f(x, Z)$ sous la forme :

$$f(x, Z) = f(x, 0) + M \cdot Z + \sum_{i,j=1}^s g_{ij} Z_i Z_j$$

où les g_{ij} sont de classe C^{r-2} , à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Par substitution :

$$f(x, \sum_{i=1}^m \delta_i \cdot Z^i) = f(x, 0) + M \cdot \sum_{i=1}^m \delta_i \cdot Z^i + \sum_{i,j=1}^m \gamma_{ij}(x, Z^1, \dots, Z^m) \delta_i \delta_j$$

où les γ_{ij} sont de classe C^{r-2} , 1-plates sur le germe d'ensemble $Z^1 = \dots = Z^m = 0$.

On a donc :

$$f(x, \sum_{i=1}^m \delta_i Z^i) = f(x, 0) + M \cdot \sum_{i=1}^m \delta_i (Z^i + \sum_{j=1}^m N_j \gamma_{ij} (x, Z^1, \dots, Z^m))$$

Par le théorème des fonctions implicites ordinaire, on peut résoudre par rapport à $Z^1, \dots, Z^m$, le système :

$$Z^i + \sum_{j=1}^m N_j \gamma_{ij} (x, Z^1, \dots, Z^m) = y^i \quad i = 1, \dots, m$$

et donc, trouver des germes d'applications de classe $C^{r-2} : Y^1(x, y^1, \dots, y^m), \dots, Y^m(x, y^1, \dots, y^m)$ tels que :

$$f(x, \sum_{i=1}^m \delta_i Y^i) = f(x, 0) + M \cdot \sum_{i=1}^m \delta_i y^i$$

et $Y^1(x, 0, \dots, 0) = \dots = Y^r(x, 0, \dots, 0) = 0$.

Ainsi :
$$f(x, \sum_{i=1}^m \delta_i Y^i (x, -\beta^1, \dots, -\beta^m)) = 0$$

Visiblement, la solution $y(x) = \sum_{i=1}^m \delta_i Y^i (x, -\beta^1, \dots, -\beta^m)$ a ses composantes dans $\mathcal{J} \cdot \mathcal{E}_{r-2}$. Mais en outre :

$$y(x) = \sum_{i=1}^m \delta_i (Y^i(x, -\beta^1, \dots, -\beta^m) - Y^i(x, 0, \dots, 0))$$

a ses composantes contenues dans l'idéal engendré dans $\mathcal{E}_{r-3}$ par les δ_i et les composantes β_k^j des β^j . Ainsi, $y(x)$ a ses composantes dans $\mathcal{J} \cdot \mathcal{E}_{r-3}$.

Remarque 2.2 : Soit A un anneau commutatif et unitaire, et soit M une application A -linéaire de A^s dans A^p . Soient $\mathcal{J}$ l'annulateur de coker M ; $\mathcal{J}_0$ l'idéal engendré par les mineurs d'ordre p de la matrice M (si $s < p$, $\mathcal{J}_0 = 0$).

On a visiblement $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$ (règle de Cramer pour la résolution d'un système linéaire). Réciproquement, si $\delta \in \mathcal{J}$, on a $\delta \cdot I = M \cdot N$, où N est une matrice : $A^p \rightarrow A^s$ et I est la matrice unité $p \times p$. On a donc : $\delta^p = \det(\delta \cdot I) \in \mathcal{J}_0$. Ainsi : $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J} \subset \sqrt{\mathcal{J}_0}$. En particulier, on peut, dans le lemme, remplacer $\mathcal{J}$ par $\mathcal{J}_0$.

2.3. Soit $A_1, \dots, A_q$ une base sur $\mathbb{R}$ de l'algèbre de Lie du groupe Γ .
 Posons $A = (A_1, \dots, A_q)$; $y = (y_1, \dots, y_q)$; $\langle y, A \rangle = y_1 A_1 + \dots + y_q A_q$. Les
 éléments $g \in G_r$ sont les matrices $e^{\langle y(x), A \rangle}$ où $y(x) \in C_{0,0}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$, espace
 des germes en 0 d'applications de classe C^r de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$, nulles à l'origine ;
 les éléments $\tau \in \text{Dif}_r$ ($r \geq 1$) sont les germes d'applications :

$$\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto x + z(x) \in \mathbb{R}^n, \text{ où } z(x) \in C_{0,0}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \text{ et } \det |I + \frac{\partial z}{\partial x}(0)| \neq 0.$$

Avec ce choix de coordonnées, on voit que l'application $0_{\varphi,r} : \mathcal{G}_r^p(g, \tau) \longmapsto$
 $(g, \tau) \cdot \varphi \in X_r$ s'identifie à l'application :

$$(y(x), z(x)) \longmapsto e^{\langle y(x), A \rangle} \cdot \varphi(x + z(x)).$$

Soit $\varphi' \in X_r$ et posons :

$$f(x, y, z) = e^{\langle y, A \rangle} \cdot \varphi(x+z) - \varphi'(x).$$

Appliquons le lemme précédent à f (le point (y, z) de $\mathbb{R}^{q+n}$ remplaçant
 le point y de $\mathbb{R}^S$). Avec les notations de 2.1 :

$$M(y(x), z(x)) = \langle y(x), A \rangle \cdot \varphi(x) + \langle z(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \rangle$$

où l'on pose :

$$\langle z, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle = z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dots + z_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}.$$

En outre : $f(x, 0, 0) = \varphi(x) - \varphi'(x)$. Ainsi :

Proposition 2.4 : Soit $\varphi \in X_r$, $r \geq 3$. Soit M_φ l'application $\mathcal{E}_{r-1}$ -linéaire :

$$\mathcal{E}_{r-1}^{q+n} \ni (y(x), z(x)) \longmapsto \langle y(x), A \rangle \varphi(x) + \langle z(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \rangle \in \mathcal{E}_{r-1}^p \text{ et}$$

posons $\mathcal{I}_\varphi = \text{Ann}(\text{coker } M_\varphi)$.

Supposons $\mathcal{I}_\varphi \neq \mathcal{E}_{r-1}$ et soit $\varphi' \in X_r$ tel que $\varphi(x) - \varphi'(x) =$

$M_\varphi(y(x), z(x))$ où $y(x)$ et $z(x)$ ont leurs composantes dans $\mathcal{I}_\varphi \cdot \underline{m}_{r-2}$ (en parti-
 culier, ceci est vrai si $\varphi(x) - \varphi'(x)$ a ses composantes dans $\mathcal{I}_\varphi^2 \cdot \underline{m}_{r-2}$).

Alors φ' appartient à l'orbite de φ sous l'action du groupe $\mathcal{G}_{r-2}$.

Preuve : En effet, d'après 2.1, l'équation $f(x,y,z) = 0$ admet une solution $(y(x), z(x))$ ayant ses composantes dans $\mathcal{I}_\varphi \cdot \mathcal{E}_{r-2} \cap \mathcal{I}_\varphi \cdot \underline{m}_{r-2} \cdot \mathcal{E}_{r-3}$; puisque $\mathcal{I}_\varphi \subset \underline{m}_{r-1}$, $(y(x), z(x))$ est 1-plat à l'origine.

Remarques :

2.5.1. Nous avons éliminé dans la proposition précédente le cas trivial où M_φ est surjective, i.e. $\mathcal{I}_\varphi = \mathcal{E}_{r-1}$. Dans ce cas, l'orbite de φ sous l'action du groupe $\mathcal{G}_r$ ($r \geq 1$) contient tous les $\varphi' \in X_r$ tels que $\varphi - \varphi'$ soit 1-plat à l'origine (on applique le théorème des fonctions implicites ordinaire).

2.5.2. On peut, suivant une idée de J. Mather, obtenir la proposition 2.4 en intégrant un champ de vecteurs convenable : on construit une famille continue de transformations (g_t, τ_t) telles que $(g_0, \tau_0) = e$ et $\varphi + t(\varphi' - \varphi) = (g_t, \tau_t) \cdot \varphi$ pour tout $t \in [0,1]$ (cf. [3]).

2.5.3. Supposons $r = \infty$. La matrice M_φ s'interprète comme suit. L'application de $\bigoplus_{q+n} \underline{m}$ dans $\bigoplus_p \underline{m}$ induite par M_φ est en quelque sorte "l'application linéaire tangente" à $O_\varphi : \mathcal{G} \ni (g, \tau) \mapsto (g, \tau) \cdot \varphi \in X$ en l'élément neutre. De même, si $s < \infty$, l'application de $\bigoplus_{q+n} \underline{m}/\underline{m}^{s+1}$ dans $\bigoplus_p \underline{m}/\underline{m}^{s+1}$ déduite de M_φ , s'identifie à l'application linéaire tangente à $O_{j^s(\varphi)} : \hat{\mathcal{G}}_s \ni \gamma \mapsto \gamma \cdot j^s(\varphi) \in \hat{X}_s$.

Appliquons la proposition 2.4 au cas C^∞ . Soit $\mathcal{F}$ l'anneau des séries formelles $\mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$. On a une projection évidente : $\mathcal{E}^s \ni \psi \mapsto \hat{\psi} \in \mathcal{F}^s$ associant à tout germe ψ sa série de Taylor à l'origine. Si $M : \mathcal{E}^s \mapsto \mathcal{E}^p$ est une application $\mathcal{E}$ -linéaire, on note $\hat{M} : \mathcal{F}^s \mapsto \mathcal{F}^p$, l'application $\mathcal{F}$ -linéaire induite par M .

Corollaire 2.6 : Soit $\varphi \in X$ et soit k la dimension de Krull de $\mathcal{F}/\hat{\mathcal{I}}_\varphi$ (on suppose $\mathcal{I}_\varphi \neq \mathcal{E}$). Alors, il existe un système de coordonnées locales de classe C^∞ à l'origine de $\mathbb{R}^n : x' = (x'_1, \dots, x'_n)$, et un point φ' appartenant à l'orbite

de φ sous l'action du groupe G , tels que φ' soit polynomial en $x'_{k+1}, \dots, x'_n$ à coefficients germes indéfiniment dérivables des variables $x'_1, \dots, x'_k$.

Preuve : On a $\dim \widehat{\mathcal{F}}/\underline{m} \cdot \mathcal{I}_\varphi^2 = k$. D'après les théorèmes de normalisation et de préparation formels (cf. [2]), il existe des formes linéaires indépendantes $x''_1, \dots, x''_n$ telles que $\widehat{\mathcal{F}}/\underline{m} \cdot \mathcal{I}_\varphi^2$ soit un module de type fini sur $\mathcal{F}' = \mathbb{R}[[x''_1, \dots, x''_k]]$, engendré sur $\mathcal{F}'$ par un nombre fini de monômes en $x''_{k+1}, \dots, x''_n$. D'après le théorème de préparation différentiable (cf. [2]), $\mathcal{E}/\underline{m} \cdot \mathcal{I}_\varphi^2$ est engendré sur l'anneau $\mathcal{E}'$ des germes de fonctions C^∞ à valeurs réelles en les variables $x''_1, \dots, x''_k$, par les mêmes monômes. Il en résulte qu'il existe $\varphi' \in X$ tel que φ' soit polynomial en $x''_{k+1}, \dots, x''_n$ à coefficients dans $\mathcal{E}'$ et tel que $\varphi - \varphi'$ ait toutes ses composantes dans $\underline{m} \cdot \mathcal{I}_\varphi^2$. D'après 2.4, il existe $\tau \in \text{Dif}$ et $g \in G$ tels que $\varphi = (g \cdot \varphi') \circ \tau$. Il suffit alors de choisir le système de coordonnées locales $x' = \tau(x'')$.

Corollaire 2.7 : Soit $\varphi \in X$ tel que $\underline{m} \supset \mathcal{I}_\varphi \supset \underline{m}^s$ ($s < \infty$). Alors le jet $j^{2s}(\varphi)$ est $\mathcal{G}$ -suffisant dans X .

Preuve : Soit $\varphi' \in X$ tel que $j^{2s}(\varphi) = j^{2s}(\varphi')$. Le germe $\varphi - \varphi'$ a ses composantes dans $\underline{m}^{2s+1} \subset \underline{m} \cdot \mathcal{I}_\varphi^2$ et donc, d'après 2.4, φ' appartient à l'orbite de φ sous l'action du groupe $\mathcal{G}$.

Le théorème suivant caractérise les éléments de X , $\mathcal{G}$ -stables dans X :

Théorème 2.8 : Soit $\varphi \in X$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) φ est $\mathcal{G}$ -stable dans X .
- (2) $\dim_{\mathbb{R}} \text{coker } M_\varphi < \infty$.
- (3) $\dim_{\mathbb{R}} \text{coker } \widehat{M}_\varphi < \infty$.
- (4) $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}/\mathcal{I}_\varphi < \infty$, i.e. $\mathcal{I}_\varphi$ contient une puissance de $\underline{m}$.
- (5) $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{F}/\widehat{\mathcal{I}}_\varphi < \infty$, i.e. $\widehat{\mathcal{I}}_\varphi$ contient une puissance de $\underline{m}$.
- (6) Il existe un entier h tel que : $\dim_{\mathbb{R}} (\text{coker } \widehat{M}_\varphi / \underline{m}^{h+1} \cdot \text{coker } \widehat{M}_\varphi) \leq h$.
- (7) Il existe un entier h tel que : $\dim_{\mathbb{R}} (\mathcal{F} / \widehat{\mathcal{I}}_\varphi + \underline{m}^{h+1}) \leq h$.

Preuve : L'équivalence des conditions (2), (3), (4), (5) est évidente et laissée au lecteur. Visiblement, ces conditions impliquent (6) et (7). La réciproque est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 2.9 : Soit M un module de type fini sur un anneau local A d'idéal maximal $\underline{m}$. Supposons $\underline{m}$ de type fini. Si la longueur de $M/\underline{m}^{h+1}.M$ est $\leq h$, on a $\underline{m}^h.M = 0$ et donc $\text{long}(M) \leq h$.

Preuve : On a $\underline{m}^h.M = 0$, car sinon, on aurait des inclusions strictes : $M \supset \underline{m}.M \supset \dots \supset \underline{m}^h.M \supset \underline{m}^{h+1}.M$ (lemme de Nakayama) et donc $\text{long}(M/\underline{m}^{h+1}.M) \geq h+1$, ce qui contredirait l'hypothèse.

Achevons la preuve de 2.8. L'implication (4) $\implies$ (1) résulte de 2.7. Démontrons (1) $\implies$ (6). Par hypothèse, il existe un entier r tel que $j^r(\varphi)$ soit $\hat{G}$ -suffisant dans X . Si $s \geq r$, l'orbite de $j^s(\varphi)$ dans $\hat{X}_s$ sous l'action du groupe de Lie $\hat{G}_s$ contient donc tous les jets ω tels que $j^r(\omega) = j^r(\varphi)$, i.e. contient une sous-variété affine de $\hat{X}_s$ de codimension $\leq h' = \dim_{\mathbb{R}} \hat{X}_r$. D'après un résultat bien connu (cf. lemme 2.10), le conoyau de l'application linéaire tangente au point e à $\mathcal{O}_{j^s(\varphi)} : \hat{G}_s \ni \gamma \mapsto \gamma.j^s\varphi \in \hat{X}_s$ est de dimension $\leq h'$. D'après 2.5.3, ceci entraîne l'inégalité :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\text{coker } \hat{M}_{\varphi} / \hat{m}^{s+1} . \text{coker } \hat{M}_{\varphi}) \leq p+h' = h.$$

Faisant $s=h$ dans l'inégalité précédente, on obtient (6).

Nous avons utilisé le lemme suivant :

Lemme 2.10 : Soient G un groupe de Lie ; X une variété de classe C^1 . Soit : $G \times X \ni (g,x) \mapsto g.x \in X$ une application de classe C^1 telle que, $\forall g,g',x : g'.(g.x) = (g'.g).x$. Soit h le rang de l'application linéaire tangente en e à $\mathcal{O}_X : G \ni g \mapsto g.x \in X$. Alors, l'orbite $G.x$ du point x est une sous-variété de classe C^1 , de dimension h , de X (par sous-variété, nous entendons l'image d'une immersion injective).

Preuve : Par homogénéité, le rang de l'application linéaire tangente à O_x en tout point $g \in G$ est égal à h . Il suffit alors d'appliquer le théorème du rang constant.

Interprétons la matrice M_φ à l'aide de la notion de transversalité. Rappelons tout d'abord la définition suivante (les applications et variétés sont au moins de classe C^1 ; on note $T_x(X)$ l'espace tangent au point x à une variété X) :

Définition 2.1.1 : Une application φ d'une variété X dans une variété Y est transverse en un point $x \in X$ sur une sous-variété Z de Y si : $\varphi(x) \notin Z$ ou $\varphi(x) \in Z$ et $\varphi_* (T_x(X)) + T_{\varphi(x)}(Z) = T_{\varphi(x)}(Y)$ (φ_* est l'application linéaire tangente à φ). Si φ est transverse sur Z en tout point $x \in X$, nous dirons simplement que φ est transverse sur Z .

Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ un représentant du germe $\varphi^{(1)}$. L'espace tangent en $\varphi(x)$ à l'orbite de $\varphi(x)$ sous l'action du groupe Γ est engendré par $A_1 \cdot \varphi(x), \dots, A_q \cdot \varphi(x)$; de même, $\varphi_*(T_x(\mathbb{R}^n))$ est engendré par $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x)$. Donc, si M_φ est la matrice dont les vecteurs colonnes sont $A_1 \cdot \varphi, \dots, A_q \cdot \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$ (ainsi M_φ induit M_φ à l'origine) :

2.12. La matrice $M_\varphi(x)$ est de rang p si et seulement si φ est transverse en x à l'orbite $\Gamma \cdot \varphi(x)$ de $\varphi(x)$.

Supposons φ analytique et soit $\tilde{\varphi} \in C_{o,o}^\omega(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$ le complexifié de φ . De même, soit $\tilde{\Gamma}$ le sous-groupe de Lie de $Gl(p, \mathbb{C})$ complexifié de Γ (si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de Γ , celle de $\tilde{\Gamma}$ est $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$). On déduit facilement de 2.8, le :

Corollaire 2.13 : Si φ est analytique, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Il existe W voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}^n$ tel que $\tilde{\varphi}|_{W \setminus \{0\}}$ soit transverse sur les orbites de tous les points de $\mathbb{C}^p$ sous l'action du groupe $\tilde{\Gamma}$.
- (2) φ est G -stable dans X .

Preuve : Soit $\mathcal{I}_\varphi$ l'idéal engendré dans $\mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\}$ par les mineurs d'ordre p de la matrice M_φ . La condition (1) signifie (d'après 2.12, en remplaçant φ par $\tilde{\varphi}$ et Γ par $\tilde{\Gamma}$) que l'idéal $\tilde{\mathcal{I}}_\varphi = \mathcal{I}_\varphi \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ admet $\{0\}$ ou $\emptyset$ comme germe de zéros. D'après le Nullstellensatz, cela signifie que $\mathcal{I}_\varphi$ contient une puissance de l'idéal maximal de $\mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\}$, donc que son complété $\hat{\mathcal{I}}_\varphi = \hat{\tilde{\mathcal{I}}}_\varphi$ contient une puissance de $\hat{\mathfrak{m}}$.

3. $\mathcal{G}$ -Stabilité dans X : situation générique.

3.1. Soit $y = (y_1, \dots, y_p)$; $y^1 = (y_1^1, \dots, y_p^1)$; ... ; $y^n = (y_1^n, \dots, y_p^n)$ un système de coordonnées de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^{p+np}$. Soient $\tilde{P}$ la projection : $\mathbb{C}^{p+np} \ni (y, y^1, \dots, y^n) \mapsto y \in \mathbb{C}^p$; P la projection de $\mathbb{R}^{p+np}$ sur $\mathbb{R}^p$ induite par $\tilde{P}$. Si $\varphi \in X$, φ analytique, on note ${}^1\tilde{\varphi}$ le germe d'application holomorphe de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^{p+np}$: $x \mapsto (\tilde{\varphi}(x), \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_n}(x))$; de même, si $\varphi \in X$, on note ${}^1\varphi$ le germe d'application C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{p+np}$: $x \mapsto (\varphi(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x))$ (donc : $\tilde{P} \circ {}^1\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}$; $P \circ {}^1\varphi = \varphi$).

Soit $\tilde{\Sigma}_i$ (resp. Σ_i) la sous-variété algébrique fermée de $\mathbb{C}^p$ (resp. $\mathbb{R}^p$) formée des points y tels que le rang de la matrice $(A_1.y, \dots, A_q.y)$ soit $\leq p-i$. Evidemment, $\tilde{\Sigma}_0 \supset \tilde{\Sigma}_1 \supset \dots \supset \tilde{\Sigma}_p \supset \tilde{\Sigma}_{p+1} = \emptyset$; $\Sigma_0 \supset \Sigma_1 \supset \dots \supset \Sigma_p \supset \Sigma_{p+1} = \emptyset$. Chaque ensemble $\tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}$ (resp. $\Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}$) est la réunion des orbites $\tilde{\Gamma}.y$ (resp. $\Gamma.y$) de codimension i dans $\mathbb{C}^p$ (resp. $\mathbb{R}^p$), d'après 2.10.

Soit $\tilde{\mathcal{J}}$ (resp. $\mathcal{J}$) l'idéal engendré dans $\mathbb{C}[y ; y^1, \dots, y^n]$ (resp. $\mathbb{R}[y ; y^1, \dots, y^n]$) par les mineurs d'ordre p de la matrice $M = (A_1.y, \dots, A_q.y ; y^1, \dots, y^n)$. Soit $\tilde{\Sigma}$ (resp. Σ) la sous-variété algébrique fermée de $\mathbb{C}^{p+np}$ (resp. $\mathbb{R}^{p+np}$) formée des zéros de $\tilde{\mathcal{J}}$ (resp. $\mathcal{J}$). Visiblement, $\mathcal{J}_\varphi$ est l'idéal $({}^1\varphi)^*(\mathcal{J})$ engendré dans $\mathcal{E}$ par tous les $P \circ {}^1\varphi$, où $P \in \mathcal{J}$.

(1) Plus généralement, à tout germe d'application φ , on associera un représentant noté $\underline{\varphi}$ et choisi une fois pour toutes.

3.2. Pour tout $r < \infty$, soit $\hat{Y}_r$ une sous-variété algébrique réelle (resp. un sous-ensemble semi-algébrique) de $\hat{X}_r$, telle que pour tout $s \geq r$: $\pi_{r,s}(\hat{Y}_s) \subset \hat{Y}_r$ (on note $\pi_{r,s} : \hat{X}_s \rightarrow \hat{X}_r$; $\pi_r : \hat{X} \rightarrow \hat{X}_r$ les projections canoniques). Soit $\hat{Y} = \bigcap_{r \in \mathbb{N}} \pi_r^{-1}(\hat{Y}_r)$ la limite projective des $\hat{Y}_r$: nous dirons que $\hat{Y}$ est une sous-variété algébrique (resp. un sous-ensemble semi-algébrique) de $\hat{X}$ et nous poserons : $\text{codim}(\hat{Y}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \text{codim}(\hat{Y}_r)$. Visiblement, la codimension de la variété algébrique Y est infinie si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

$$(3.2.1) \quad \forall r \in \mathbb{N} \text{ et } \forall \omega_r \in \hat{X}_r, \text{ il existe } \omega \in \pi_r^{-1}(\omega_r) \cap (\hat{X} \setminus \hat{Y}).$$

Lemme 3.3 : Soit $\mathcal{J}$ un idéal de $\mathbb{R}[y; y^1, \dots, y^n]$. L'ensemble $Y = \{\varphi \in X \mid (\varphi)^*(\mathcal{J}) \text{ ne contient pas une puissance de } \underline{m}\}$ est l'image réciproque par la projection $j : X \rightarrow \hat{X}$ d'une sous-variété algébrique $\hat{Y}$ de $\hat{X}$.

En outre, $\text{codim}(\hat{Y}) = \infty$ si et seulement si $\text{ht}(\mathcal{J}) \geq n$.

Preuve : Soit $\hat{Y}_{h+1}$ l'ensemble des $\omega \in \hat{X}_{h+1}$ tels que

$$\dim_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{F}} / (\widehat{(\varphi)^*(\mathcal{J})} + \underline{m}^{h+1}) > h$$

Visiblement, $\forall \varphi \in (j^{h+1})^{-1}(\omega)$, on a :

$$\widehat{(\varphi)^*(\mathcal{J})} + \underline{m}^{h+1} = \widehat{(\varphi)^*(\mathcal{J})} + \underline{m}^{h+1}.$$

Il résulte de là et de 2.9 que : $Y = j^{-1}(\hat{Y})$ où $\hat{Y} = \lim_{\leftarrow} \hat{Y}_{h+1}$.

Un jet $\omega \in \hat{Y}_{h+1}$ si et seulement si :

$$\dim_{\mathbb{R}} (\widehat{(\varphi)^*(\mathcal{J})} + \underline{m}^{h+1}) / \underline{m}^{h+1} < h' = \dim_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{F}} / \underline{m}^{h+1} - h$$

i.e. si et seulement si le rang d'un système linéaire à coefficients polynômes en ω est $< h'$. Ceci entraîne que $\hat{Y}_{h+1}$ est algébrique.

Vérifions enfin la dernière assertion du lemme. Soient Ω l'ensemble des zéros de $\mathcal{J}$ dans $\mathbb{R}^{p+np}$; $\tilde{\Omega}$ l'ensemble des zéros de $\hat{\mathcal{J}} = \mathcal{J} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^{p+np}$.

Supposons que $\text{ht}(\mathcal{F}) < n$; cela signifie qu'il existe un point $\xi \in \mathbb{R}^{p+np}$ tel que $\text{codim}_{\tilde{\Omega}}(\tilde{\Omega}) < n$. Considérons l'ensemble des $\varphi \in X$ tels que φ soit algébrique et ${}^1\tilde{\varphi}(0) = \xi$: les $\hat{\varphi}$ forment un ensemble dense dans un ouvert de $\hat{X}$. Or, pour un tel φ :

$$\text{codim}_0({}^1\tilde{\varphi})^{-1}(\tilde{\Omega}) \leq \text{codim}_{\tilde{\Omega}}(\tilde{\Omega}) < n \text{ (cf. corollaire 3.5)}$$

i.e. $\text{ht}(\widehat{{}^1\varphi}^*(\mathcal{F})) > n$, i.e. $\hat{\varphi} \in \hat{Y}$. Il en résulte que la codimension de $\hat{Y}$ dans $\hat{X}$ est finie.

Supposons enfin que $\text{ht}(\mathcal{F}) \geq n$, i.e. $\text{codim}(\tilde{\Omega}) \geq n$. Démontrons que la codimension de $\hat{Y}$ dans $\hat{X}$ est infinie. Soit $\omega \in \hat{X}_r$; il suffit, d'après (3.2.1), de trouver un $\varphi \in X \setminus Y$ tel que $j^r(\varphi) = \omega$. Nous chercherons un φ polynomial de la forme :

$$\omega + \sum_{|\mu|=r+1, r+2} \alpha_{\mu} x^{\mu}, \quad \alpha_{\mu} = (\alpha_{\mu,1}, \dots, \alpha_{\mu,p}) \in \mathbb{R}^p.$$

Soit A l'espace vectoriel complexe admettant les $a_{\mu} = (a_{\mu,1}, \dots, a_{\mu,p})$, $|\mu| = r+1, r+2$, comme système de coordonnées. Si $a = (a_{\mu}) \in A$, posons $\tilde{\varphi}_a = \omega + \sum a_{\mu} x^{\mu}$, et soit ϕ l'application polynomiale :

$$A \times \mathbb{C}^n \ni (a, x) \longmapsto {}^1\tilde{\varphi}_a(x) = (\tilde{\varphi}_a(x), \frac{\partial \tilde{\varphi}_a}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \tilde{\varphi}_a}{\partial x_n}(x)) \in \mathbb{C}^{p+np}.$$

Nous devons trouver α réel tel que le germe $({}^1\tilde{\varphi}_{\alpha})^{-1}(\tilde{\Omega})$ soit $\{0\}$ ou $\emptyset$.

On peut évidemment supposer $r \geq 1$. Le point $\xi = {}^1\tilde{\varphi}_a(0) = \phi(a, 0)$ est alors indépendant de a et réel. Si $\xi \notin \tilde{\Omega}$, tout α réel est solution (le germe $({}^1\tilde{\varphi}_{\alpha})^{-1}(\tilde{\Omega})$ est alors égal à $\emptyset$).

Supposons donc que $\xi \in \tilde{\Omega}$. On vérifie facilement (cf. [6], chap. I, lemme 3) que l'application $\phi \mid A \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$ est une submersion. Ainsi $\phi^{-1}(\tilde{\Omega})$ est de codimension $\geq n$ en tout point de $A \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$. Puisque $A \times \{0\}$ est de codimension n , $\phi^{-1}(\tilde{\Omega})$ est une variété algébrique de codimension n , contenant $A \times \{0\}$. Soient $V_1, \dots, V_s$ les composantes irréductibles de $\phi^{-1}(\tilde{\Omega})$, autres que $A \times \{0\}$. On a : $\text{codim}(V_1 \cup \dots \cup V_s \cap (A \times \{0\})) > n$, et donc il existe $(\alpha, 0)$ réel dans $(A \times \{0\}) \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_s)$. Au voisinage de $(\alpha, 0)$: $\phi^{-1}(\tilde{\Omega}) = A \times \{0\}$; visiblement, α est solution.

3.4. Dans la démonstration précédente, nous avons utilisé, sous la forme du corollaire énoncé plus bas, un résultat classique de la théorie des intersections (cf. [5]) :

Si V, V' sont deux germes de variétés algébriques à l'origine de $\mathbb{C}^n$, on a l'inégalité :

$$\underline{\text{codim}_0(V \cap V')} \leq \text{codim}_0(V) + \text{codim}_0(V').$$

Si l'on a l'égalité, on dit que les germes de variétés se coupent transversalement à l'origine. Par exemple, si $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{p+q}$, si $P : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ et $P' : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^q$ sont les projections et W (resp. W') est un germe de variété algébrique à l'origine de $\mathbb{C}^p$ (resp. $\mathbb{C}^q$), on voit facilement que $P^{-1}(W)$ et $P'^{-1}(W')$ se coupent transversalement. On déduit de l'inégalité précédente, le :

Corollaire 3.5 : Soit f une application polynomiale de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^p$ telle que $f(0) = 0$ et soit V un germe de variété algébrique à l'origine de $\mathbb{C}^p$. Alors : $\text{codim}_0(f^{-1}(V)) \leq \text{codim}_0(V)$.

Preuve : Posons $f = \pi \circ i$ où $i : \mathbb{C}^n \ni x \longmapsto (x, f(x)) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ et $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \ni (x, y) \longmapsto y \in \mathbb{C}^p$. On a :

$$\text{codim}_0(\pi^{-1}(V)) = \text{codim}_0(V) \text{ et d'après 3.4 :}$$

$$p + \text{codim}_0(f^{-1}(V)) = \text{codim}_0(i(\mathbb{C}^n) \cap \pi^{-1}(V)) \leq p + \text{codim}_0(V),$$

d'où l'inégalité cherchée.

Le théorème suivant caractérise les groupes Γ pour lesquels la $\mathcal{G}$ -stabilité dans X est générique.

Théorème 3.6 : L'ensemble $Y = \{ \varphi \in X \mid \varphi \text{ n'est pas } \mathcal{G}\text{-stable dans } X \}$ est l'image réciproque par la projection $j : X \longrightarrow \hat{X}$ d'une sous-variété algébrique $\hat{Y}$ de $\hat{X}$.

En outre, la $\mathcal{G}$ -stabilité dans X est générique (i.e. $\text{codim}(\hat{Y}) = \infty$) si et seulement si l'une des deux conditions suivantes (équivalentes) est satisfaite :

(1) $\text{codim } (\tilde{\Sigma}) \geq n$, i.e. $\text{ht } (\mathfrak{J}) \geq n$.

(2) Pour tout $i = 0, 1, \dots, p$: $\text{codim } (\tilde{\Sigma}_i) \geq \inf (i-1, n)$.

Preuve : Un germe $\varphi \in X$ n'est pas $\mathcal{G}$ -stable dans X si et seulement si l'idéal $\mathfrak{J}_\varphi = (\varphi^1)^* (\mathfrak{J})$ ne contient pas une puissance de $\underline{m}$. D'après (3.3), il suffit de montrer l'équivalence des conditions (1) et (2).

Fixons i et soit $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_p)$ appartenant à $\tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}$. Soient $\xi \in \tilde{P}^{-1}(\eta)$; $\mathcal{G}_\xi$ le localisé au point ξ de l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[y; y^1, \dots, y^n]$. Par hypothèse, le rang de la matrice $(A_1 \cdot \eta, \dots, A_q \cdot \eta)$ est égal à $p-i$. Supposons, par exemple, que le mineur δ de cette matrice formé par l'intersection des $p-i$ premières lignes avec les $p-i$ premières colonnes, est $\neq 0$.

Soit m_{jk} le mineur d'ordre $p-i+1$ de M obtenu en prenant l'intersection des $p-i$ premières lignes et de la $(j+p-i)^{\text{ème}}$ avec les $p-i$ premières colonnes et la $(k+p-i)^{\text{ème}}$. Soit M' la matrice des m_{jk} et soit I la matrice unité $(p-i) \times (p-i)$. On vérifie facilement (cf. [6], chap. II, lemme 4) l'existence de matrices inversibles P et Q à coefficients dans $\mathcal{G}_\xi$, telles que : $P M Q = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M' \end{bmatrix}$

Ecrivons M' sous la forme $\begin{bmatrix} M'' & M''' \end{bmatrix}$ où M''' est une matrice $i \times n$. Faisons les remarques suivantes :

(i) $\tilde{\Sigma}$ est l'ensemble des points de $\mathbb{C}^{p+np}$ en lesquels le rang de M est $< p$; donc $\tilde{\Sigma}_\xi$ est le germe en ξ de l'ensemble des points de $\mathbb{C}^{p+np}$ en lesquels le rang de $M' = \begin{bmatrix} M'' & M''' \end{bmatrix}$ est $< i$.

(ii) La suite obtenue en prenant (dans un certain ordre) les éléments de la matrice M''' et $y_1 - \eta_1, \dots, y_p - \eta_p$ peut être complétée de manière à obtenir un système de coordonnées locales en ξ de l'espace $\mathbb{C}^{p+np}$ (remarquer que le jacobien en ξ de cette suite par rapport aux y_j^k ($1 \leq k \leq n$; $p-i+1 \leq j \leq p$) et $y_1, \dots, y_p$ est égal à δ^{ni} , au signe près).

(iii) Soit $\tilde{\Omega}$ la variété algébrique des points de $\mathbb{C}^{p+np}$ en lesquels le rang de M''' (matrice $i \times n$) est $< i$. On a : $\text{codim}_{\xi}(\tilde{\Omega}) \geq \sup \{0, n-i+1\}$; en outre, la matrice M''' s'annule au point $\xi^0 = (\eta ; 0, \dots, 0)$ et donc : $\text{codim}_{\xi^0}(\tilde{\Omega}) = \sup \{0, n-i+1\}$ (on a les inégalités précédentes d'après (ii) et le fait que l'ensemble des points de $\mathbb{C}^{in}$ en lesquels le rang de la matrice générique $i \times n$ est $< i$ est une variété algébrique irréductible de codimension égale à $\sup \{0, n-i+1\}$; cf. [6], chap. II, lemme 3). En outre, d'après (ii), les germes de variétés algébriques $\tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_i)_{\xi}$ et $\tilde{\Omega}_{\xi}$ se coupent transversalement (cf. 3.4) ; donc :

$$(3.6.3) \quad \text{codim}_{\xi}(\tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_i) \cap \tilde{\Omega}) = \text{codim}_{\xi}(\tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_i)) + \text{codim}_{\xi}(\tilde{\Omega}) \\ \geq \text{codim}_{\eta}(\tilde{\Sigma}_i) + \sup \{0, n-i+1\}.$$

$$(3.6.4) \quad \text{codim}_{\xi^0}(\tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_i) \cap \tilde{\Omega}) = \text{codim}_{\eta}(\tilde{\Sigma}_i) + \sup \{0, n-i+1\}.$$

Par construction, M'' s'annule sur le germe de variété algébrique $\tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_i)_{\xi}$. D'après (i) et la définition de $\tilde{\Omega}_{\xi}$, on a les inclusions :

$$(3.6.5) \quad \tilde{\Omega}_{\xi} \supset \tilde{\Sigma}_{\xi} \supset (\tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_i) \cap \tilde{\Omega})_{\xi}.$$

L'équivalence des conditions (1) et (2) résulte facilement de (3.6.3), (3.6.4) et (3.6.5) :

On a (1) $\implies$ (2). En effet, d'après (3.6.4), (3.6.5) et l'hypothèse :

$$\text{codim}_{\eta}(\tilde{\Sigma}_i) + \sup \{0, n-i+1\} \geq \text{codim}_{\xi^0}(\tilde{\Sigma}) \geq n$$

$$\text{d'où } \text{codim}_{\eta}(\tilde{\Sigma}_i) \geq \inf \{i-1, n\}, \text{ pour tout } \eta \in \tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1},$$

i.e. $\text{codim}(\tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}) \geq \inf \{i-1, n\}$ pour tout $i=0, 1, \dots, p$. Visiblement, ces inégalités entraînent (2).

On a (2) $\implies$ (1). Démontrons par récurrence sur i que pour tout $\xi \in \tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1})$, on a $\text{codim}_{\xi}(\tilde{\Sigma}) \geq n$. Pour $i=0$, le résultat est trivial (car $\tilde{\Sigma} \cap \tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_0 \setminus \tilde{\Sigma}_1) = \emptyset$). Supposons donc $i > 0$ et soit $\eta = \tilde{P}(\xi)$. D'après (3.6.3) et l'hypothèse :

$$\text{codim}_{\xi}(\tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_i) \cap \tilde{\Omega}) \geq n.$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{p+n} \setminus (P^{-1}(\tilde{\Sigma}_i) \cap \tilde{\Omega})$ assez voisin de ξ :

$$\text{codim}_{\xi'}(\tilde{\Sigma}) \geq n.$$

Or, ou $\xi' \notin P^{-1}(\tilde{\Sigma}_i)$, i.e. $\xi' \in P^{-1}(\tilde{\Sigma}_j)$, $j < i$, et dans ce cas, on applique l'hypothèse de récurrence ; ou $\xi' \in \tilde{\Omega}$, et dans ce cas, d'après (3.6.5), $\xi' \in \tilde{\Sigma}$. Ceci achève la preuve de 3.6.

3.7. La condition (3.6.2) s'interprète aisément. Elle signifie en effet que l'on a des inégalités :

$$\text{codim}(\tilde{\Sigma}_i) \geq i-1, \quad 0 \leq i \leq \inf(p, n+1).$$

Chaque $\tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}$ étant la réunion des orbites $\tilde{\Gamma}.y$ de codimension i , les inégalités précédentes signifient donc que les grosses orbites, i.e. celles de codimension $\leq \inf(p, n+1)$, forment une famille à 1 paramètre au plus.

Supposons désormais que la condition (3.6.2) est satisfaite. On peut décomposer $\tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}$ ($0 \leq i \leq \inf(p, n+1)$) en une réunion disjointe : $\tilde{\Sigma}_{i,0} \cup \tilde{\Sigma}_{i,1}$, où $\tilde{\Sigma}_{i,0}$ est une variété algébrique régulière de codimension $i-1$ (éventuellement vide) et $\tilde{\Sigma}_{i,1}$ est une variété algébrique régulière de codimension i (éventuellement vide), réunion d'un nombre fini d'orbites $\tilde{\Gamma}.y$.

Soit η un point fixé de $\mathbb{R}^p$ et supposons que l'on peut choisir la décomposition précédente de telle sorte que la condition suivante soit satisfaite :

(H) Le point η n'appartient à l'adhérence d'aucune des orbites $\tilde{\Gamma}.y$ contenues dans les $\tilde{\Sigma}_{i,0}$, $0 \leq i \leq \inf(p, n+1)$.

(La condition (H) est visiblement satisfaite si les orbites $\tilde{\Gamma}.y$ sont toutes fermées, en particulier si le groupe $\tilde{\Gamma}$ est compact ; ou encore, s'il existe un nombre fini d'orbites $\tilde{\Gamma}.y$).

On peut alors remplacer la condition (1) du corollaire 2.13 par un nombre fini de conditions de transversalité. De façon précise :

Proposition 3.8 : Supposons la condition (H) satisfaite. Si φ est analytique telle que $\varphi(o) = \eta$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Il existe W voisinage de o dans $\mathbb{A}^n$ tel que $\tilde{\varphi}|_{W \setminus \{o\}}$ soit transverse sur toutes les variétés $\tilde{\Sigma}_{i,0}$ et $\tilde{\Sigma}_{i,1}$, $0 \leq i \leq r = \inf(p, n+1)$, et tel que $W \cap \tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{\Sigma}_{r+1}) = \{o\}$ ou $\emptyset$.

(2) φ est $\mathcal{G}$ -stable dans X .

Preuve : Démontrons l'équivalence de (2.13.1) et (3.8.1).

(2.13.1) $\implies$ (3.8.1) Les $\tilde{\Sigma}_{i,j}$ étant des réunions d'orbites, la transversalité de $\tilde{\varphi}|_{W \setminus \{o\}}$ sur toutes les orbites, implique la transversalité de $\tilde{\varphi}|_{W \setminus \{o\}}$ sur chaque $\tilde{\Sigma}_{i,j}$. En outre, $\tilde{\Sigma}_{r+1}$ est soit vide (si $r=p$), soit de codimension $\leq n$ (si $r=n+1$) ; donc $\tilde{\Sigma}_{r+1}$ est une réunion finie de variétés, régulières de codimensions $\leq n$ et réunions d'orbites. Il en résulte que $\tilde{\varphi}|_{W \setminus \{o\}}$ est transverse sur ces variétés et donc que $W \cap \tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{\Sigma}_{r+1}) = \{o\}$ ou $\emptyset$ (en diminuant W si nécessaire).

(3.8.1) $\implies$ (2.13.1) Il suffit de montrer que la transversalité de $\tilde{\varphi}|_{W \setminus \{o\}}$ sur $\tilde{\Sigma}_{i,0}$ implique la transversalité de $\tilde{\varphi}|_{W \setminus \{o\}}$ (on diminue W si nécessaire) sur toutes les orbites contenues dans $\tilde{\Sigma}_{i,0}$. Supposons que cela doit être faux pour un indice i fixé.

Posons $\Omega = \{x \in \tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{\Sigma}_{i,0}) \cap W \mid \tilde{\varphi}|_{\Gamma \cdot \tilde{\varphi}^{-1}(x)}$ n'est pas transverse en x à l'orbite $\Gamma \cdot \tilde{\varphi}^{-1}(x)\}$: Ω est un sous-ensemble analytique de W , contenu dans $W \setminus \{o\}$, et par hypothèse, cet ensemble adhère au point o . Il existe donc une courbe analytique : $[0, \epsilon[\ni t \longmapsto x(t)$ telle que $x(0) = o$ et $x([0, \epsilon[) \subset \Omega$.

Posons $y(t) = \tilde{\varphi} \circ x(t)$. Pour $t > 0$, le vecteur $\frac{dy}{dt}$ est tangent à l'orbite $\Gamma \cdot y(t)$, car sinon $T_{y(t)}(\tilde{\Sigma}_{i,0})$ serait engendré par $\frac{dy}{dt}$ et $T_{y(t)}(\Gamma \cdot y(t))$, ce qui joint à la transversalité de $\tilde{\varphi}$ sur $\tilde{\Sigma}_{i,0}$, entraînerait la transversalité de $\tilde{\varphi}$ sur $\Gamma \cdot y(t)$ au point $x(t)$, i.e. $x(t) \notin \Omega$. La courbe $y([0, \epsilon[)$ est donc contenue dans une orbite, et ceci contredit l'hypothèse (H) (car $y(0) = \eta$).

4. $\mathcal{G}_r$ -stabilité dans X ($r < \infty$).

Définition 4.1 : Soit ψ le germe à l'origine d'une application ψ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Nous dirons que ψ est elliptique s'il existe un voisinage W de l'origine de $\mathbb{R}^n$, et des constantes $C > 0$ et $\alpha \geq 0$ telles que, $\forall x \in W$:

$$|\psi(x)| \geq C |x|^\alpha$$

Un idéal I de $\mathcal{E}$ engendré par $\psi_1, \dots, \psi_k$ est elliptique si $\sum_{i=1}^k |\psi_i|$ (ou $\sum_{i=1}^k \psi_i^2$) est elliptique.

Soit $\underline{m}^\infty = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \underline{m}^i$ l'idéal de $\mathcal{E}$ formé des germes plats à l'origine.

Enfin, soit γ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, comprise entre 0 et 1, égale à 1 si $|x| \leq 1/4$ et à 0 si $|x| \geq 1/2$.

Lemme 4.2 : Soit I un idéal de $\mathcal{E}$ engendré par $\psi_1, \dots, \psi_k$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) I est elliptique.
- (2) $\underline{m}^\infty \subset I$, i.e. l'application canonique $\mathcal{E}/I \longrightarrow \hat{\mathcal{F}}/\hat{I}$ est un isomorphisme.
- (3) Pour tout $r \in \mathbb{N}$, $I \cdot \mathcal{E}_r$ contient une puissance de $\underline{m}_r$.

Preuve : (1) $\implies$ (2) et (3). Posons $\psi = \sum_{i=1}^k \psi_i^2$ et démontrons par exemple que (1) entraîne (3). Par hypothèse, il existe $C > 0$, $\alpha \geq 0$ et un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tels que, $\forall x \in W$: $|\psi(x)| \geq C|x|^\alpha$. Si $f \in \underline{m}_r^\mu$, on a (d'après la formule de Leibniz), pour tout ω , $|\omega| \leq r$, et tout $x \in W \setminus \{0\}$:

$$|D^\omega (f / \psi)(x)| \leq \frac{C' |x|^{\mu-|\omega|}}{|\psi(x)|^{|\omega|+1}}$$

(C' est une constante indépendante de x et ω). Donc, si $\mu > r + \alpha(r+1)$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in W \setminus \{0\}}} D^\omega (f / \psi)(x) = 0$

et f / ψ se prolonge en une fonction r fois continument dérivable sur W , r -plate à l'origine. Donc $f \in I \cdot \mathcal{E}_r$. La preuve de (1) $\implies$ (2) est analogue.

(2) ou (3) $\implies$ (1). Supposons que l'idéal I n'est pas elliptique. Il existe une suite x^j de points de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ telle que $\lim_{j \rightarrow \infty} x^j = 0$ et $\sum_{i=1}^k |\psi_i(x^j)| \leq |x^j|^{j+1}$. On peut supposer que les boules euclidiennes $B(x^j, \frac{|x^j|}{2})$ sont disjointes deux à deux. La série $\sum_{j=0}^{\infty} |x^j|^j \cdot \gamma \left(\frac{x-x^j}{|x^j|} \right)$ converge uniformément vers une fonction f , de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, plate à l'origine et telle que pour tout j :

$$f(x^j) = |x^j|^j \geq |x^j|^{-1} \cdot \sum_{i=1}^k |\psi_i(x^j)|$$

Ainsi, le germe f induit par f à l'origine appartient à $\underline{m}^\infty$, mais n'appartient pas à $\mathcal{I} \cdot \underline{\mathcal{E}}_0$, ce qui contredit (2) et (3).

Lemme 4.3 : Soient $\psi \in C_{0,0}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$; $\mathcal{I}$ un idéal de polynômes sur $\mathbb{R}^s$ engendré par $P_1, \dots, P_k$; $V(\mathcal{I})$ la variété des zéros de $\mathcal{I}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\psi^*(\mathcal{I})$ n'est pas elliptique.

(2) Il existe une suite $x^j \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x^j \longrightarrow 0$, telle que pour tout j :

$$d(\psi(x^j), V(\mathcal{I})) \leq |x^j|^j$$

En conséquence, si $\mathcal{I}'$ est un second idéal de polynômes tel que $V(\mathcal{I}) = V(\mathcal{I}')$, l'idéal $\psi^*(\mathcal{I})$ est elliptique si et seulement si $\psi^*(\mathcal{I}')$ est elliptique.

Preuve : Visiblement, (2) entraîne (1). Réciproquement, si (2) n'est pas satisfaite, il existe $\alpha > 0$ et W voisinage compact de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tels que $d(\psi(x), V(\mathcal{I})) \geq |x|^\alpha$ pour tout $x \in W$. En outre, il existe $C > 0$ et $\beta \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^k |P_i \circ \psi(x)| \geq C \cdot d(\psi(x), V(\mathcal{I}))^\beta$ pour tout $x \in W$ (cf. [2], chap. VI). Ainsi, $\psi^*(\mathcal{I})$ est elliptique.

Lemme 4.4 : Soit $\varphi \in X$ tel que $\mathcal{I}_\varphi$ soit elliptique. Alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$, φ est $\mathcal{G}_r$ -stable dans X .

Preuve : Supposons $\mathcal{I}_\varphi \neq \mathcal{E}$ (si $\mathcal{I}_\varphi = \mathcal{E}$, on sait que φ est $\mathcal{G}$ -stable dans X) et $r \geq 1$.

Par hypothèse, il existe une application $\mathbb{N} \ni r \mapsto s(r) \in \mathbb{N}$ telle que $\underline{m}_r \cdot \mathcal{I}_\varphi^2 \supset \underline{m}^{s(r)+1}$. Soit $\varphi' \in X$ tel que $j^{s(r)}(\varphi) = j^{s(r)}(\varphi')$. Le germe $\varphi - \varphi'$ a ses composantes dans $\underline{m}^{s(r)+1} \subset \underline{m}_r \cdot \mathcal{I}_\varphi^2$; d'après 2.4, φ' appartient à l'orbite $\mathcal{G}_r \cdot \varphi$. Ainsi, le jet $j^{s(r)}(\varphi)$ est $\mathcal{G}_r$ -suffisant dans X .

Lemme 4.5 : *Le sous-ensemble $Z = \{\varphi \in X \mid \mathcal{I}_\varphi \text{ n'est pas elliptique}\}$ est l'image réciproque par la projection $j : X \rightarrow \hat{X}$ d'un sous-ensemble semi-algébrique $\hat{Z}$ de $\hat{X}$.*

En outre, la codimension de $\hat{Z}$ est infinie si la condition suivante est satisfaite :

(4.5.1) Pour tout $i = 0, 1, \dots, p$: $\text{codim}(\Sigma_i) \geq \inf(i-1, n)$

Preuve : Soient $\delta_{1,\varphi}, \dots, \delta_{k,\varphi}$ les mineurs d'ordre p de la matrice M_φ . Posons $\hat{Z}_{h+1} = \{\omega \in \hat{X}_{h+1} \mid \forall \varepsilon > 0, \forall C > 0, \exists x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq \varepsilon \text{ tel que } \sum_{i=1}^k |\delta_{i,\omega(x)}| < C|x|^h\}$. Les applications $(\omega, x) \mapsto \delta_{i,\omega(x)}$ étant polynomiales, $\hat{Z}_{h+1}$ est semi-algébrique (d'après le théorème de Seidenberg-Tarski : la projection d'un ensemble semi-algébrique est semi-algébrique ; cf. [4]).

Soit $\varphi \in X$ tel que $j^{h+1}(\varphi) = \omega$; pour tout i , $\delta_{i,\omega} - \delta_{i,\varphi}$ est h -plate à l'origine. Il en résulte que pour tout $\varphi \in (j^{h+1})^{-1}(\hat{Z}_{h+1})$, l'idéal $\mathcal{I}_\varphi$ est elliptique. Ainsi, $Z = j^{-1}(\hat{Z})$, où $\hat{Z} = \varprojlim \hat{Z}_{h+1}$.

La condition (4.5.1) équivaut à la suivante :

(4.5.2) On a $\text{codim}(\Sigma) \geq n$ (la preuve est analogue à celle de l'équivalence de (3.6.1) et (3.6.2)).

Supposons la condition (4.5.2) satisfaite, et soit $\mathcal{J}$ l'idéal de $\mathbb{R}[y; y^1, \dots, y^n]$ formé de tous les polynômes nuls sur Σ (donc $V(\mathcal{J}) = V(\mathcal{F}) = \Sigma$). On a $\text{ht}(\mathcal{J}) \geq n$; d'après (3.3), l'ensemble $Y = \{\varphi \in X \mid ({}^1\varphi)^*(\mathcal{J}) \text{ ne contient pas une puissance de } \underline{m}\}$ est l'image réciproque par j d'une sous-variété algébrique de codimension infinie $\hat{Y}$ de $\hat{X}$. D'après 4.3, l'idéal $\mathcal{I}_\varphi = ({}^1\varphi)^*(\mathcal{J})$ est elliptique si et seulement si $({}^1\varphi)^*(\mathcal{J})$ est elliptique ; ainsi $\hat{Y} \supset \hat{Z}$ et $\text{codim}(\hat{Z}) = \infty$.

Le théorème suivant caractérise les germes G_r -stables dans X ($r < \infty$) lorsque (4.5.1) est satisfaite (je ne sais pas caractériser la G_r -stabilité lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée) :

Théorème 4.6 : Supposons que le groupe Γ vérifie (4.5.1). Pour un $\varphi \in X$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) L'idéal $\mathcal{I}_\varphi$ est elliptique.
- (2) Pour tout $r \in \mathbb{N}$, φ est G_r -stable dans X .
- (3) φ est G_0 -stable dans X .

En outre, l'ensemble Z des $\varphi \in X$ qui ne vérifient pas ces conditions, est l'image réciproque par la projection $j : X \longrightarrow \hat{X}$ d'un sous-ensemble semi-algébrique de codimension infinie $\hat{Z}$ de $\hat{X}$ (donc la G_r -stabilité dans X , $r < \infty$, est générique).

Preuve : D'après 4.4 et 4.5, il suffit de montrer l'implication : non (1) $\implies$ non (3). Supposons donc $\mathcal{I}_\varphi$ non elliptique. D'après 4.3, il existe une suite $x^j \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ telle que $x^j \longrightarrow 0$ et $d(1_\varphi(x^j), \Sigma) \leq |x^j|^j$. Soit $\xi^j \in \Sigma$ tel que : $|1_\varphi(x^j) - \xi^j| = d(1_\varphi(x^j), \Sigma)$. Soient φ_m^j l'unique application affine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que $1_{\varphi_m^j}(x^j) = \xi^j$, φ_m^j l'unique application affine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que $1_{\varphi_m^j}(x^j) = 1_\varphi(x^j)$.

On peut visiblement supposer que les boules $B(x^j, \frac{|x^j|}{2})$ sont disjointes deux à deux. Alors la série :

$$\varphi_m + \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi_m^j - \varphi_m^j) \cdot \gamma \left(\frac{x - x^j}{|x^j|} \right)$$

converge uniformément vers une fonction C^∞ φ' telle que $\varphi' - \varphi$ soit plate à l'origine ; en outre, pour tout j : $1_{\varphi'}(x^j) = \xi^j \in \Sigma$, i.e. φ' n'est pas transverse en x^j à l'orbite $\Gamma \cdot \varphi_m'(x^j) = \mathcal{O}_j$.

Posons $k_j = \text{codim}(\mathcal{O}_j)$. D'après 4.7, il existe pour tout j tel que $k_j \leq n$, une fonction C^∞ ψ^j , aussi petite que l'on veut, telle que $(\varphi' + \psi^j)(x^j) = \varphi'(x^j)$ et telle que $\varphi' + \psi^j$ soit semi-transverse sur $\mathcal{O}_j$ en x^j ; si $k_j > n$,

posons $\psi^j = 0$. Les ψ^j étant choisies assez petites, la série :

$$\varphi' + \sum_{j=0}^{\infty} \psi^j \cdot \gamma \left(\frac{x-x^j}{|x^j|} \right)$$

converge vers une fonction $C^\infty \varphi''$ telle que $\varphi' - \varphi''$ soit plate à l'origine ; en outre, φ'' est semi-transverse sur $\mathcal{O}_j$ en x^j , si $k_j \leq n$.

Supposons que φ'' soit $\mathcal{G}_0$ -stable dans X . Il existe alors $g \in G_0$ et $\tau \in \text{Dif}_0$ tels que $\varphi''' = (g \cdot \varphi'') \circ \tau^{-1}$ soit algébrique et $\mathcal{I}_{\varphi'''}$ soit elliptique. En particulier, pour tout j assez grand, φ''' est transverse en $\tau(x^j)$ à $\mathcal{O}_j$; en outre, τ induit un homéomorphisme du germe de $(\varphi'')^{-1}(\mathcal{O}_j)$ en x^j sur le germe de variété, de codimension k_j , de $(\varphi''')^{-1}(\mathcal{O}_j)$ en $\tau(x^j)$. D'après 4.7, ceci est absurde si $k_j < n$; absurde aussi lorsque $k_j > n$, car alors le germe $(\varphi''')^{-1}(\mathcal{O}_j) = \{0\}$ ou $\emptyset$. Ainsi, en supposant qu'il existe une infinité d'indices j tels que $k_j \neq n$, φ'' n'est pas $\mathcal{G}_0$ -stable ; il en sera de même de φ .

Il reste à examiner le cas où $k_j = n$ pour tout j assez grand, i.e. $\varphi''(x^j) \in \Sigma_n \setminus \Sigma_{n+1}$. Soit $\Sigma_{n,0}$ la partie régulière de codimension $n-1$ de $\Sigma_n \setminus \Sigma_{n+1}$; son complémentaire $\Sigma_{n,1}$ est une réunion finie d'orbites de codimension n . On peut donc supposer que les $\varphi''(x^j)$ appartiennent à $\Sigma_{n,0}$ (car le germe $(\varphi''')^{-1}(\Sigma_{n,1}) = \{0\}$ ou $\emptyset$). Procédant comme plus haut, on démontre que φ'' est transverse en tout point x^j sur $\Sigma_{n,0}$; de même, φ''' est transverse en $\tau(x^j)$ à $\Sigma_{n,0}$. Soit C_j le germe de courbe régulière en x^j induit par $(\varphi'')^{-1}(\Sigma_{n,0})$; $\tau(C_j)$ est donc le germe de courbe régulière induit en $\tau(x^j)$ par $(\varphi''')^{-1}(\Sigma_{n,0})$. On vérifie que $\varphi'''(\tau(C_j))$ (resp. $\varphi''(C_j)$) traverse (resp. ne traverse pas) au point $\varphi'''(\tau(x^j))$ (resp. $\varphi''(x^j)$) l'hypersurface $\mathcal{O}_j$ de $\Sigma_{n,0}$. Ceci est absurde et donc φ'' et φ ne sont pas $\mathcal{G}_0$ -stables.

Nous avons utilisé précédemment les remarques qui suivent :

4.7. Soit ψ une application C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que $\psi(0) = 0$ et soit Ω la sous-variété de $\mathbb{R}^p$ définie par les équations $y_1 = \dots = y_k = 0$ ($1 \leq k \leq n$).

Si ψ n'est pas transverse sur Ω en o , on peut trouver ψ' aussi voisin que l'on veut de ψ (pour la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées sur tout compact de $\mathbb{R}^n$) et un système de coordonnées locales à l'origine de $\mathbb{R}^n$: $x = (x_1, \dots, x_n)$ tel que $\psi'_1 = x_1, \dots, \psi'_{k-1} = x_{k-1}$, ψ'_k est une forme quadratique non dégénérée en $x_k, \dots, x_n$ (ceci est une conséquence facile du lemme de Morse). En outre, on vérifie que le germe $(\psi')^{-1}(\Omega)$ à l'origine de $\mathbb{R}^n$ n'est jamais homéomorphe à un germe de variété topologique de codimension k , si $1 \leq k < n$. (cf. par exemple [1]). Nous dirons qu'un tel ψ' est semi-transverse sur Ω à l'origine.

On déduit de 4.6. la conséquence suivante (comparer à 2.13).

Corollaire 4.8 : *Supposons que le groupe Γ vérifie (4.5.1). Si φ est analytique, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Il existe W voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi|_{W \setminus \{0\}}$ soit transverse sur les orbites de tous les points de $\mathbb{R}^p$ sous l'action du groupe Γ .*
- (2) *φ est $\mathcal{G}_r$ -stable dans X ($r < \infty$).*

Preuve : La condition (1) signifie que le germe des zéros de l'idéal $\mathcal{I}_\varphi$ est $\{0\}$ ou $\emptyset$; l'idéal $\mathcal{I}_\varphi$ étant engendré par des fonctions analytiques, cela signifie que $\mathcal{I}_\varphi$ est elliptique, i.e. que φ est $\mathcal{G}_r$ -stable dans X ($r < \infty$).

4.9. Soit η un point fixé de $\mathbb{R}^p$. Sous l'hypothèse (4.5.1), on peut décomposer $\Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}$ ($0 \leq i \leq \inf(p, n+1)$) en une réunion disjointe $\Sigma_{i,0} \cup \Sigma_{i,1}$ où $\Sigma_{i,0}$ est une variété algébrique régulière de codimension $i-1$ (éventuellement vide) et $\Sigma_{i,1}$ est une variété algébrique régulière de codimension i (éventuellement vide), réunion d'un nombre fini d'orbites $\Gamma.y$.

Soit η un point fixé de $\mathbb{R}^p$ et supposons que l'on peut choisir la décomposition précédente de telle sorte que la condition suivante soit satisfaite (comparer à (H)) :

(H) Le point η n'appartient à l'adhérence d'aucune des orbites $\Gamma.y$ contenues dans les $\Sigma_{i,0}$, $0 \leq i \leq \inf(p, n+1)$.

On peut alors remplacer la condition (4.8.1) par un nombre fini de conditions de transversalité. De façon précise :

Proposition 4.10 : *Supposons la condition (H) satisfaite. Si φ est analytique telle que $\varphi(0) = \eta$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe W voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi|_{W \setminus \{0\}}$ soit transverse sur toutes les variétés $\Sigma_{i,0}$ et $\Sigma_{i,1}$, $0 \leq i \leq r = \inf(p, n+1)$ et tel que $W \cap \varphi^{-1}(\Sigma_{r+1}) = \{0\}$ ou $\emptyset$.*

(2) *φ est $\mathcal{G}_r$ -stable dans X ($r < \infty$).*

Preuve : Elle est analogue à celle de 3.8.

5. Exemples.

Par la suite, W désigne un voisinage convenable de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$. On rappelle que $\tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}$ (resp. $\Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}$) est la réunion des orbites de codimension i du groupe $\tilde{\Gamma}$ (resp. Γ).

Exemple 5.1 : $\Gamma = \{e\}$; $\tilde{\Gamma} = \{e\}$

$$M_\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right).$$

Le germe φ est $\mathcal{G}$ -stable dans X si et seulement si l'idéal engendré dans $\mathcal{E}$ par tous les jacobiens $\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{D(x_{i1}, \dots, x_{ip})}$ contient une puissance de $\underline{m}$.

Les orbites sont les points. La $\mathcal{G}$ -stabilité sera donc générique si et seulement si $p=1$.

Supposons $p=1$. On a $\tilde{\Sigma}_0 = \tilde{\Sigma}_1 = \mathbb{C}$; $\Sigma_0 = \Sigma_1 = \mathbb{R}$.

Posons $\tilde{\Sigma}_{1,0} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$; $\tilde{\Sigma}_{1,1} = \{0\}$; $\Sigma_{1,0} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\Sigma_{1,1} = \{0\}$.

Les conditions $(\tilde{H})$ et (H) sont alors satisfaites (on prend $\eta = 0$). Ainsi :

Un germe analytique φ tel que $\varphi(0) = 0$ est $\mathcal{G}$ -stable dans X (resp. $\mathcal{G}_r$ -stable dans X , $r < \infty$) si et seulement si $\tilde{\varphi}|_{W \setminus \{0\}}$ (resp. $\varphi|_{W \setminus \{0\}}$) est transverse sur $\{0\}$.

Exemple 5.2 : $\Gamma = \text{Gl}(p, \mathbb{R})$; $\tilde{\Gamma} = \text{Gl}(p, \mathbb{C})$

Le germe φ est $\mathcal{G}$ -stable dans X (resp. $\mathcal{G}_r$ -stable dans X , $r < \infty$) si et seulement si l'idéal engendré dans $\mathcal{E}$ par $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ et tous les jacobiens $\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{D(x_{i1}, \dots, x_{ip})}$ contient une puissance de $\underline{m}$ (resp. est elliptique).

On a $\tilde{\Sigma}_0 = \mathbb{C}^p$; $\tilde{\Sigma}_1 = \dots = \tilde{\Sigma}_p = \{0\}$; $\Sigma_0 = \mathbb{R}^p$; $\Sigma_1 = \dots = \Sigma_p = \{0\}$.

La $\mathcal{G}$ -stabilité dans X est donc toujours générique.

Un germe analytique φ tel que $\varphi(0) = 0$ est $\mathcal{G}$ -stable dans X (resp. $\mathcal{G}_r$ -stable dans X) si et seulement si $\tilde{\varphi}|_{W \setminus \{0\}}$ (resp. $\varphi|_{W \setminus \{0\}}$) est transverse sur $\{0\}$.

Exemple 5.3 : Γ est le groupe des homothéties $y \mapsto \lambda.y$, $\lambda \neq 0$; $\tilde{\Gamma}$ est aussi le groupe des homothéties :

$$M_\varphi = \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right).$$

On a : $\tilde{\Sigma}_0 = \dots = \tilde{\Sigma}_{p-1} = \mathbb{C}^p$; $\tilde{\Sigma}_p = \{0\}$; $\Sigma_0 = \dots = \Sigma_{p-1} = \mathbb{R}^p$; $\Sigma_p = \{0\}$.

La $\mathcal{G}$ -stabilité dans X est donc générique si et seulement si $p \leq 2$.

Supposons $p=2$. Toutes les orbites de $\tilde{\Sigma}_1 \setminus \tilde{\Sigma}_2$ (resp. $\Sigma_1 \setminus \Sigma_2$) adhèrent à $\{0\}$.

Il est donc impossible de trouver une décomposition de $\tilde{\Sigma}_1 \setminus \tilde{\Sigma}_2$ (resp. $\Sigma_1 \setminus \Sigma_2$) vérifiant $(\tilde{H})$ (resp. (H)).

Le germe φ est $\mathcal{G}$ -stable dans X (resp. $\mathcal{G}_r$ -stable dans X , $r < \infty$) si et seulement si l'idéal engendré dans $\mathcal{E}$ par les $\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}$ et les jacobiens $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x_{i1}, x_{i2})}$ contient une puissance de $\underline{m}$ (resp. est elliptique).

Exemple 5.4 : $\tilde{\Gamma}$ (resp. $\tilde{\Gamma}$) est le sous-groupe de $Gl(p, \mathbb{R})$ (resp. $Gl(p, \mathbb{C})$) formé des matrices diagonales.

Les orbites sont en nombre fini : ce sont les $\tilde{\Gamma}.y$ (resp. $\Gamma.y$), y ayant ses composantes égales à 0 ou 1. On a donc :

$$\tilde{\Sigma}_1 = \{y \in \mathbb{C}^p \mid \text{au moins 1 coordonnée de } y \text{ sont nulles}\}.$$

$$\Sigma_1 = \tilde{\Sigma}_1 \cap \mathbb{R}^p$$

$\tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}$ et $\Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}$ sont des variétés régulières de codimension 1, réunions d'un nombre fini d'orbites. La $\mathcal{G}$ -stabilité dans X est donc générique.

$$\text{Posons } \tilde{\Sigma}_{i,0} = \emptyset ; \tilde{\Sigma}_{i,1} = \tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1} ; \Sigma_{i,0} = \emptyset ; \Sigma_{i,1} = \Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1} .$$

Les conditions (H) et (H) sont vérifiées, pour tout n .

Un germe analytique φ est $\mathcal{G}$ -stable dans X (resp. $\mathcal{G}_r$ -stable dans X , $r < \infty$) si et seulement si $\tilde{\varphi} \mid W \setminus \{0\}$ (resp. $\varphi \mid W \setminus \{0\}$) est transverse sur les variétés $\tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}$ (resp. $\Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}$), $0 \leq i \leq p$.

Exemple 5.5 : $\tilde{\Gamma}$ (resp. $\tilde{\Gamma}$) est le sous-groupe de $Gl(p, \mathbb{R})$ (resp. $Gl(p, \mathbb{C})$) formé des matrices diagonales, de déterminant égal à 1.

$$\text{On a } \tilde{\Sigma}_0 = \tilde{\Sigma}_1 = \mathbb{C}^p ; \Sigma_0 = \Sigma_1 = \mathbb{C}^p.$$

Pour $i \geq 2$, $\tilde{\Sigma}_i$ (resp. Σ_i) est le même que le $\tilde{\Sigma}_1$ (resp. Σ_1) de l'exemple 5.4. La $\mathcal{G}$ -stabilité dans X est donc générique.

$$\text{Posons } \tilde{\Sigma}_{1,0} = \{y \in \mathbb{C}^p \mid \text{toutes les coordonnées de } y \text{ sont } \neq 0\}$$

$$\tilde{\Sigma}_{1,1} = \{y \in \mathbb{C}^p \mid \text{il existe une coordonnée de } y \text{ et une seule}$$

égale à 0\}.

$$\Sigma_{i,0} = \emptyset ; \Sigma_{i,1} = \Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1} \text{ si } i \geq 2.$$

Enfin, définissons de manière analogue les $\Sigma_{i,j}$, i.e. $\Sigma_{i,j} = \tilde{\Sigma}_{i,j} \cap \mathbb{R}^p$.

On vérifie alors facilement les conditions (H) et (H) lorsque $n \in \mathbb{R}^p \setminus \Sigma_{1,0}$.

Les variétés $\tilde{\Sigma}_{1,0}$ et $\Sigma_{1,0}$ sont ouvertes dans $\mathbb{C}^p$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement. Ainsi :

Pour un germe analytique φ tel que $\varphi(0) \in \mathbb{R}^p \setminus \Sigma_{1,0}$, la $\mathcal{G}$ -stabilité dans X (resp. la $\mathcal{G}_r$ -stabilité dans X , $r < \infty$) équivaut à celle de l'exemple 5.4.

Exemple 5.6 : Γ et $\tilde{\Gamma}$ sont les groupes de transformations qui laissent invariante la forme quadratique : $-y_1^2 - \dots - y_v^2 + y_{v+1}^2 + \dots + y_p^2 = Q(y)$.

Les orbites $\tilde{\Gamma}.y$ sont les hypersurfaces :

$$\tilde{S}_\lambda = \{y \in \mathbb{C}^p \mid Q(y) = \lambda\}, \lambda \neq 0$$

$$\tilde{S}_0 = \{y \in \mathbb{C}^p \setminus \{0\} \mid Q(y) = 0\} \text{ et } \{0\}$$

De même, les orbites $\Gamma.y$ sont les $\tilde{S}_\lambda \cap \mathbb{R}^p = S_\lambda$; $\tilde{S}_0 \cap \mathbb{R}^p = S_0$ et $\{0\}$.

On a :

$$\tilde{\Sigma}_0 = \tilde{\Sigma}_1 = \mathbb{C}^p ; \tilde{\Sigma}_2 = \dots = \tilde{\Sigma}_p = \{0\}$$

$$\Sigma_0 = \Sigma_1 = \mathbb{R}^p ; \Sigma_2 = \dots = \Sigma_p = \{0\}$$

La $\mathcal{G}$ -stabilité dans X est donc générique. Posons :

$$\tilde{\Sigma}_{1,0} = \{y \in \mathbb{C}^p \mid Q(y) \neq 0\}$$

$$\tilde{\Sigma}_{1,1} = \{y \in \mathbb{C}^p \setminus \{0\} \mid Q(y) = 0\} = \tilde{S}_0$$

et définissons $\Sigma_{1,0}$ et $\Sigma_{1,1}$ de manière analogue. Les conditions (H) et (H) sont alors satisfaites pour $\eta = 0$. Ainsi :

Un germe analytique tel que $(0) = 0$ est $\mathcal{G}$ -stable dans X (resp. $\mathcal{G}_r$ -stable dans X , $r < \infty$) si et seulement si $\tilde{\varphi} \mid W \setminus \{0\}$ (resp. $\varphi \mid W \setminus \{0\}$) est transverse sur les variétés $\tilde{S}_0$ et $\{0\}$ (resp. S_0 et $\{0\}$).

En particulier, si Γ est le groupe orthogonal ($v = 0$), $S_0 = \emptyset$. Comparant avec 5.2, on voit que les $\mathcal{G}_r$ -stabilités ($r < \infty$) pour le groupe orthogonal ou le groupe linéaire sont les mêmes.

Exemple 5.7 : Soient α, β deux entiers tels que $p = \alpha \cdot \beta$ et $\beta \geq \alpha$. Identifions $\mathbb{R}^p$ (resp. $\mathbb{C}^p$) à l'espace des matrices $\alpha \times \beta$ à coefficients réels (resp. complexes).

Par composition à droite et à gauche, on définit un homomorphisme :

$GL(\alpha, \mathbb{R}) \times GL(\beta, \mathbb{R}) \ni (A, B) \longmapsto g_{A,B} \in GL(p, \mathbb{R})$ (si $M \in \mathbb{R}^p$, on pose $g_{A,B}(M) = AMB^{-1}$). Soit Γ l'image de cet homomorphisme ($\tilde{\Gamma}$ se définit de manière analogue).

Soit $\tilde{\Omega}_i$ (resp. Ω_i) ($0 \leq i \leq \alpha$) le sous-ensemble de $\mathbb{C}^p$ (resp. $\mathbb{R}^p$) formé des matrices M telles que le rang de M soit égal à $\alpha-i$: $\tilde{\Omega}_i$ (resp. Ω_i) est une variété algébrique régulière de codimension i ($\beta-\alpha+i$) (cf. [6], chap. II) ; en outre, les $\tilde{\Omega}_i$ (resp. Ω_i) sont les orbites de $\tilde{\Gamma}$ (resp. Γ). Ainsi :

Un germe analytique φ est $\mathcal{G}$ -stable dans X (resp. $\mathcal{G}_r$ -stable dans X , $r < \infty$) si et seulement si $\tilde{\varphi}|_{W \setminus \{o\}}$ (resp. $\varphi|_{W \setminus \{o\}}$) est transverse sur les variétés $\tilde{\Omega}_i$ (resp. Ω_i), $0 \leq i \leq \alpha$.

5.8. Pour terminer, nous ferons deux remarques :

1) Soit Dif_ω le groupe des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^\omega$ à l'origine de $\mathbb{C}^n$; $\tilde{\Gamma}$ un sous-groupe de Lie de $\text{Gl}(p, \mathbb{C})$; $X_\omega = \mathcal{C}_o^\omega(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$ l'espace des germes à l'origine d'applications holomorphes. Le groupe $\mathcal{G}_\omega = \mathcal{C}_{o,e}^\omega(\mathbb{C}^n, \tilde{\Gamma}) \times \text{Dif}_\omega$ opère de manière évidente sur X_ω ; on peut donc étudier la $\mathcal{G}_\omega$ -stabilité dans X_ω . Tous les résultats des paragraphes 2 et 3 se transposent alors de manière évidente.

2) Les propositions 3.8 et 4.10 fournissent des critères de stabilité pour des germes analytiques. Si φ n'est pas analytique, on peut donner des critères analogues (leur formulation nécessite la notion de quasi-transversalité, cf. [6]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. BOCHNAK and S. ŁOJASIEWICZ : A converse of the Kuiper. Kuo theorem,
lecture notes in mathematics, 192, Springer.

- [2] B. MALGRANGE : Ideals of differentiable functions, Oxford Uni. Press.(1966).

- [3] J. MATHER : Stability of C^∞ mappings, II, Ann. of Math. 89, 254-291 (1969).

- [4] A. SEIDENBERG : A new decision method for elementary algebra.
Ann. of Math, (2), 60, 365-374 (1954).

- [5] J.P. SERRE : Algèbre locale - Multiplicités. Lecture notes in Mathematics,
11 - Springer.

- [6] J.Cl. TOUGERON : Idéaux de fonctions différentiables I,
Annales de l'Institut Fourier, tome XVIII.

J.Cl. TOUGERON

Département de Mathématiques et Informatique

RENNES - BEAULIEU