PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

M. GOBLOT

Exemple d'ouvert non agréable d'un spectre d'anneaux

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. nº 5, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___4_A5_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

EXEMPLE D'OUVERT NON AGREABLE D'UN SPECTRE D'ANNEAUX

M. GOBLOT

On utilise librement le langage de [2] .

I - Les données : On donne

- un anneau A commutatif unitaire,

- un ouvert $U = D(\mathfrak{L})$ de Spec A, ensemble des idéaux premiers de A ne contenant pas un certain idéal $\mathfrak{L}$ de A,

- C la sous-catégorie localisante de mod A des A-modules M tels que $M^{\sim}/U = 0$, donc on a

$$C = \{M \mid \forall\, p \in U \quad M_p = 0\} = \{M \mid \forall\, f \in \mathfrak{L} \quad M_f = o\},$$

- mod A/C la catégorie quotient de mod A par C, j^* : mod A $\longrightarrow$ mod A/C et j_* : mod A/C $\longrightarrow$ mod A les foncteurs canoniques,

-mod $A^{\sim}/U$ la catégorie des $A^{\sim}/U$-modules quasi-cohérents et k^* le foncteur

$$k^* : M \text{ dans mod } A \longrightarrow M^{\sim}/U \text{ dans mod } A^{\sim}/U.$$

Dans ces conditions, on voit que

$$\ker k^* = \{M \mid k^*M = M^{\sim}/U = o\} = C$$

donc il existe un foncteur fidèle unique

$$i : \text{mod } A/C \longrightarrow \text{mod } A^{\sim}/U$$

tel que $k^* = i\, j^*$.

Définition : On dira que U est un ouvert agréable (resp. très agréable), si i est pleinement fidèle (resp. est une équivalence) (I).

En vertu d'un théorème de A. Grothendieck ((5) Théorème I.4.I) tout ouvert quasi-compact de Spec A est très agréable.

Le foncteur $j_* j^*$: mod A $\longrightarrow$ mod A est idempotent et, pour tout module M, $j_* j^* M$ est le C-fermé de M.

On note Γ le foncteur

dans mod $A^\sim/U \longrightarrow \Gamma(U,\mathcal{F})$ dans mod A.

Alors Γ est adjoint à droite de k^* et prend ses valeurs dans la catégorie des A-modules C-fermés. De même, i a pour adjoint à droite le foncteur $j^*\Gamma$.

Pour que U soit agréable, i.e pour que i soit pleinement fidèle, il faut et il suffit que $j^*\Gamma$ i soit l'identité de mod A/C, i.e pour tout A-module M, $j_* j^* M = \Gamma(U,M^\sim)$.

Pour que U soit très agréable, il faut et il suffit que $ij^*\Gamma$ soit l'identité de mod $A^\sim/U$, i.e. que pour tout $A^\sim/U$-module $\mathcal{F}$ quasi-cohérent on ait $\Gamma(U,\mathcal{F})^\sim/U = \mathcal{F}$.

2 - Autres exemples d'ouverts très agréables.

Catégories modulaires. Soient A un anneau (commutatif) et $\mathcal{L}$ un idéal idempotent. Alors (6) l'ensemble des idéaux de A contenant $\mathcal{L}$ est topologisant idempotent, la sous-catégorie localisante associée C' étant

$$C' = \text{mod } A/\mathcal{L} = \{M \mid \mathcal{L}M = o\}.$$

La catégorie quotient mod$(A,\mathcal{L})$ = mod A/C' a des propriétés très proches des catégories de modules. On caractérise les catégories de cette forme par les axiomes AB 4^* et AB 6 (Roos (6)).

Problème : Soient A un anneau commutatif, $\mathcal{L}$ un idéal idempotent,

$$C' = \text{mod } A/\mathcal{L} \quad , \quad U = D(\mathcal{L}).$$

On introduit alors pour U les notations et notions données dans le n° I.

Alors $C' \subset C$ et on a un foncteur canonique $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L}) \longrightarrow \mathrm{mod}\tilde{A}/U$.

Pour exprimer que ce foncteur est <u>fidèle</u>, on exprime que $C = C'$ et on obtient pour $\mathcal{L}$ la propriété caractéristique suivante :

Il existe un système générateur $(e_i)_{i \in H}$ de $\mathcal{L}$ tel que, pour toute application $h : H \longrightarrow \mathbb{N}$, $(e_i^{h(i)})_{i \in H}$ soit encore un système générateur de $\mathcal{L}$.

On prouve aussi que tout système générateur de $\mathcal{L}$ possède cette propriété.

Cela étant, peut-on caractériser les idéaux idempotents $\mathcal{L}$ tel que la foncteur

$$\mathrm{mod}(A,\mathcal{L}) \longrightarrow \mathrm{mod}\ \tilde{A}/U$$

soit pleinement fidèle (ou soit une équivalence) ?

<u>Théorème</u>. <u>Si</u> $\mathcal{L}$ <u>vérifie la condition</u> (S) <u>suivante</u> :
(S) <u>pour tout idéal de type fini</u> $I \subset \mathcal{L}$, <u>il existe</u> J <u>de type fini</u> $J \subset \mathcal{L}$ <u>tel que</u> $I \subset \bigcap_n J^n$, <u>alors le foncteur</u>

$$\mathrm{mod}(A,\mathcal{L}) \longrightarrow \mathrm{mod}\ \tilde{A}/U$$

<u>est une équivalence</u>.

Comme tout idéal $\mathcal{L}$ vérifiant (S) est union filtrante d'idéaux de type dénombrable vérifiant (S), on montre que l'on peut se ramener au cas où $\mathcal{L}$ est de type dénombrable, engendré par $(e_I,\ldots,e_n,\ldots)$.

Alors (S) signifie qu'il existe une suite croissante d'entiers (p_n) telle que, pour tout n, l'idéal I_n engendré par $(e_I,\ldots,e_{p_n})$ soit contenu dans l'intersection des idéaux $I_{n+I,h}$ engendrés par $(e_I^h,\ldots,e_{p_{n+I}}^h)$, où h décrit $\mathbb{N}$.

On pose $U_n = D(I_n)$ et on adopte pour U_n les mêmes notations que celles du n° I pour $U \subset \mathrm{Spec}\ A$, mais affectées de l'indice n.

$$C_n = \{M \mid M^{\sim}/U_n = o\}$$

$$C_n = \{M \mid \forall x \in M \quad \exists h \quad I_{n,h} \cdot x = o\}$$

Soit $\mathcal{F}$ dans mod $A^{\sim}/U$. D'après le théorème de Grothendieck (U_n très agréable)

$$\mathcal{F}/U_n = (\Gamma(U_n,\mathcal{F}))^{\sim}/U_n$$

i.e., pour tout $m \geq n$, $\Gamma(U_n,\mathcal{F})$ est le C_n-fermé de $\Gamma(U_m,\mathcal{F})$.

On doit montrer que $\Gamma(U_n,\mathcal{F})$ est aussi le C_n-fermé de $\Gamma(U,\mathcal{F}) = \varprojlim_m \Gamma(U_m,\mathcal{F})$.

Soit g_n l'application canonique

$$g_n : \Gamma(U,\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U_n,\mathcal{F})$$

On doit donc prouver que Ker g_n et Coker g_n sont dans C_n.

I) <u>Noyau de</u> g_n. Soit $y = (y_m)_m \in$ Ker g_n, i.e. $y_n = o$. On peut de proche en proche trouver une suite d'entiers h_j telle que

$$e_{i_j}^{h_j} \cdots e_{i_o}^{h_o} \; y_{n+I+j} = o$$

pour tout i_α compris entre I et $p_{n+\alpha}$ $(\alpha \geq o)$.

Par (S), e_{i_o} s'exprime en combinaison linéaire des $e_{i_j}^{h_j} \cdots e_{i_I}^{h_I}$, donc en en déduit

$$e_{i_o}^{h_{o+I}} \; y = o$$

et ker g_n est dans C_n.

2) <u>Image de</u> g_n <u>ou conoyau de</u> g_n

Soit $z \in \Gamma(U_n,\mathcal{F})$. On note f_m l'application canonique

$$f_m : \Gamma(U_{m+I},\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U_m,\mathcal{F})$$

Il existe une suite d'entiers h_j et, i_j étant compris entre I et p_{n+j}, des $z_{i_o},\ldots,i_j \in \Gamma(U_{n+j+I},\mathcal{F})$ tels que

$$\begin{cases} f_{n+j}\,(z_{i_o},\ldots,i_j) = e_{i_j}^{h_j} \; z_{i_o}\cdots i_{j-I} \\ f_n(z_{i_o}) = e_{i_o}^{h_o} \; z \end{cases}$$

Par (S), on a des scalaires $a_{i_j,i_{j+I}}$ tels que

$$e_{i_j} = \sum_{i_{j+I}} a_{i_j,i_{j+I}} \; e_{i_{j+I}}^{h_{j+I}+I}$$

On pose alors

$$y_{i_o,n+j+I} = \sum a_{i_o,i_I} \cdots a_{i_j,i_{j+I}} \; e_{i_{j+I}}^{h_{j+I}+I} \; z_{i_o,\ldots,i_j}$$

On voit alors que

$$y_{i_o} = (y_{i_o,m})_m \in \varprojlim_m \Gamma(U_m,\mathcal{F}) = \Gamma(U,\mathcal{F})$$

et que l'on a

$$g_n(y_{i_o}) = e_{i_o}^{h_o+I} \; z$$

donc Coker $g_n = \Gamma(U_n,\mathcal{F})/I_m g_m$ est dans C_n.

<u>Exemples</u> :

I) Tout idéal pur $\mathcal{L}$ de A (i.e. $A/\mathcal{L}$ est plat) vérifie la condition (S). On a dans ce cas une situation encore plus agréable, car le prolongement par zéro en dehors de U à Spec A tout entier a une interprétation simple (3), (I), (4).

2) Si A est un anneau dont l'ensemble des idéaux est totalement ordonné par inclusion (par exemple un anneau de valuation), alors tout ouvert de Spec A est soit affine, soit associé à un idéal idempotent de A vérifiant (S).

3) Soient X un espace topologique compact et $A = C(X,\mathbb{R})$ l'anneau des fonctions numériques continues. L'idéal des fonctions nulles en $x \in X$ est maximal idempotent vérifiant (S).

3 - Exemple d'ouvert non agréable - Réciproque au théorème précédent

On considère un idéal (non nécessairement idempotent) $\mathcal{J}$ de type dénombrable, engendré par

$$e_I,\dots,e_n,\dots \text{ et } U = D(\mathcal{J}).$$

On note I_n l'idéal engendré par $e_I,\dots,e_n$ et $I_{n,h}$ l'idéal engendré par $e_I^h,\dots,e_n^h$ et $U_n = D(I_n)$. On emploie pour U (resp. U_n) les mêmes notations qu'au n° I (resp. affectées de l'indice n).

On suppose que U est agréable, i.e. que pour tout A-module M,

$$j_* j^* M = \Gamma(U,M^\sim)$$

On note U_n le morphisme

$$U_n : M \longrightarrow \Gamma(U_n,M^\sim) = j_{n*} j_n^* M$$

et $N_n = \ker U_n$.

Fixons n. Pour tout p, on choisit $x_{n+p} \in N_{n+p}$.

Alors $U_{n+p}(x_n+\dots+x_{n+p}) \in \Gamma(U_{n+p},M^\sim)$ et

$$(U_{n+p}(x_n+\dots+x_{n+p}))_p \in \varprojlim_p \Gamma(U_{n+p},M^\sim) = \Gamma(U,M^\sim).$$

Cet élément est même dans le noyau de l'application canonique

$$\Gamma(U,M^\sim) \longrightarrow \Gamma(U_n,M^\sim).$$

Comme U est agréable, $\Gamma(U_n,M^\sim)$ est le C_n-fermé de $\Gamma(U,M^\sim)$ et ce noyau est dans C_n. Donc, il existe un entier h_n tel que, pour tout i entre I et n, pour tout p

$$e_i^{h_n} \; U_{n+p}(x_n+\dots+x_{n+p}) = o$$

$$e_i^{h_n}(x_n+\dots+x_{n+p}) \in N_{n+p}$$

Comme N_{n+p} est dans C_{n+p}, on a le résultat : pour tout n, il existe h_n tel que pour tout p, il existe $k_{n,p}$ tel que pour tout i entre I et n, tout j entre I et n+p, on ait

$$e_i^{h_n} \; e_j^{k_{n,p}} \; (x_n+\dots+x_{n+p}) = o.$$

On choisit alors une suite d'entiers g_m. L'idéal I_{m,g_m} est engendré par $e_I^{g_m},\dots,e_m^{g_m}$.

On pose $M = \coprod_m A/I_{m,g_m}$. On sait alors que $A/I_{m,g_m}$ est dans C_m. Pour tout m, on note x_m l'image de I par l'application :

$$A \twoheadrightarrow A/I_{m,g_m} \hookrightarrow M = \coprod_\alpha A/I_{\alpha,g_\alpha}$$

Si on applique le résultat précédent, on obtient ce qui suit :

<u>Pour toute suite d'entiers</u> (g_m), <u>il existe une suite d'entiers</u> (h_n) <u>et une double suite</u> $(k_{n,p})$ <u>telles que, pour tout i entre I et n et tout j entre I et n+p, on ait</u> :

$$e_j^{k_{n,p}} \; e_i^{h_n} \in \bigcap_{o\leq q\leq p} I_{n+q,g_{n+q}}.$$

<u>Exemple</u> : On prend $A = K[X_I,\dots,X_n,\dots]$ et $\mathcal{L}$ l'idéal engendré par $X_I,\dots,X_n,\dots$. Alors $U = D(\mathcal{L})$ n'est pas agréable (K anneau quelconque).

Soit (g_m) une suite d'entiers, si U était agréable, on aurait des suites h_n et $k_{n,p}$ telles que, n étant fixé, pour tout p et tout $q \leq p$, on ait des relations de la forme

$$X_{n+p}^{k_{n,p}} \; X_n^{h_n} = A_{n,q} \; X_n^{g_{n+q}}$$

une telle relation implique $g_{n+q} \leq h_n$. Si on choisit la suite (g_m) de limite infinie, on arrive à une impossibilité.

On suppose maintenant (cf. n° 2) que $\mathcal{L}$ est idempotent et que le foncteur

$$\mathrm{mod}(A,\mathcal{L}) \longrightarrow \mathrm{mod}\, A^\sim/U$$

est <u>pleinement fidèle</u>. Pour cela, il faut que, pour toute suite d'entiers U_n, les $e_n^{u_n}$ engendrent l'idéal $\mathcal{L}$.

D'après ce qui précède, il faut aussi que : pour toute suite d'entiers (g_m), il existe des suite (h_n) et $(k_{n,p})$ telles que, pour tout p

et tout j entre I et n+p

$$I_{n,h_n} \; e_j^{k_{n,p}} \subset \bigcap_{0 \leq q \leq p} I_{n+q,g_{n+q}}$$

On fixe n et q. Alors pour $p \geq q$, les $e_j^{k_{n,p}}$ forment un système générateur de $\mathcal{L}$, donc

$$I_{n,h_n+I} \subset \mathcal{L} \; I_{n,h_n} \subset I_{n+q,g_{n+q}}$$

Si on change h_n^{+I} en h_n, on obtient le résultat suivant :

pour toute suite d'entiers (g_m), il existe une suite d'entiers h_n telle que

$$I_{n,h_n} \subset \bigcap_{q \geq 0} I_{n+q,g_{n+q}}$$

Si la condition (S) n'est pas satisfaite, on peut trouver $f \in \mathcal{L}$ et une suite (g_m) telle que, pour tout m, $f \notin I_{m,g_m}$.

Mais les $e_n^{h_n}$ engendrent $\mathcal{L}$. On a donc

$$f = \sum_{I}^{r} a_n \; e_n^{h_n}$$

On aurait alors $f \in I_{m,g_m}$ pour $m \geq r$, ce qui donne une contradiction. D'où une réciproque à la condition (S) quand $\mathcal{L}$ est de type dénombrable.

BIBLIOGRAPHIE

[I] R. BKOUCHE Parties agréables d'un spectre d'anneau, géométrie pure et molesse, à paraître.

[2] P. GABRIEL Des catégories abéliennes - Thèse - Bull. Soc. Math. Fr., 90, fasc. 3, p. 323-448.

[3] J. GIRAUD et J.L. VERDIER Séminaire M. Artin - A. Grothendieck I.H.E.S., I963-64.

[4] R. GOBLOT Sur deux classes de catégories de Grothendieck - Thèse.

[5] A. GROTHENDIECK Eléments de géométrie algébrique Chapitre I I.H.E.S. I960.

[6] J.E. ROOS Caractérisation des catégories qui sont quotients de catégories de modules par des sous-catégories bilocalisantes, C.R. Acad. Sc., t. 26I, I965, p. 4954.

Colloque d'ALGEBRE de RENNES (FRANCE)
du I9 au 22 Janvier I972

Exposé n° 5 GOBLOT
Rés. du Buisson
3G, rue du Buisson
59 - LILLE

Reproduction interdite