

CHRISTIAN PESKINE

**Courbes lisses qui ne sont pas intersection de 3 surfaces
dans l'espace projectif**

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 4

« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 14, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972__4_A14_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COURBES LISSES QUI NE SONT PAS INTERSECTION

DE 3 SURFACES DANS L'ESPACE PROJECTIF

Christian PESKINE

On se propose essentiellement ici, de montrer qu'il existe dans l'espace projectif des courbes lisses, qui ne sont pas l'intersection de 3 surfaces.

Définition : On dira qu'une variété V de $\mathbb{P}_k^n$ (resp. A_k^n) est l'intersection des hypersurfaces S_i d'équations f_i si

$$V = \text{Proj}(k[X_0, \dots, X_n]/(f_i))$$

(resp. $V = \text{Spec}(k[X_1, \dots, X_n]/(f_i))$).

Rappelons qu'Abyankhar a montré que sur un corps algébriquement clos k , toute courbe lisse dans l'espace affine est l'intersection de 3 surfaces.

Montrons qu'il n'en est pas de même dans $\mathbb{P}_k^3$.

Théorème I : Soit k un corps infini. Soit V une variété fermée de dimension $d \geq 1$ dans $\mathbb{P}_k^n$. Supposons que V admet un cône de Cohen-Macaulay, et que V est génériquement une intersection complète^{*}. Alors si V est l'intersection de $(n-d+1)$ hypersurfaces dans $\mathbb{P}_k^n$, l'unique idéal gradué a tel que

$$V = \text{Proj } k[X_0, \dots, X_n]/a$$

et que $k[X]/a$ est de Cohen-Macaulay est engendré par $(n-d+1)$ équations.

A un lemme d'évitement près, ce théorème se démontre comme le théorème local suivant :

Théorème I bis : Soit R un anneau local régulier de dimension n . Soit R/a un quotient de R , de dimension $d \geq 2$, de Cohen-Macaulay et génériquement une intersection complète dans R . Supposons que le corps résiduel k de R est in-

fini. Alors il existe $n-d+1$ éléments de a , soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-d+1}$ tels que $a/(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-d+1})$ est un module de longueur finie, l'idéal a est engendré par au plus $(n-d+1)$ éléments.

Définition : Dire que V (resp. R/a) est génériquement une intersection complète dans $\mathbb{P}_k^n$ (resp. R), c'est-à-dire qu'il existe une intersection complète X dans $\mathbb{P}_k^n$ (resp. R/I dans R) et une immersion $V \hookrightarrow X$ (resp. une surjection $R/I \rightarrow R/a \rightarrow 0$), induisant un isomorphisme et un ouvert dense de V sur un ouvert de X (resp. tel qu'il existe un élément S de R tel que l'application $(R/I)_S \rightarrow (R/a)_S$ soit un isomorphisme et que $\text{Spec } (R/a)_S$ soit dense dans $\text{Spec } R/a$).

Remarque : Si V (resp. R/a) est réduite et équidimensionnelle, V (resp. R/a) est génériquement une intersection complète.

On aura besoin du résultat préliminaire suivant :

Proposition (P. Dubreil) : Soit k un anneau local de Gorenstein de dimension > 1 . Soient a et b deux idéaux de R tels que

- 1) $a \cap b = 0$
- 2) R/a et R/b sont sans composante immergée
- 3) $V(a) \cap V(b)$ est de codimension > 1 dans $V(a)$ et $V(b)$.

Alors

- (i) $\text{Hom}(R/a, R) = b$ et $\text{Hom}(R/b, R) = a$
- (ii) R/a de Cohen-Macaulay $\iff R/b$ de Cohen-Macaulay.

i) $\alpha a = 0 \implies \alpha(a+b) \subset b \implies \alpha \in b$ (par 2)).

ii) Rappelons la proposition suivante

Proposition (Auslander) : Pour tout R-module de type fini M, on a la relation

$$\text{Prof.} M + \sup \{i, \text{Ext}^i(M, A) \neq 0\} = \dim R.$$

Supposons R/a de Cohen-Macaulay. Cela implique $\text{Ext}^i(R/a, R) = 0$ pour $i > 0$.

Soit L une résolution libre minimale du R-module R/a .

Appliquons lui le foncteur $.^V = \text{Hom}(. , R)$, on trouve une suite exacte :

$$0 \longrightarrow R/a^V \longrightarrow L_0^V \longrightarrow L_1^V \longrightarrow \dots \longrightarrow L_i^V \longrightarrow \dots$$

Comme $(R/a)^V = b$ et comme $L_0 = R$, on en déduit que R/b est un n-module de Syzygies pour tout n, ce qui implique que R/b est de Cohen-Macaulay.

Montrons maintenant les deux théorèmes. Comme les démonstrations sont identiques, appelons aussi R l'anneau gradué $k[X_0, \dots, X_n]$.

Soient $P_1, \dots, P_r$ les idéaux premiers de R , minimaux contenant a (Dans le cas gradué, ils sont homogènes). Remarquons qu'on peut choisir les éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-d+1}$ (homogènes dans le cas gradué) tels que $\underline{\alpha} = \alpha_1, \dots, \alpha_{n-d}$ est une suite R-régulière, et que $\underline{\alpha}_{R_{P_i}} = \underline{a}_{R_{P_i}}$ pour $i = 1, \dots, r$.

C'est une conséquence de

Proposition : Soit A un anneau local de Cohen-Macaulay (resp. une algèbre graduée de type fini sur un corps). Soit a un idéal (resp. gradué) de A tel que si $P_1, \dots, P_r$ sont les idéaux premiers minimaux contenant a de A et si $S = \bigcap_{i=1}^r (A - P_i)$, l'idéal $a S^{-1}A$ est engendré par une suite $S^{-1}A$ -régulière de longueur g .

Alors si le corps résiduel (resp. le corps de base) k de A est infini, il existe des éléments (resp. homogènes) $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ de a , tels que

1) $\underline{\alpha} = \alpha_1, \dots, \alpha_g$ est une suite A-régulière

2) $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ se prolonge en un système minimal de générateurs (resp. homogènes) de a

3) $\underline{\alpha} S^{-1}A = \underline{a} S^{-1}A$.

La proposition est évidente pour $g = 0$. Faisons donc une récurrence.

Il suffit évidemment de montrer qu'il existe un élément (resp. homogène) α de a , tel que

- 1) α est A -régulier i.e $\alpha \notin \mathfrak{q}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ associé à A
- 2) α appartient à un système minimal de générateurs de a , i.e $\alpha \notin m a$ où m est l'idéal maximal de A (resp. l'idéal des éléments homogènes de $d^\circ > 0$)
- 3) L'image de α dans $S^{-1}A$ appartient à un système minimal de générateurs de $aS^{-1}A$, i.e $\alpha \notin P_i(a A_{P_i}) \cap A$, pour tout $i = 1, \dots, r$

Pour le cas local, cette proposition est une conséquence immédiate du lemme suivant :

Lemme : Soit A un anneau local noethérien de corps résiduel infini. Alors si un idéal de A est contenu dans une réunion finie d'idéaux, il est contenu dans l'un de ces idéaux.

Ce lemme se démontre facilement au moyen du lemme d'évitement pour les espaces vectoriels de type fini sur un corps infini, et du lemme de Nakayama.

Pour le cas gradué, on procède différemment : si $a = \sum_{i \geq 0} a_i$, soit n le plus grand entier tel que $a_n \notin m a$. On montre alors que :

$a_n \notin \mathfrak{q}_n$ pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ associé à A , et que

$a_n \notin (P_i(a A_{P_i}) \cap A)_n$ pour $i = 1, \dots, r$.

On conclut alors de nouveau au moyen du lemme d'évitement sur les corps infinis.

Revenons alors à la démonstration des théorèmes.

Considérons l'idéal $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-d})$. En écrivant une décomposition primaire de $\underline{a}$, on constate qu'il existe un idéal b de R tel que $\underline{a} = a \cap b$, que $V(a)$ et $V(b)$ soient sans composante immergée, et que $V(a) \cap V(b)$ soit de codimen-

sion ≥ 1 dans $V(a)$ et $V(b)$. D'après le théorème de Dubreil, R/b est un anneau de Cohen Macaulay (gradué dans le cas gradué). On vérifie que $\underline{a} : \alpha_{n-d+1} = b$. En effet, $\alpha_{n-d+1} x \in \underline{a}$ implique $x a^m \in \underline{a}$ pour $m \geq 0$, donc $x \in b$.

On en déduit une suite exacte :

$$(*) \quad 0 \longrightarrow R/b \longrightarrow a/\underline{a} \longrightarrow a/\underline{a}, \alpha_{n-d+1} \longrightarrow 0.$$

Comme R/b et $a/\underline{a}$ sont des modules de Cohen-Macaulay de dimension ≥ 2 , on a $\text{prof } a/\underline{a}, \alpha_{n-d+1} \geq 1$, ou $a/\underline{a}, \alpha_{n-d+1} = 0$ en chaque point fermé de $R/\underline{a}$.

Cela implique bien $a = \underline{a}, \alpha_{n-d+1}$, ce que nous voulions démontrer.

Corollaire. Soit k un corps algébriquement clos. Il existe des courbes lisses et irréductibles de $\mathbb{P}_k^3$ qui ne sont pas intersection de 3 surfaces.

Compte tenu du théorème, il suffit de montrer qu'il existe des courbes arithmétiquement normales dans $\mathbb{P}_k^3$, dont l'idéal premier gradué ne peut pas être engendré par 3 éléments.

Pour cela, considérons par exemple une matrice $(n, n+1)$ à coefficients indéterminés X_j^i . Ses n -déterminants définissent dans $\mathbb{P}_k^{n(n+1)-1}$ une variété V de codimension 2, dont le cône est de Cohen-Macaulay. Le lieu singulier de V est le fermé défini par les $(n-1)$ -déterminants de la matrice. Il est de codimension 6 dans l'espace $\mathbb{P}_k^{n(n+1)-1}$. Si k est algébriquement clos, on en déduit que V est géométriquement R_3 .

D'après le théorème de Bertini, on peut couper V par $n(n+1)-4$ hyperplans, de façon à obtenir une courbe lisse dans $\mathbb{P}_k^3$. Soit C cette courbe. Comme C est une intersection complète dans V , C a un cône de Cohen-Macaulay. Donc C est connexe, et donc réduite et irréductible.

Soit P l'idéal premier gradué de C dans $\mathbb{P}_k^3$. Si $\mathfrak{a}$ est l'idéal gradué premier de V dans $\mathbb{P}_k^{n(n+1)-1}$, et si $\alpha_1, \dots, \alpha_{n(n+1)-4}$ sont les équations des hyperplans

par lesquels on a coupé V , on a $P = \frac{a + \underline{\alpha}}{\underline{\alpha}} \sim a/\underline{\alpha} \cap a$.

Mais comme les α_i forment une suite régulière dans l'anneau intègre du cône de V , on a $a \cap \underline{\alpha} = \underline{\alpha}$, donc $P \approx a/\underline{\alpha}$, ce qui prouve bien que P est engendré par $(n+1)$ éléments.

Remarque I : C'est un simple exercice d'algèbre commutative de montrer que toute courbe lisse de $\mathbb{P}_k^3$ est l'intersection de 4 surfaces.

Question : Le problème reste ouvert pour les courbes lisses qui ne sont pas arithmétiquement normales.

Colloque d'ALGÈBRE de RENNES (FRANCE)
du 19 au 22 Janvier 1972

Exposé n° I4 PESKINE
I64, rue de Vaugirard
75 - PARIS 15^e