JEAN MÉMIN

Le théorème de Girsanov

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 2
« Probabilités », , p. 173-187
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___2_173_0>

LE THEOREME DE GIRSANOV

par

Jean MEMIN

L'objet de cet exposé est de donner quelques résultats de Shiriaev et Liptser contenus dans [1] , et d'en donner une démonstration aussi simple que possible, utilisant les outils maintenant standart de l'intégrale stochastique, tels qu'ils sont exposés dans [3] (Voir aussi [2]).

On considère le processus Z^λ , $Z_t^\lambda = \exp(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} A_\cdot)$ où $(M_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, $(A_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont deux processus réels, λ un nombre réel. On donne des conditions pour que Z^λ soit une martingale.

D'autre part, on démontre un théorème de Girsanov et on en déduit comme application une formule connue de Cameron - Martin.

I - NOTATIONS - RAPPELS - RESULTATS PRELIMINAIRES -

- $(\Omega,\mathcal{F},P)$ espace probabilisé

$(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, famille croissante (complète pour P) de sous tribus de $\mathcal{F}$. Les processus intervenant sont (sauf mention) réels, mesurables, adaptés aux $\mathcal{F}_t$, définis sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$

On désigne par : $\mathcal{M}^{\mathbb{R}}_{loc}$ (ou $\mathcal{M}_{loc}$)

l'ensemble des martingales locales réelles

$\mathcal{M}_{loc,2}$ (resp $\mathcal{M}_{loc,p}$, $\mathcal{M}^c_{loc,p}$)

l'ensemble des martingales locales réelles, de carré intégrable (resp : de puissance $p^{ième}$ intégrable, à trajectoires continues).

Le plus souvent $(M_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ désigne une martingale (ou une martingale locale, $(A_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ son processus croissant associé.

Proposition 1.- ([2] , prop. 5, page 15, chap. 4)

Soit $(M_t)_{t\in\mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}^c_{loc,2}$ de processus croissant $(A_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Si $E(A_t) < \infty$ alors $(M_t)_{t\in\mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}^c_2$

Lemme 1.-

Soit $(M_t)_{t\in\mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}^c_{loc}$ et $M_t \geq 0$.

Alors $(M_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une surmartingale.

Démonstration :

a) $M_t \geq 0 \Longrightarrow E(M_t) < +\infty$

Soit $(\tau_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de temps d'arrêts croissants, tendant vers $+\infty$ avec p, telle que $(M_{t\wedge\tau_p})_{t \in \mathbb{R}^+}$ soit une martingale relative aux $\mathcal{F}_t$

D'après Fatou, on a

$$E(M_{t\wedge\tau_p}) = \lim_{p\to\infty} E(M_{t\wedge\tau_p}) \geq E(M_t)$$

puisque $M_{t\wedge\tau_p}$ converge vers M_t presque sûrement quand p tend vers $+\infty$.

b) $(M_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une surmartingale

On pose $M_s^k(\omega) = \inf(k, M_s(\omega))$ où $k \in \mathbb{N}$

M_s^k converge en croissant vers M_s

Soit $M^k_{s\wedge\tau_p} = \inf(k, M_{s\wedge\tau_p})$

alors $(M^k_{s\wedge\tau_p})_{s\in\mathbb{R}^+}$ est une surmartingale relativement aux $\mathcal{F}_s$.

$M^k_{s\wedge\tau_p}$ converge vers M_s^k dans L^1 en tant que processus bornés.

Soit $t > s$ et $F \in \mathcal{F}_s$

$$\int_F M_s \, dP = \lim_{k\to\infty} \int M_s^k \, dP = \lim_{k\to\infty} \lim_{p\to\infty} \int_F M^k_{s\wedge\tau_p} \, dP$$

$$\geq \lim_{k\to\infty} \lim_{p\to\infty} \int M^k_{t\wedge\tau_p} \, dP = \int_F M_t \, dP$$

Lemme 2.-

Soit $(M_t)_{t\in\mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}^c_{loc}$ et $M_t \geq 0$.

S'il existe $T > 0$ tel que $E(M_o) = E(M_t)$, alors $(M_t)_{t\leq T}$ est une martingale.

Démonstration :

$(M_t)_{t \leq T}$ est une surmartingale d'après le lemme 1 pour $t \leq T$ avec $E(M_o) \geq E(M_t) \geq E(M_T)$ et donc

$$E(M_t) = E(M_o)$$

Soit $F \in \mathcal{F}_s$ et $s < t$.

$$\int_F M_t \, d\, P \leq \int_F M_s \, d\, P \quad \text{et} \int_{F^c} M_t \, d\, P \leq \int_{F^c} M_s \, d\, P$$

d'où

$$\int_F M_t \, d\, P = \int_F M_s \, d\, P \quad (\text{puisque } E(M_s) = E(M_t))$$

II - LE PROCESSUS Z^λ .-

$(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est supposée continue à droite, M et **A** désignent deux processus réels, continus, adaptés aux $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, A étant croissant et nul en 0.

Pour tout λ réel, on considère Z^λ défini par :

$$Z_t^\lambda = \exp\,(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} A_t)$$

On a le théorème 1 suivant démontré dans : ([3], voir aussi [2] - prop. 10 - p. 54).

Théorème 1 :

1) Il y a équivalence entre a) et b)

   a) $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}^c_{loc,2}$ et $< M,M > = A$.

   b) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ Z^λ est une martingale locale, relativement aux tribus $\mathcal{F}_t$.

2) Si $M \in \mathcal{M}^c_{loc,2}$ et $< M,M > = A$ et si pour tout t

$$E \left[\int_0^t \exp.(2\lambda M_s)\, d\, A_s\right] < \infty$$

alors $Z^\lambda \in \mathcal{M}_2^c$

Remarques : Soit $M_o = 0$

1) si la condition a) du théorème 1 est remplie, alors (lemme 1) Z^λ est une surmartingale et $E(Z_t^\lambda) \leq 1$ (ce qui démontre le théorème 1 de [1])

2) s'il existe $T > 0$ tel que $E(Z_T^\lambda) = 1$, alors $(Z_t^\lambda)_{t \leq T}$ est une martingale (lemme 2)

3) si $Z^\lambda \in \mathcal{M}^c_{loc,2}$ pour tout $\lambda \in]-a,+a[$, $a > 0$ et si $E(A_t) < \infty$ alors, d'après la proposition 1, et d'après le a) $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}_2^c$

Théorème 2 : [[1] , théorème 2, page 3]

Soit $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, $(A_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ satisfaisant à la condition a) du théorème 1, avec $M_o = 0$

S'il existe a tel que pour tout t $E[\exp a^2 A_t] < \infty$

a) Z^λ est une martingale pour tout λ tel que $\lambda^2 < 2\, a^2$

b) Z^λ est une martingale de carré intégrable pour tout λ tel que $\lambda^2 \leq \dfrac{a^2}{3 + 2\sqrt{2}}$

Démonstration du a)

D'après le théorème 1, Z^λ est une martingale locale. On considère alors une suite croissante de temps d'arrêts τ_n avec $\tau_n \nearrow +\infty$ avec n , tels que $(Z^\lambda_{t \wedge \tau_n})_{t \in \mathbb{R}^+}$ soit une martingale relative aux $\mathcal{F}_t$.

On va montrer que la condition $E[\exp(a^2 A_t)] < \infty$ assure que $\sup_n E[(Z^\lambda_{t\wedge\tau_n})^{1+\varepsilon}] < \infty$ pour un $\varepsilon > 0$ et pour $\lambda^2 < 2\, a^2$. Cela nous donnera l'équiintégrabilité de $(Z^\lambda_{t\wedge\tau_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et donc la martingalité de Z^λ en utilisant le lemme 2.

$$E\left[(Z^{\lambda}_{t\wedge\tau_n})^{1+\varepsilon}\right] = E\left[\exp(1+\varepsilon)\,\lambda\, M_{t\wedge\tau_n} - \frac{(1+\varepsilon)}{2}\,\lambda^2 A_{t\wedge\tau_n}\right]$$

$$E\left[(\exp\left(\frac{p(1+\varepsilon)}{p}\,\lambda\, M_{t\wedge\tau_n} - \frac{p^2(1+\varepsilon)^2}{2\,p}\,\lambda^2 A_{t\wedge\tau_n}\right)\right.$$

$$\left. \times \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\,(p(1+\varepsilon)^2-(1+\varepsilon))A_{t\wedge\tau_n}\right)\right]$$

$$\leq \left(E\left[\exp(p(1+\varepsilon)\lambda\, M_{t\wedge\tau_n} - \frac{p^2(1+\varepsilon)^2\lambda^2}{2}\, A_{t\wedge\tau_n})\right]\right)^{1/p}$$

$$\left(E\left[\exp(\frac{\lambda^2}{2}\,(1+\varepsilon)(p(1+\varepsilon)-1)q\, A_{t\wedge\tau_n})\right]\right)^{1/q}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$A_{t\wedge\tau_n}$ est croissante en n et de plus :

$$\left(E\left[\exp\,(p(1+\varepsilon)\,\lambda\, M_{t\wedge\tau_n} - \frac{p^2(1+\varepsilon)^2\,\lambda^2}{2}\, A_{t\wedge\tau_n}\right]\right)^{1/p} =$$

$$(E(Z^{p(1+\varepsilon)\lambda}_{t\wedge\tau_n}))^{1/p}$$

Comme nous pourrons choisir p, ε, indépendamment de τ_n, on peut supposer que les temps d'arrêts τ_n sont tels que

$$E\,(Z^{p(1+\varepsilon)\lambda}_{t\wedge\tau_n}) = 1$$

On déduit alors de ce qui précède que :

$$E\left[(Z^{\lambda}_{t\wedge\tau_n})^{1+\varepsilon}\right] \leq \left(E\left[\exp(\frac{\lambda^2}{2}\,(1+\varepsilon)(p(1+\varepsilon)-1)q\, A_t)\right]\right)^{1/q}$$

Examinons le terme de droite et montrons que l'on peut trouver $\varepsilon > 0$, p, q tels que :

$$\frac{\lambda^2}{2}\,(1+\varepsilon)(p(1+\varepsilon)-1)q \leq a^2$$

$\frac{\lambda^2}{2} < a^2$ implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que $a^2 - \frac{\lambda^2}{2} = \delta\,\frac{\lambda^2}{2}$.

La condition requise devient alors :

$$(1+\varepsilon)\ (p(1+\varepsilon)-1)q \leq 1+\delta$$

d'où $\dfrac{\varepsilon\, q + 1 + (1+\varepsilon)\varepsilon\, q^2}{q-1} \leq \delta$

Posons $q = \dfrac{2+\delta}{\delta}$. On obtient l'inégalité voulue dès que

$\varepsilon\ (1+\varepsilon) \leq \dfrac{\delta^2}{(2+\delta)\ \delta + (2+\delta)^2}$

c.q.f.d.

Démonstration du b)

On reprend la même démonstration en recherchant un intervalle pour λ tel que :

(1) $\sup_n E\left[(Z^\lambda_{t\wedge\tau_\wedge})^2\right] \leq E\ (\exp a^2\ A_t)$

Cette inégalité nous assurera $(Z^\lambda_t)^2$ intégrable (puisque $(Z^\lambda_{t\wedge\tau_n})^2_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous martingale convergeant presque sûrement vers $(Z^\lambda_t)^2$).

Dans le cours de la démonstration du a), nous avons vu que la condition (1) est impliquée par (1')

$\frac{\lambda^2}{2}(1+\varepsilon)(p(1+\varepsilon)-1)\ q \leq a^2$ avec ici $\varepsilon = 1$

En posant $\frac{a^2}{\lambda^2} = k$ et $p = \frac{q}{q-1}$, on obtient :

$q^2 + (1-k)\ q + k \leq 0$

On montre que l'on peut prendre $q = 1+\sqrt{2}$ ce qui implique $k \geq 2+2\sqrt{2}$.

Remarque :

La condition $E\left[\exp(a^2 A_t)\right] < \infty$ implique que $(M_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale de carré intégrable (prop. 1)

Corollaire :

Soit $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus réel, élément de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R},\ell)$ (c'est à dire tel que $\int_0^t \alpha_s^2\ ds$ soit fini P p.s., et α_t - $\mathcal{F}_t$ mesurable), $(\beta_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ mouvement brownien réel.

$(Z_t^\lambda)_{t\in\mathbb{R}^+} = (\exp[\lambda\int_0^t \alpha_u \, d\beta u - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t \alpha_u^2 \, du])_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une surmartingale d'espérance inférieure ou égale à 1.

Si $E(\exp[a^2 \cdot (\int_0^t \alpha_u^2 \, du)]) < \infty$ alors Z^λ est une martingale d'espérance égale à 1, pour λ tel que $\lambda^2 < 2a^2$

Ce résultat est conséquence immédiate de ce qui précède puisque $(\int_0^t \alpha_u \, d\beta u)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale locale, de processus croissant associé $(\int_0^t \alpha_u^2 \, du)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Remarque :

La condition $E[\exp a^2 (\int_0^t \alpha_u^2 \, du)]$ est en particulier réalisée si le processus $(\alpha_u)_{u\in\mathbb{R}^+}$ est borné.

2 applications des théorèmes 1 et 2

Proposition 2 : ([1] , théorème 5, p. 32)

Soit $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ processus réel de l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R},\ell)$, indépendant de $(\beta_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ pour chaque t.

Alors Z^λ , tels que $Z_t^\lambda =$ $\exp(\lambda\int_0^t \alpha_u \, d\beta u - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t \alpha_u^2 \, du)$ est une martingale.

Démonstration :

Soit $(\Omega',\mathcal{F}',P')$ identique à $(\Omega,\mathcal{F},P)$ et $(\bar\Omega,\bar{\mathcal{F}},\bar P) = (\Omega \times \Omega', \mathcal{F}\otimes\mathcal{F}', P\otimes P')$.

Soit de même $\bar{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}'_t$

Sur $(\bar\Omega,\bar{\mathcal{F}},\bar P)$, on définit les processus :

$\bar\beta_t(\bar\omega) = \beta_t(\omega)$ où $\bar\omega = (\omega,\omega')$

$\bar\alpha_t(\bar\omega) = \alpha_t(\omega')$

On a $\bar P[\int_0^t \bar\alpha_u^2(\bar\omega) \, du < \infty] = P'[\int_0^t \alpha_u^2(\omega') du < \infty] = 1$

d'où $(\bar{\alpha}_t)_{t \in \mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R},\ell)$

On a, par conséquent, :

$$\bar{E}\left[\exp(\lambda \int_0^t \bar{\alpha}_u \, d\,\bar{\beta}_u - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \alpha_u^2 \, du)\right] \leq 1$$

où $\bar{E}$ désigne l'espérance relative à $\bar{P}$

or : $\bar{E}\left[\exp(\lambda \int_0^t \bar{\alpha}_u \, d\,\bar{\beta}_u - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \bar{\alpha}_u^2 \, du)\right]$

$$= \int_{\Omega'} \left(\int_{\Omega} \exp(\lambda \int_0^t \alpha_u(\omega')d\beta_u(\omega) - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \alpha_u^2(\omega')du) P(d\omega)\right) P'(d\omega')$$

or $\int_0^t \alpha_u^2(\omega')du < \infty \quad P'.p.s.$

d'où $\exp a^2 (\int_0^t \alpha_u^2(\omega')du) < \infty \qquad P'.p.s.$

ce qui implique :

$$\int_{\Omega} \exp(a^2 \int_0^t \alpha_u^2(\omega')du) P(d\omega) < \infty \qquad P'.p.s.$$

et, d'après le théorème 2, :

$$\int_{\Omega} \exp(\lambda \int_0^t \alpha_u(\omega')d\beta_u(\omega) - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \alpha_u^2(\omega')du) P(d\omega) = 1$$

$$\bar{E}\,(Z_t^\lambda) = 1$$

Z^λ est donc une martingale d'après le lemme 2.

<u>Proposition 3</u> :

Soit $(\beta_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien normalisé à n dimensions.

Soit $(a_t^{ij})^{i,j}$ matrice (n,m) semi définie positive et soit $\lambda \in \mathbb{R}^m$, avec $\forall\, i \; \forall\, j \;\; P\left[\int_0^t (a_u^{ij})^2 du < \infty\right] = 1$

(On désignera la matrice $(a_t^{ij})^{i,j}$ par a_t

Soit Z^λ défini par :

$$Z_t^\lambda = \exp\left[< \lambda \, , \int_0^t a_u d\,\beta_u > - \frac{1}{2} \int_0^t < \lambda, a_u\, a_u^* \lambda > du \right]$$

$(Z_t^\lambda)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une martingale locale (relativement toujours aux $\mathcal{F}_t$).

Démonstration :

Le résultat est immédiat, puisque

$< \lambda, \int_0^t a_u \, d\, \beta_u >_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une martingale locale réelle, de processus croissant associé $\int_0^t < \lambda, a_u a_u^* \lambda > du$

(Voir par exemple [2] , th. 3 et th. 4 - p. 34 et suivantes du chapitre 4).

Enfin, le théorème 2 montre que Z^λ est une martingale dès qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$E \left[\exp\left(\left(\frac{1}{2} + \delta\right) \int_0^t < \lambda , a_u a_u^* \lambda > du\right)\right] < \infty$$

III - THEOREME DE GIRSANOV.-

Le théorème suivant est une généralisation d'un théorème donné dans ([1] - th. 3 - p. 11 et suivantes).

Théorème 3.- (Théorème de Girsanov)

Soit $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ une P-martingale locale réelle, de processus croissant associé $(A_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, définis sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$, relativement à la famille croissante de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$.

Soit $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un processus réel défini sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$, appartenant à $\mathcal{M}_2(A,\mathbb{R})$, et satisfaisant à :

(1) : $E(Z_t)_{0 \leq t \leq T} = 1$ avec $Z_t = \exp \left[\int_0^t \alpha_u \, d\, M_u - \frac{1}{2} \int_0^t \alpha_u^2 d\, A_u\right]$

alors sur l'intervalle $[0,T]$

Le processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$, $X_t = - \int_0^t \alpha_u \, d\, A_u + M_t$

est une Q_T-martingale locale définie sur $(\Omega,\mathcal{F}_T,Q_T)$ relativement à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ de tribus, de processus croissant $(A_t)_{0 \leq t \leq T}$ avec :

Q_T absolument continu par rapport à P

On a : $\frac{dQ_T}{dP} = Z_T$ et plus généralement pour tout $u \leq T$

$E\left[\frac{dQ_T}{dP} \neq | \mathcal{F}_u\right] = Z_u$

Lemme 3.-

Soit sur $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ la mesure Q_t de densité Z_t, alors Q_t est une probabilité équivalente à la restreiction de P à $\mathcal{F}_t$.

Démonstration.-

La condition (1) ssure que Q_t est une probabilité, et même puisque Z_t est une P-martingale, on a, pour $s < t$,

$$\left[\frac{dQ_t}{dP} \mid \mathcal{F}_s\right] = Z_s$$

il reste donc à montrer que $P << Q_t$

Pour cela, il suffit de remarquer que $P\,[Z_t = 0] = 0$

ce qui est évident puisque Z_t est une exponentielle.

Démonstration du théorème.-

On considère le processus $(\zeta_t^\lambda)_{t \in \mathbb{R}^+}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

$$\zeta_t^\lambda = \exp\left(-\lambda \int_0^t \alpha_u \, d\,Au + \lambda\, Mt - \frac{\lambda^2}{2} A_t\right)$$

Soit $\varphi_t^\lambda = \exp\left(\int_0^t (\alpha_u + \lambda)\, dMu - \frac{1}{2}\int_0^t (\alpha_u + \lambda)^2 dAu\right)$

$(\varphi_t^\lambda)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une P - martingale locale, puisque $(\alpha_u + \lambda)_{u \in \mathbb{R}^+} \in M_2$ et que $\left(\int_0^t (\alpha_u + \lambda)\, dMu\right)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une P - martingale locale de processus croissant $\left(\int_0^t (\alpha_u + \lambda)^2 d\,A\,u\right)_{t \in \mathbb{R}^+}$

De plus, on a : $\varphi_t^\lambda = \zeta_t^\lambda Z_t$

On considère une suite $(\Theta_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de temps d'arrêts tels que

$\Theta_p = \inf\{t \mid \varphi_t^\lambda \geq p,\ {}_t^\lambda \geq p,\ Z_t \geq p\}$

Θ_p croît vers $+\infty$ avec p car φ_t^λ, ζ_t^λ, Z_t sont finis presque sûrement.

Soit $(\theta'_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite croissante vers $+\infty$ de temps d'arrêts, telle que $(\varphi^\lambda_{t\wedge\theta'_p})_{t \in \mathbb{R}^+}$ soit une P - martingale.

On considère alors $\tau_p = \theta_p \wedge \theta'_p$

$(\tau_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante vers $+\infty$ de temps d'arrêt et $(\varphi^\lambda_{t\wedge\tau_p})_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une p - martingale.

Soit $F \in \mathcal{F}_{t\wedge\tau_p}$. On obtient :

$$\int_F Z_{t\wedge\tau_p} \, \xi^\lambda_{t\wedge\tau_p} \, d\,P = \int_F \varphi^\lambda_{t\wedge\tau_p} \, d\,P$$

Pour $\tau_q > \tau_p$ on a :

$$\int_F Z_{t\wedge\tau_p} \, \xi^\lambda_{t\wedge\tau_p} \, d\,P = \int_F Z_{t\wedge\tau_q} \, \xi^\lambda_{t\wedge\tau_p} \, d\,P$$

car $(Z_{t\wedge\tau_p})_{p\geq 0}$ est $\mathcal{F}_{t\wedge\tau_p}$ - martingale.

Soit à partir de maintenant $s < T$, $t \leq T$

Comme $Z_{t\wedge\tau_q}$ converge vers Z_t dans $\mathbb{L}^1$ lorsque $q \to \infty$ et que $\xi^\lambda_{t\wedge\tau_p}$ est borné, on a :

$$\int_F Z_{t\wedge\tau_p} \, \xi^\lambda_{t\wedge\tau_p} \, dP = \int_F \lim_q (Z_{t\wedge\tau_q}) \, \xi^\lambda_{t\wedge\tau_p} dP = \int_F Z_t \, \xi^\lambda_{t\wedge\tau_p} \, dP$$

d'où $$\int_F Z_t \, \xi^\lambda_{t\wedge\tau_p} \, dP = \int_F \varphi^\lambda_{t\wedge\tau_p} \, dP$$

mais
$$\int_F Z_t \, \xi^\lambda_{t\wedge\tau_p} \, dP = \int_F \xi_{t\wedge\tau_p} \, d\,Q_T$$

et pour $s > t$

$$\int_F \xi^\lambda_{s\wedge\tau_p} \, dQ_T = \int_F \varphi^\lambda_{s\wedge\tau_p} \, dP = \int_F \varphi^\lambda_{t\wedge\tau_p} dP = \int_F \xi^\lambda_{t\wedge\tau_p} \, dQ_T$$

$(\mathcal{Y}^{\lambda}_{t\wedge\tau_p})_{0\leq t\leq T}$ est donc une Q_T - martingale relativement aux $(\mathcal{F}_{t\wedge\tau_p})_{0\leq t\leq T}$. D'après le lemme 4, (dont la démonstration suit) $(\mathcal{Y}^{\lambda}_{t\wedge\tau_p})_{0\leq t\leq T}$ est donc aussi une Q_T - martingale relativement aux $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. D'après le théorème 1, $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est alors une Q_T - martingale locale, de processus croissant $(A_t)_{0\leq t\leq T}$.

Lemme 4.-

Si $(M_{t\wedge\tau_p})_{0\leq t\leq T}$ est une martingale relative à $\mathcal{F}_{t\wedge\tau_p}$, c'est aussi une martingale relative aux $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$.

Démonstration.-

Soit $F\in\mathcal{F}_s$ $s<t$

$$\int_F M_{s\wedge\tau_p}\,dP = \int_{F\cap[\tau_p\leq s]} M_{s\wedge\tau_p}\,dP + \int_{F\cap[\tau_p>s]} M_{s\wedge\tau_p}\,dP$$

Sur $[\tau_p\leq s]$ $M_{s\wedge\tau_p} = M_{\tau_p} = M_{t\wedge\tau_p}$ et $F\cap[\tau_p\leq s]\in\mathcal{F}_s$

donc

$$\int_{F\cap[\tau_p\leq s]} M_{s\wedge\tau_p}\,dP = \int_{F\cap[\tau_p\leq s]} M_{t\wedge\tau_p}\,dP$$

Enfin, $F\cap[\tau_p>s]\in\mathcal{F}_{s\wedge\tau_p}$

d'où $$\int_{F\cap[\tau_p>s]} M_{s\wedge\tau_p}\,dP = \int_{F\cap[\tau_p>s]} M_{t\wedge\tau_p}\,dP$$ c.q.f.d.

Corollaire du théorème 3 : (immédiat)

Soit $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}_2(\ell;\mathbb{R})$

Soit $(\beta_t)_{0\le t\le T}$ mouvement brownien réel normalisé,

et supposons que $E(Z_t)=1$ pour tout $t \le T$ avec :

$$\exp\left[\int_0^t \alpha_u \, d\beta u - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_u^2 \, du\right] = Z_t$$

alors le processus $((\xi_t)_{0\le t\le T}, \mathcal{F}_t, Q_T)$, où

$\xi_t = -\int_0^t \alpha_u \, d\beta u + \beta_t$, et où $\frac{dQ_T}{dP} = Z_T$, est un mouvement brownien.

(C'est une application immédiate du théorème précédent puisqu'alors $(\xi_t)_{0\le t\le T}$ est une martingale locale de processus croissant égal à t. C'est donc un mouvement brownien).

(Voir par exemple : ([2] th. 9 - chap. 4 - p. 56).

Application : Formule de Cameron-Martin

Théorème : Soit les équations différentielles :

(1) : $d X_t = \sigma(t,X_t)\, d\beta_t + b(t,X_t)\, dt$

(2) : $d X_t = \sigma(t,X_t)\, d\beta_t$

avec

a) $\sigma(t,X_t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R},\ell)$

b) $b(t,X_t) \in \mathcal{M}_2(R,\ell)$

c) $\sigma(t,X_t) \ge c > 0$ P.p.s.

d) $E\left[\exp\left[\int_0^t b(u,X_u)\sigma^{-1}(u,X_u)d\beta_u - \frac{1}{2}\int_0^t b^2(u,X_u)\sigma^{-2}(u,X_u)du\right]\right]=1$

Si $(\Omega,\mathcal{F}_t,\beta_t,P,X_t)$ est solution de (2), alors $(\Omega,\mathcal{F}_t,\hat{\beta}_t,Q_t,X_t)$ est solution de (1).

avec $\frac{dQ_t}{dP} = Z_t = \exp \left[\int_0^t b(u,X_u)\sigma^{-1}(u,X_u)d\beta u \right.$

$$\left. - \frac{1}{2} \int_0^t b^2(u,X_u)\sigma^{-2}(u,X_u)du \right]$$

$(\hat{\beta}_u, \mathfrak{F}_u)_{0\leq u\leq t}$ est un mouvement brownien défini sur $(\Omega,\mathfrak{F}_t,Q_t)$.

Démonstration.-

Posons $\hat{\sigma}_t(\omega) = \sigma(t,X_t(\omega))$, $\hat{b}_t(\omega) = b(t,X_t(\omega))$.

La condition donnée implique (th. 2) que Z_t est une P - martingale relative aux $\mathfrak{F}_t$. Les probabilités Q_t de densité Z_t sont bien définies. On peut appliquer le corollaire du théorème de Girsanov.

Soit $(\hat{\beta}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, $\hat{\beta}_t = -\int_0^t \hat{b}_u\hat{\sigma}_u^{-1}\, du + \beta_t$

$(\hat{\beta}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement brownien sur $(\Omega,(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+},Q)$.

$(\beta_t) = \int_0^t \hat{b}_u\ \hat{\sigma}_u^{-1}\, du + \hat{\beta}_t$; on peut définir $\int_0^t \sigma_u\, d\,\beta_u$ relativement à $(\Omega,\mathfrak{F}_t,Q)$. On a alors :

$$\int_0^t \hat{\sigma}_u\, d\,\beta_u = \int_0^t \hat{\sigma}_u\, d\,\hat{\beta}_u + \int_0^t \hat{b}_u\, du$$

c'est à dire :

$$X_t = \int_0^t \sigma(u,X_u)d\hat{\beta}_u + \int_0^t b(u,X_u)du$$

$(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est donc bien solution de l'équation (1).

Références.-

[1] SHYRIAEV - LIPTSER
" Sur les processus stochastiques dont la mesure est équivalente à celle d'un mouvement brownien "
(Polycopié en 1970 - en Russe)

[2] M. METIVIER
" Processus de Markov " (Chap. IV) (Polycopié - 1972)
Université de RENNES -

[3] DUFLO
" Intégrale stochastique " - Cours de 3ème cycle - 1970