PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

MICHEL MÉTIVIER

Mesures vectorielles et intégrale stochastique

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 2
« Probabilités », , p. 16-51
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___2_16_0>

SEMINAIRE DE PROBABILITES

Année 1972

MESURES VECTORIELLES ET INTEGRALE STOCHASTIQUE

ar Michel METIVIER

I - MESURES VECTORIELLES ET INTEGRATION.-

CHAPITRE I

MESURES VECTORIELLES - INTEGRATION

Le but de ce chapitre est de rassembler de façon autonome les notions sur les mesures vectorielles qui nous seront utiles dans la suite pour l'intégrale stochastique.

La nécessité d'envisager des mesures non bornées conduit à définir les mesures sur un δ - anneau de parties d'un ensemble Ω et non sur un σ anneau, ou une tribu comme dans le cas des mesures réelles (cf. [5]). La plupart des résultats de ce chapitre sont contenus dans [4] . Celui relatif aux prolongements est dans [5] .

La théorie de l'intégration a été réduite à ce qui sera utile au chapitre II, et au chapitre III.

MESURES VECTORIELLES - INTEGRATION

I - MESURES -

1 - Mesures à valeurs dans un espace de Banach. -

1-1 Définition 1

Soit $\mathfrak{A}$ un δ anneau de parties d'un ensemble Ω , et soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriel localement convexe . On appelle mesure sur $\mathfrak{A}$, à valeurs dans $\mathbb{V}$, toute application σ additive de $\mathfrak{A}$ dans $\mathbb{V}$. Autrement dit, m , application de $\mathfrak{A}$ dans $\mathbb{V}$ est une mesure vectorielle si, m est additive, et si, pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathfrak{A}$, de réunion $A = \bigcup_n A_n \in \mathfrak{A}$, on a $m(A) = \sum_n m(A_n)$, la somme étant prise au sens de la topologie donnée sur $\mathbb{V}$.

A priori, la notion de σ - additivité dépend donc de la structure localement convexe considérée sur $\mathbb{V}$. Si $\mathbb{V}$ est un espace de Banach, on peut considérer sur $\mathbb{V}$ la structure localement convexe définie par la norme, aussi bien que la structure localement convexe faible (définie par les semi - normes $x \rightsquigarrow |\langle x, x' \rangle|$ où $x' \in \mathbb{V}'$, dual de $\mathbb{V}$). On a cependant le théorème suivant dû à Pettis (cf. [8] . IV - 10 - 1).

1-2 Théorème 1

Toute mesure σ - additive sur $\mathfrak{A}$ pour la topologie faible est σ - additive pour la norme , et réciproquement.

Démonstration :

On suppose que m est σ - additive pour la topologie faible, non σ - additive pour la norme et on va en déduire une contradiction.

Si m n'est pas σ - additive pour la norme, il existe un $\delta > 0$ et une suite décroissante (A_n) extraite de $\mathcal{C}$ (même raisonnement que pour les mesures réelles) telle que

$$\bigcap_n A_n = \emptyset \quad \text{et} \quad m(A_n) = \delta \quad \text{pour tout } n$$

Considérons alors le σ - anneau $\widetilde{\mathcal{C}}$ engendré par $\{A_n\}$, et le plus petit sous espace fermé de $\mathcal{V}$ contenant $\{m(A) : A \in \mathcal{C}'\}$. Il va immédiatement résulter du lemme suivant que ce sous espace fermé $\widetilde{\mathcal{V}}$ est séparable.

Lemme 1 :

Soit m une mesure définie sur un σ - anneau $\mathcal{T}$, engendrée par un anneau $\mathcal{A}$, à valeurs dans un espace localement convexe E. Alors $\{ m(B) : B \in \mathcal{T}\}$ est inclus dans l'enveloppe convexe fermée dans E de $\{ m(B) : B \in \mathcal{A} \}$.

Démonstration du lemme :

Un principe classique de prolongement par mesurabilité montre que pour toute forme linéaire continue x' sur E et tout réel α

$$\inf_{B \in \mathcal{A}} < m(B) , x' > \ \geq \alpha$$

on a

$$\inf_{B \in \mathcal{T}} < m(B) , x' > \ \geq \alpha$$

le lemme en résulte.

Soit alors (x'_n) une suite extraite de la boule unité de $\mathbb{V}'$ telle que

$$\forall\, n \quad |< m\,(A_n)\ ,\ x'_n >| \geq \frac{\delta}{2}$$

En raison de la métrisabilité de $\tilde{\mathbb{V}}$ et de la compacité faible de la boule unité de $\mathbb{V}'$, on peut extraire de (x'_n) une sous suite (x'_{n_k}) telle que

$$\forall\, A \in \tilde{\mathcal{C}} \quad , \text{ la suite } \quad (< m(A)\ ,\ x'_{n_k} >)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{converge.}$$

Il résulte d'un théorème classique de Nikodym (cf. [ ] III - 7-4) (cf. également le théorème de " Vitali-Halm-Sachs" de [4] IV-2), que

$$\lim_n \ \sup_k \ |< m\,(A_n)\ ,\ x'_{n_k} >| = 0$$

ce qui contredit

$$\forall\, k \qquad |< m\,(A_{x_k}),\ x'_{n_k} >| \geq \frac{\delta}{2}\ . \ \blacksquare$$

1-3 Théorème 2

Si m est une mesure vectorielle à valeurs dans un espace de Banach $\mathbb{V}$, pour tout A $\in \mathcal{C}$, l'ensemble

$$\{ m(B) : B \in \mathcal{C} , B \subset A \} \quad \text{est borné.}$$

Démonstration

Ce théorème est bien connu si $\mathbb{V} = \mathbb{R}$. Considérons alors une forme linéaire continue x' quelconque. L'application $B \rightsquigarrow \langle m(B) , x' \rangle$ est une mesure réelle en restriction à la tribu $\mathcal{C} \cap A$. L'ensemble$\{\langle m(B) , x' \rangle : B \in \mathcal{C} , B \subset A \}$ étant borné pour tout x', on en déduit le théorème d'après un résultat élémentaire sur les ensembles bornés d'un espace de Banach.

2 - Semi - variation - Variation -

2-1 Définition 2

Soit $\mathcal{P}_A$ l'ensemble des partitions finies de A $\in \mathcal{C}$, constituées d'éléments de $\mathcal{C}$. On pose, pour tout A $\in \mathcal{C}$:

$$||m|| (A) = \sup \{ || \sum_{B \in M} \alpha_B \, m (B) || : \alpha_B \in \mathbb{R} , | \alpha_B| \leq 1 , M \in \mathcal{P} \}$$

et

$$|m| (A) = \sup_{M \in \mathcal{P}_A} \sum_{B \in M} ||m (B)||.$$

La fonction $||m||$ est appelée semi - variation de m, et $| m |$ la variation.

2-2 Proposition 1

Soit $\hat{\mathcal{P}}_A$, l'ensemble des partitions finies ou infinies dénombrables de A $\in \mathcal{C}$, constituées d'éléments de $\mathcal{C}$. On a, pour toute mesure m, sur $\mathcal{C}$, à valeurs dans l'espace de Banach $\mathbb{W}$:

$$| m |(A) = \sup \{ \sum_{B \in M} || m(B) ||: M \in \hat{\mathcal{P}}_A \}$$

Démonstration.

La relation

(2-2-1) $$| m |(A) \leq \sup' \{ \sum_{B \in M} ||m(B)|| : M \in \hat{\mathcal{P}}_A \}$$

est triviale.

Soit $M = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \hat{\mathcal{P}}_A$ et

(2-2-2) $$\alpha < \sum_i ||m (B_i)||$$

il existe n tel que

$$\alpha < \sum_{i=1}^{n} || m (B_i)||$$

Soit $M = \{B_i : i = 1\ldots n\} \cup \{ A - \bigcup_{i=1}^{n} B_i\} \in \hat{\mathcal{P}}_A$

(2-2-3) $$\alpha < \sum_{B \in M} || m (B)|| \leq |m| (A)$$

La proposition résulte de (2-2-1), (2-2-2) et (2-2-3).■

2-3 Proposition 2

$|m|$ est une mesure positive σ - additive sur $\mathcal{C}$.

Démonstration :

Soit α la relation d'ordre sur $\hat{\mathcal{P}}_A$ définie par

$M < M'$ si $\forall B' \in M'$, $\exists B \in M$ tel que $B' \subset B$

(On dira M' plus fin que M). $\hat{\mathcal{P}}_A$ est filtrant pour cet ordre et on voit immédiatement que l'application

$$\hat{\mathcal{P}}_A \ni M \Longrightarrow \sum_{B \in M} ||m (B)||$$

est croissante.

Soit $A_i \in \mathcal{C}$, $i \in D \subset \mathbb{N}$, les A_i étant disjoints deux à deux, et $A = \bigcup_{i \in D} A_i$. Soit $\alpha < |m|(A)$, et $M \in \mathcal{P}_A$ telle que

$$\alpha \leq \sum_{B \in M} ||m(B)||.$$

Soit $M' \in \hat{\mathcal{P}}_A$ plus fine que $\{A_i\}$. Comme $M' \cap A_i \in \mathcal{P}_{A_i}$ on a

$$\alpha \leq \sum_{B \in M'} ||m(B)|| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{B \in M' \cap A_i} ||m(B)|| \leq \sum_{i=1}^{n} |m|(A_i)$$

d'où :

(2-3-1) $$|m|(A) \leq \sum_i |m|(A_i).$$

Par ailleurs, si $M_i \in \mathcal{P}_{A_i}$, on a $\bigcup_i M_i \in \mathcal{P}_A$. Donc

(2-3-2) $$\sum_i |m|(A_i) = \sum_i \sup\{\sum_{B \in M_i} |m(B)| : M_i \in \mathcal{P}_{A_i}\}$$

$$\leq \sup\{\sum_{B \in M} |m(B)| : M \in \mathcal{P}_A\} = |m|(A).$$

La proposition résulte de (2-3-1) et (2-3-2). ∎

2-4 <u>Proposition 3</u>

1°) $\forall A \in$ $||m(A)|| \leq ||m||(A) \leq |m|(A)$

2°) $\forall A \in$ $||m||(A) \leq 2 \sup\{||m(B)|| : B \subset A, B \in \}$

3°) $||m||$ est croissante et dénombrablement sous - additive (i.e. : $\forall (A_n)$ extraite de

$||m||(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n ||m||(A_n)$.

<u>Démonstration</u>.-

1°) est trivial à partir des définitions

2°) on voit facilement que, lorsque $\mathbb{W} = \mathbb{R}$,

$$||m||(A) = |m|\ (A) = \sup\{\ |m(B)|+|m\ (\complement B)|\ :\ B \in \mathcal{C},\ B \subset A\}$$

$$\leq 2 \sup\{|m(B)|\ :\ B \in \mathcal{C},\ B \subset A\}$$

D'où :

$$||m||(A) = \sup\{|\sum_{B \in M} \alpha_B <m(B),x'>|\ :\ x' \in V',||x'|| \leq 1\ |\alpha_B| \leq 1, M \in \mathcal{P}\}$$

$$\leq \sup\{\sum_{B \in M} |< m(B),x' >|\ :\ x' \in \mathbb{W}'\ ,||x'|| \leq 1\ ,\ M \in \mathcal{P}\}$$

$$\leq 2 \sup\{|<m(B)\ ,\ x'>|\ :\ B \in \mathcal{C},\ B \subset A\ ,\ ||x'|| \leq 1\}$$

$$\leq 2 \sup\{||m(B)||:\ B \in \mathcal{C}.\ B \subset A\}$$

3°) Le fait que $||m||$ soit croissante résulte trivialement de la définition.

En outre, en introduisant comme ci dessus les mesures réelles $< m, x' >$, on a

$$||m||(\bigcup_n A_n) \leq \sup_{||x'|| \leq 1} |< m, x' >|(\bigcup_n A_n).$$

et, d'après la proposition 2

$$||m||(\bigcup_n A_n) \leq \sup_{||x'|| \leq 1} \sum_n |<m,x'>|\ (A_n)$$

$$\leq \sup_{||x'|| \leq 1} \sum_n \sup_{M \in \mathcal{P}_{A_n}} \sum_{B \in M} |<m(B),x'>|$$

$$\leq \sum_n \sup_{M \in \mathcal{P}_{A_n}} ||\sum m(B)|| = \sum_n ||m||\ (A_n)\ . \ \blacksquare$$

2-5 Remarque.-

La plupart des mesures que nous rencontrerons dans la suite ne seront pas de variation finie : pour tout $A \in \mathcal{C}$, $A \neq \emptyset$ on aura $|m|(A) = +\infty$.

Par contre, d'après la proposition 3 - 2°) la variation est une fonction finie sur $\mathcal{C}$. L'importance de cette fonction est soulignée par le théorème suivant.

2-6 Théorème 3.-

Soit $A \in \mathcal{C}$, et $\mathcal{W}$ un espace de BAnach.

1°) Soit $\mathcal{M}_A$ l'espace vectoriel des mesures vectorielles, à valeurs dans $\mathcal{W}$, définies sur $\mathcal{C} \cap A$. C'est un espace de Banach pour la norme $m \rightsquigarrow ||m||(A)$.

2°) Si (m_n) est une suite de mesures telle que $\forall A \in \mathcal{C}$, $\lim_n m_n(A) = m(A)$ existe dans $\mathcal{W}$, m est une mesure à valeurs dans $\mathcal{W}$.

Démonstration.

Que $p : m \rightsquigarrow ||m||(A)$ soit une semi norme sur $\mathcal{M}_A$, se vérifie immédiatement à partir de la définition. Que ce soit une norme résulte de la prop. 3 - 1°).

Enfin, si (m_n) est une suite de Cauchy pour cette norme, la majoration

$$\forall B \in \mathcal{C} \cap A \qquad ||m_n(B) - m_{n'}(B)|| \leq ||m_n - m_{n'}||(B) \leq p(m_n - m_{n'})$$

montre que

$$\forall B \in \mathcal{C} \cap A \qquad m(B) = \lim_n m_n(B) \quad \text{existe.}$$

Pour tout $x' \in \mathcal{W}'$

$$B \rightsquigarrow \langle m(B), x' \rangle = \lim_n \langle m_n(B), x' \rangle$$

est une mesure réelle d'après le théorème de Nikodym (cf. [4] III - 7-4) ou de Vitali Hahn Sachs (cf. [7] IV-2).

D'après le théorème 1, m est une mesure sur $A \in \mathcal{A}$. En outre

$$p(m - m_n) = \|m - m_n\|(A) \leq 2 \sup_{B \subset A} \|m(B) - m_n(B)\|$$

$$\leq 2 \sup_{B \subset A} \|\lim_{n'} m_{n'}(B) - m_n(B)\|$$

$$\leq 2 \sup_{n' \geq n} p(|m_n - m_{n'}|)$$

La convergence de (m_n) vers m pour la norme p, résulte donc de ce que la suite (m_n) est de Cauchy pour cette norme.
La deuxième assertion du théorème est prouvée dans le cours de la démonstration du 1°). ■

3 - Propriété de domination des mesures vectorielles. Ensemble des valeurs.

3-1 Théorème 4.-

Soit (m_n) une suite de mesures vectorielles sur une tribu $\mathcal{T}$ à valeurs dans un espace de Banach $\mathbb{V}$ telle que $\lim_n m_n(A)$ existe $\forall A \in \mathcal{T}$.

1°) L'ensemble des mesures réelles :
$\{\langle m_n, x' \rangle : x' \in \mathbb{V}', \|x'\| \leq 1 \ n \in \mathbb{N}\}$
est une partie relativement faiblement compacte de l'espace de Banach $\mathfrak{M}$, des mesures réelles bornées sur $\mathcal{T}$.

2°) Cet ensemble de mesures réelles est un ensemble équi - absolument continu, par rapport à une mesure positive convenable μ. La mesure μ peut d'ailleurs être choisie de telle sorte que pour tout $A \in \mathcal{T}$

$$\mu(A) \leq \sup_{n, x'} |\langle m_n(A), x' \rangle|$$

Démonstration :

1°) D'après le théorème d'Eberlein, il suffit de montrer que, pour toute suite (μ_n) extraite de (m_n) et toute suite (x'_n) extraite de la boule unité de $\mathbb{V}'$, on peut extraire des sous suites (μ_{n_k}) et (x'_{n_k}) telles que la suite $(<\mu_{n_k}, x'_{n_k}>)_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $\mathcal{M}$. Quitte à extraire a priori une sous suite de la suite considérée, on peut évidemment soit supposer que (μ_n) est cofinale à (m_n) , soit que (μ_n) est stationnaire. Dans tous les cas, l'hypothèse selon laquelle $m(A)=\lim\limits_n \mu_n(A)$ existe pour tout $A \in \mathcal{T}$ est vraie. D'après le théorème 1 et le théorème de Nikodym, m est une mesure sur $\mathcal{T}$.

Remarquons que, d'après une variante du théorème de Vitali Hahn Sacks, (cf.[7] IV-2), pour tout x', la famille $\{<\mu_n(.),x'>\}$ est faiblement compacte dans $\mathcal{M}$, donc a fortiori bornée et $\sup\limits_n \sup\limits_{B\in\mathcal{T}} |<\mu_n(B),x'>| \leq \sup\limits_n || <\mu_n(.),x'>||_{\mathcal{M}} <+\infty$.

D'où l'on déduit que l'ensemble $\{\mu_n(B):B \in \mathcal{T} ,n\in \mathbb{N}\}$ est fortement borné dans $\mathbb{V}$, et que, par suite,

$$\sup_n ||\mu_n|| \leq 2 \sup \{||\mu_n(B)|| \quad : B \in \mathcal{T} \quad , n \in \mathbb{N} \} <+ \infty \quad .$$

Soit alors λ une mesure positive telle que les mesures réelles $(<\mu_n(.),x'_n>)$ soient absolument continues par rapport à λ , et soit f_n la densité de $<\mu_n,x'_n>$. Le problème que nous traitons est équivalent à celui de la compacité faible de $\{f_n\}$ dans $L^1 (\Omega,\mathcal{T},\lambda)$.

Comme dans $L^1 (\Omega,\mathcal{T},\lambda)$ on a

$$\sup_n ||f_n||_1 = \sup_n ||<\mu_n,x'_n>|| \leq \sup_n ||\mu_n|| < \infty$$

la compacité relative faible de $\{f_n\}$ est équivalente à l'équi-absolue continuité des applications $\nu_n : A \rightsquigarrow \int_A f_n \, d\lambda$.
(i.e. : $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\quad \lambda(A) < \delta \Longrightarrow \left|\int_A f_n \, d X\right| \leq \varepsilon$).

Supposons que les applications ν_n définies sur $\mathcal{T}$ ne soient pas équi absolument continues, il existe alors $\varepsilon > 0$ et une suite (A_k) et une suite croissante (n_k) d'entiers telles que

$$\lambda\ (A_k) \leq \frac{1}{k} \text{ et } \left| < \mu_{n_k}\ (A_k)\ x'_{n_k} > \right| > \varepsilon$$

Pour simplifier l'écriture, notons $\mu'_k = \mu_{n_k}$ $y'_k = x'_{n_k}$ et montrons que les deux relations

(3.1.1) $\quad \lambda\ (A_k) \leq \frac{1}{k} \qquad |< \mu'_k\ (A_k),\ y'_k > | > \varepsilon$

et

(3.2.2) $\quad \forall\ A \in \mathcal{T} \qquad \lim\limits_k\ \mu'_k\ (A) = m\ (A)$

sont contradictoires.

Raisonnant comme dans la démonstration du théorème 1, on peut, en désignant par $\tilde{\mathcal{T}}$ la tribu engendrée par (A_k), extraire une sous suite (y'_{k_r}) de (y'_k) telle que pour tout $A \in \tilde{\mathcal{T}}$ $\quad \lim\limits_n < m(A), y'_k >$ existe. Comme d'après (3.1.2)

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{||y'|| \leq 1} |<\mu'_k\ (A), y'> - <m(A), y'>| = 0$$

on en déduit

$$\forall\ A \in \tilde{\mathcal{T}} \qquad \lim_k \quad <\mu'_k\ (A), y'_k> = \lim_k \quad <m(A),\ y'_k>$$

Le théorème de Vitali Hahn Sachs appliqué à la suite $(<\mu'_k, y'_k>)_k$ de mesures réelles contredit alors (3.1.2). D'où la compacité.

2°) Un critère de compacité (cf. [7], IV-2) est précisément celui de l'existence d'une mesure μ positive telle que

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta$ tels que

$$A \in \mathcal{T} \quad \mu(A) \leq \delta \Longrightarrow \forall x' \in V' \ |<m_n(A), x'>| \leq \varepsilon .$$

Considérons l'ensemble $H = \{f_{x,x'}\}$ des densités des mesures réelles $< m_n, x' >$ par rapport à μ .

On a :

$$\forall f \in H \quad \forall A \in \mathcal{T} \quad \int_A \inf(1,|f|)\, d\mu \leq \frac{1}{2} \inf(\delta,\varepsilon) \Longrightarrow \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon$$

Soit $h \in L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ telle que

$h = \sup \text{ess} \{ \inf(1,|f|) : f \in H \}$

la mesure $h . \mu = \lambda$ possède les propriétés voulues :

$$\forall A \in \mathcal{T} \quad \lambda(A) = \sup_{h \in H} \left|\int_A f\, d\mu\right| = \sup_{x,x'} |<m_n(A), x'>|$$

et

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \quad \text{tels que } \lambda(A) \leq \eta \Longrightarrow \sup_{h \in H} \left|\int_A f\, d\mu\right| \leq \varepsilon .$$

3.2 Corollaire 1.-

Si m_n est une suite de mesures vectorielles sur un δ - anneau $\mathcal{C}$, telle que $\lim_n m_n(A)$ existe pour tout $A \in \mathcal{C}$, il existe une mesure positive, finie sur $\mathcal{C}$, λ , telle que

a) $\forall \varepsilon \ \exists \delta \quad \forall B \in \cap A \ \ \lambda(B) \leq \delta \Longrightarrow ||m_n||(B) \leq \varepsilon$

b) $\lambda(B) \leq \sup_n ||m_n(B)||$

Démonstration :

Le corollaire est conséquence immédiate du théorème et de la propriété

$$||m_n||(B) \leq 2 \sup \{||m_n(B')|| : B' \in \mathcal{T}, B' \in B\} .$$

Corollaire 2 :

Si m est une mesure vectorielle sur $\mathcal{C}$, $||m||$ est telle que, pour toute suite décroissante (A_n), on a :

$$\lim_n m(A_n) = 0 \Longleftrightarrow \lim_n ||m||(A_n) = 0$$

Démonstration :

L'implication $\Longleftarrow$ est triviale.

L'implication $\Longrightarrow$ résulte du raisonnement suivant : soit λ une mesure positive telle que $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta$

$$\lambda(A) \leq \varepsilon \longrightarrow ||m||(A) \leq \varepsilon$$

et

$$\lambda(A) \leq ||m(A)||$$

on a

$$\lim_n || m(A_n) || = 0 \longrightarrow \lim_n \lambda(A_n) = 0 \longrightarrow \lim_n || m||(A_n) = 0. \blacksquare$$

Le théorème de Vitali Hahn Sachs appliqué à la suite $(<\mu'_k, y'_k>)_k$ de mesures réelles contredit alors (3.1.2). D'où la compacité.

2°) Un critère de compacité (cf. [7], IV-2) est précisément celui de l'existence d'une mesure μ positive telle que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta$ tels que

$$A \in \mathcal{T} \quad \mu(A) \leq \delta \Longrightarrow \forall x' \in V' \ |< m_n(A), x' >| \leq \varepsilon .$$

Considérons l'ensemble $H = \{f_{x,x'}\}$ des densités des mesures réelles $< m_n, x' >$ par rapport à μ .

On a :

$$\forall f \in H \quad \forall A \in \mathcal{T} \quad \int_A \inf(1,|f|)\, d\mu \leq \frac{1}{2} \inf(\delta,\varepsilon) \Longrightarrow \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon$$

Soit $h \in L^1(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ telle que

$h = \sup \text{ess} \{ \inf(1,|f|) : f \in H \}$

la mesure $h \cdot \mu = \lambda$ possède les propriétés voulues :

$$\forall A \in \mathcal{T} \quad \lambda(A) = \sup_{h \in H} \left|\int_A f\, d\mu\right| = \sup_{x,x'} |<m_n(A),x'>|$$

et

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \quad \text{tels que } \lambda(A) \leq \eta \Longrightarrow \sup_{h \in H} \left|\int_A f\, d\mu\right| \leq \varepsilon .$$

3.2 <u>Corollaire 1</u>.-

Si m_n est une suite de mesures vectorielles sur un δ - anneau $\mathcal{C}$, telle que $\lim_n m_n(A)$ existe pour tout $A \in \mathcal{C}$, il existe une mesure positive, finie sur $\mathcal{C}$, λ , telle que

a) $\forall \varepsilon \ \exists \delta \quad \forall B \in \cap A \quad \lambda(B) \leq \delta \Longrightarrow ||m_n||(B) \leq \varepsilon$

b) $\lambda(B) \leq \sup_n ||m_n(B)||$

<u>Démonstration</u> :

Le corollaire est conséquence immédiate du théorème et de la propriété

$$||m_n||(B) \leq 2 \sup\{||m_n(B')|| : B' \in \mathcal{T},\ B' \in B\} .$$

<u>Corollaire 2</u> :

Si m est une mesure vectorielle sur $\mathcal{C}$, $||m||$ est telle que, pour toute suite décroissante (A_n), on a :

$$\lim_n m(A_n) = 0 \Longleftrightarrow \lim_n ||m||(A_n) = 0$$

<u>Démonstration</u> :

L'implication $\Longleftarrow$ est triviale.

L'implication $\Longrightarrow$ résulte du raisonnement suivant : soit λ une mesure positive telle que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta$

$$\lambda(A) \leq \varepsilon \longrightarrow ||m||(A) \leq \varepsilon$$

et

$$\lambda(A) \leq ||m(A)||$$

on a

$$\lim_n ||m(A_n)|| = 0 \longrightarrow \lim_n \lambda(A_n) = 0 \longrightarrow \lim_n ||m||(A_n) = 0. \blacksquare$$

3-3 Théorème 5

Soit m une mesure sur un δ - anneau $\mathcal{C}$, à valeurs dans un Banach $\mathbb{V}$. Pour tout $A \in \mathcal{C}$, l'ensemble

$$\{ m(B) : B \in \mathcal{C}, B \subset A \}$$

est faiblement relativement compact dans $\mathbb{V}$.

Démonstration

Soit λ une mesure positive, finie sur , ayant la propriété du corollaire 3-2.

Il est clair que l'application

$$\mathcal{C} \cap A \ni B \leadsto m(B)$$

se prolonge par linéarité aux fonctions étagées sur $\mathcal{C}$, nulles en dehors de A. On a évidemment , par définition de m,

$$||m(h)|| \leq ||h||_\infty \; ||m|| (A)$$

L'application m se prolonge donc en une application m linéaire continue de $L^\infty(\lambda)$ dans $\mathbb{V}$. Pour tout $x' \in \mathbb{V}'$ on a

$$< m(h), x'> = \int h \, d <m, x'> = \int h \frac{d< m,x'>}{d\lambda} \, d\lambda$$

Comme $\frac{d <m,x'>}{d\lambda}$ restreinte à A est λ intégrable, cette égalité exprime que m est continue de L^∞ dans $\mathbb{V}$ pour les topologies $\sigma(L^\infty,L^1)$, $\sigma(\mathbb{V},\mathbb{V}')$. L'image de $\{1_B : B \in \mathcal{C} \cap A'\}$ qui est relativement compactee pour $\sigma(L^\infty,L^1)$, par m , est donc relativement compacte dans $\mathbb{V}$ pour $\sigma(\mathbb{V},\mathbb{V}')$.

4 - Prolongement des fonctions σ - additives.-

Comme dans le cas réel on étudie la possibilité de prolonger une fonction d'ensembles σ - additive, définie sur un semi anneau $\mathcal{I}$, en une mesure sur le δ - anneau $\mathcal{C}$ engendré par $\mathcal{I}$.

4-1 Théorème 6 (cf. [5] chap. V et [9])

Soit m une fonction d'ensembles σ - additive définie sur un anneau $\mathcal{A}$, à valeurs dans un Banach $\mathcal{V}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a - m est prolongeable de façon unique en une mesure σ - additive sur le δ - anneau $\mathcal{C}$ engendré par $\mathcal{A}$

b - m $(\mathcal{A})$ est relativement faiblement compact dans $\mathcal{V}$.

c - il existe une mesure positive λ finie sur $\mathcal{C}$ telle que $\forall$ A $\in$, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta\quad \forall$ B $\in \mathcal{C} \cap$ A $\lambda\ (B) \leq \delta \Longrightarrow ||m\ (B)|| \leq \varepsilon$.

Démonstration.-

a $\Longrightarrow$ b d'après le théorème 5 précédent.

Montrons que b $\Longrightarrow$ a.

Pour tout $x' \in \mathcal{V}'$ considérons le prolongement σ - additif $m_{x'}$ de la fonction σ - additive réelle $<m, x'>$ définie sur . Par hypothèse, $m_{x'}$ est finie sur

$\cap$ A pour tout A $\in$, donc à fortiori, tout A $\in$.

La forme linéaire $x' \rightsquigarrow m_{x'}(A)$ est un élément que nous noterons m(A) du dual algébrique $\mathbb{V}'^{*}$ de $\mathbb{V}'$. Il nous reste à montrer que la mesure m, à valeurs dans $\mathbb{V}'^{*}$ ainsi définie, et σ - additive pour $\sigma(\mathbb{V}'^{*}, \mathbb{V}')$ est à valeurs dans $\mathbb{V}$. Or ceci résulte de la compacité relative faible de $\{m(B) : B \in \mathcal{A} \cap A\}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, et du lemme 1.

Comme l'enveloppe convexe fermée de $\{m(B) : B \in \mathcal{A} \cap A\}$ dans $\mathbb{V}$ pour $\sigma(\mathbb{V}, \mathbb{V}')$ est compacte, c'est également l'enveloppe convexe fermée de $\{m(B) : B \in \mathcal{A} \cap A\}$ dans $\mathbb{V}'^{*}$ pour

$\sigma\ (\mathbb{V}'^*, \mathbb{V}')$. D'où :

$$\forall\ B \in \mathcal{C} \cap A \qquad m(B) \in \mathbb{V}.$$

L'unicité du prolongement est conséquence de l'unicité des prolongements $<m, x'>$.

L'implication a $\Longrightarrow$ c est exprimée par le corollaire 3-2.

Pour montrer c $\Longrightarrow$ a , considérons l'anneau quotient $A \cap \mathcal{A}/_\lambda$ constitué des classes d'éléments de $\mathcal{A}$ égaux modulo λ , muni de la distance

$$d\ (B_1\ ,\ B_2) = \lambda\ (B_1 \Delta\ B_2) = \lambda(B_1 - B_2) + \lambda\ (B_2 - B_1)$$

L'application $B \rightsquigarrow m\ (B)$ restreinte à $A \cap \mathcal{A}$, définit une application $\widetilde{B} \rightsquigarrow \widetilde{m}\ (B)$ de $A \cap \mathcal{A}/_\lambda$ dans $\mathbb{V}$ et $\widetilde{m}$ est uniformément continue de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{V}$ en vertu de

$$||m\ (B_1) - m\ (B_2)|| = ||m\ (B_1 - B_2) - m\ (B_2 - B_1)||$$

$$\leq ||m\ (B_1 - B_2)|| + ||\ m\ (B_2 - B_1)||$$

et de

$$\lambda\ (B_1 \Delta\ B_2) \leq \delta \Longrightarrow \lambda\ (B_1 \setminus B_2) \leq \delta \quad \text{et } \lambda\ (B_2 \setminus B_1) \leq \delta\ .$$

Comme $\mathcal{A} \cap A/_\lambda$ est dense dans $\mathcal{C} \cap A/_\lambda$, m se prolonge en une application additive uniformément continue de $\mathcal{C} \cap A$ dans $\mathbb{V}$.

La continuité uniforme entraîne la σ - additivité. Il suffit de composer $\widetilde{m}$ avec la projection canonique $B \rightsquigarrow \widetilde{B}$ de $A \cap \mathcal{A}$ sur $\mathcal{A} \cap A/_\lambda$. ∎

II - INTEGRATION

1 - Intégrale des fonctions étagées sur $\mathfrak{C}$.

1-1 Notations.-

Dans ce qui suit, m sera une mesure vectorielle sur $\mathfrak{C}$, à valeurs dans l'espace de Banach $\mathbb{B}_1$

Soient $\mathbb{B}_2$ et $\mathbb{B}_3$ deux autres espaces de Banach, et b une application bilinéaire continue de norme 1 de $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ dans $\mathbb{B}_3$. On notera aussi

$$b\ (x,y) = (x|y).$$

$\mathbb{B}_2$ d'identifie ainsi, avec sa norme, à un sous espace de Banach de $\mathcal{L}\,(\mathbb{B}_1;\mathbb{B}_3)$.

1-2 Définition 3

Soit φ une application de Ω dans $\mathbb{B}_2$,$\mathcal{T}(\mathfrak{C})$- mesurable et étagée (i.e. ne prenant qu'un nombre fini $\{a_i\}_{i=1\ldots n}$ de valeurs). On définit l'intégrale de φ par rapport à m en posant :

$$\int \varphi\, d\, m = \sum_{i=1}^{n} (m(A_i) \mid a_i) \in \mathbb{B}_3$$

On vérifie immédiatement que $\varphi \rightsquigarrow \int \varphi \, d\, m$ est une application linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{E}_{\mathbb{B}_2}(\mathcal{Q})$ des applications étagées sur $\mathcal{Q}$, à valeurs dans $\mathbb{B}_2$. Autrement dit, pour toute famille finie $\{ a_i \}_{i=1\ldots n}$ d'éléments de $\mathbb{B}_2$ et toute famille $\{ A_i \}_{i=1\ldots n}$ d'éléments de $\mathcal{Q}$, on a

$$(1\text{-}2\text{-}1) \qquad \int \left(\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} \, . \, a_i \right) d\, m = \sum_{i=1}^{n} (m\, (A_i) \mid a_i) \in \mathbb{B}_3$$

2 - Intégrale faible d'une fonction réelle.- *

2-1 Définition 4.-

Une fonction réelle f , $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$-mesurable, est dite scalairement intégrable par rapport à m, si, pour tout $x_1 \in \mathbb{B}_1$, f est intégrable par rapport à la mesure réelle $A \rightsquigarrow \langle m\,(A) \, , x_1' \rangle$.

Si, pour tout $A \in \mathcal{Q}$ (resp. tout $A \in \mathcal{T}(\mathcal{Q})$)

$$x_1' \rightsquigarrow \int_A f\,(\omega) \langle m\,(d\,\omega) \, , x_1' \rangle$$

s'identifie à un élément de $\mathbb{B}_1$ (i.e. s'il existe $x_A \in \mathbb{B}_1$ tel que

$$\forall\, x_1' \qquad \langle x_A \, , x_1' \rangle = \int_A f\,(\omega) \langle m\,(d\,\omega) \, , x_1' \rangle)$$

f est dite faiblement intégrable (resp. totalement faiblement intégrable) et x_A, notée $\int_A f\, d\, m$, est l'intégrale de f sur A.

On dira que f est faiblement intégrable sur $A \in \mathcal{Q}$, si $1_A f$ est intégrable.

* En fait, pour la théorie de l'intégrale stochastique L^2, il semble qu'on puisse se contenter de la théorie de l'intégration très simple, développée au § 4 ci-dessous. Les paragraphes 2 et 3 peuvent donc être omis en première lecture.

2.2 Remarque.-

Il est évident que si $f \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$ l'intégrale $\int f\, d\, m$ définie en 1-2 coïncide avec l'intégrale faible ci-dessus.

2.3 Proposition 4.-

Si f est λ - essentiellement bornée sur tout $A \in \mathcal{A}$, pour une mesure λ positive dominant m, f est faiblement intégrable, et

(2.3.1) $\forall\, A \in \mathcal{A} \qquad \int_A f\, d\, m \in \|f\|_\infty\ \overline{\mathrm{Co}\{m(A') : A' \in \mathcal{A}, A' \subset A\}}$

où $\overline{\mathrm{Co}}$ (B) désigne l'enveloppe équilibrée convexe fermée de B dans $\mathbb{B}_1$.

Démonstration.-

On a vu (démonstration du théorème 5) que l'application $1_A \rightsquigarrow m(A)$ se prolongeait de façon unique en une forme linéaire unique continue $h \rightsquigarrow m(h)$ de $L^\infty(\lambda)$ dans $\mathbb{V}$ et telle précisément que pour tout $x' \in \mathbb{V}'$ on ait

$$< m(h), x' > = \int h\, d< m,x'> .$$

(2.3.1) est une conséquence triviale de la continuité de $h \rightsquigarrow m(h)$. ∎

2-4 <u>Proposition 5</u>.-

Si f est faiblement intégrable, l'application $\nu : A \rightsquigarrow \int_A f\, d\, m$ est une mesure sur $\mathcal{A}$.

En outre $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0$ telle que

$$||m||\ (A) \leq \delta \longrightarrow ||\nu||\ (A) \leq \varepsilon$$

<u>Démonstration</u>.-

Par hypothèse, pour tout $x'_1 \in \mathcal{B}'_1$, $A \rightsquigarrow \underline{=} < \int_A f\ d\ m\ ,\ x' > \int_A f\ .\ d < m\ ,\ x' >$ est une mesure réelle sur $\mathcal{A}$. On applique alors le théorème 1, qui nous dit que ν est une mesure.

Si λ est une mesure de base commune aux mesures réelles $< m\ ,\ x' >$, les mesures $< \nu\ ,\ x' > = f\ .\ < m\ ,\ x' >$ sont une partie faiblement relativement compacte (en restriction à $A \in \mathcal{C}$ de $\mathcal{L}^1(A, \mathcal{C} \cap A, \lambda)$. D'où pour tout $\varepsilon > 0$ l'existence de δ tel que

$$\|m\|(A) \leq \delta \longrightarrow \lambda(A) \leq \delta \longrightarrow \|\nu\|(A) \leq \varepsilon \quad \blacksquare$$

3 - Intégrale forte.-

La notion d'intégrale qui suit semble essentiellement due à Bartle [1], Dunford et Schwartz [2]. Cf. Aussi [1] et [4] .

3-1 Convergence en mesure.-

Comme $\|m\|$ est dénombrablement sous - additive, l'ensemble $\mathcal{N} = \{A : A \in \quad , \|m\|(A) = 0\}$ est un δ - idéal dans $\mathcal{C}$. Soit $\tilde{\mathcal{N}}$ l'idéal dans (Ω) engendré par $\mathcal{N}$.

On vérifie immédiatement qu'on définit une fonction dénombrablement sous additive sur $\mathcal{C} \cup \tilde{\mathcal{N}}$ en posant :

$$\|m\|(A \cup N) = \|m\|(A) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{C} \text{ et } N \in \tilde{\mathcal{N}}$$

Pour toute suite décroissante (A_n) de $\mathcal{C} \cup \tilde{\mathcal{N}}$ on a également (cf. I 3-1 corollaire)

(3-1-1) $$\lim_n \|m\|(A_n) = \|m\|(\bigcap_n A_n)$$

Définition 5.-

On dira qu'une suite (f_n) d'applications de Ω dans $\mathbb{B}_2$ converge en mesure vers une application f de Ω dans $\mathbb{B}_2$, si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{C} \quad \|m\|(\{\omega : \|f(\omega) - f_n(\omega)\| \geq \delta\} \cap A) \leq \varepsilon$$

3-2 Convergence presque partout.-

Définition 6.-

On dira qu'une suite (f_n) d'applications de Ω dans $\mathbb{B}_2$ converge presque partout vers une application f de Ω dans $\mathbb{B}_2$, si $\forall A \in \mathcal{C}$

$$\{\omega : \lim_n \| f_n(\omega) - f(\omega) \| \neq 0\} \in \tilde{\mathcal{N}}$$

Proposition 6.-

La convergence presque partout implique la convergence en mesure

De toute suite convergeant en mesure, on peut extraire une sous suite convergeant presque partout.

Démonstration

Analogue à celle du cas où m est réelle, compte tenu des propriétés de sous - additivité dénombrable de $\|m\|$ et de (3-1-1). ∎

3-3 Mesurabilité forte et convergence forte en moyenne de fonctions réelles.-

Les définitions qui suivent généralisent la notion de mesurabilité forte et de convergence en moyenne définies lorsque m est réelle, au cas où m est vectorielle.

Définition 6.-

L'application f de Ω dans $\mathbb{B}_2$ est dite fortement $\|m\|$ - mesurable si , il existe une suite (f_n) de fonction de $\mathcal{E}_{\mathbb{B}_2}(\mathfrak{C})$ telle que f_n converge $||m||$ presque partout vers f .

Il est évident que toute fonction réelle $\mathcal{C}(\mathfrak{C})$ - mesurable est fortement $\|m\|$ - mesurable.

Définition 8.-

1°) Une suite (f_n) de fonctions réelles faiblement intégrables, est dite converger fortement en moyenne vers f si

(i) (f_n) converge vers f en mesure (pour $||m||$)

$\forall A \in \quad \lim_n \int_A f_n \, d\, m$ existe dans $\mathbb{B}_1$

(pour la norme)

2°) Une fonction f réelle est dite fortement intégrable si pour tout $A \in \mathfrak{C}$, existe une suite (f_n) extraite de $\mathcal{E}(\mathfrak{C})$ telle que f_n converge fortement en moyenne vers $1_A f$.

Proposition 7.-

Si (f_n) est une suite de fonctions réelles faiblement intégrables convergeant fortement en moyenne vers f, f est faiblement intégrable et

$$\forall A \in \mathfrak{C} \quad \int_A f \, d\, m = \lim_n \int_A f_n \, d\, m$$

dans $\mathbb{B}_1$ (pour la norme)

Démonstration.-

L'existence de la limite de $\int_A f_n \, d < m , x' >$ pour tout $A \in \mathfrak{C}$ implique l'équi - intégrabilité de (f_n) par rapport à $< m , x' >$ d'où résulte l'existence de

$\int_A f \, d < m , x' >$ pour tout A et x' et la relation

$$\forall A \in \quad \int_A f \, d < m , x' > = \lim_n < \int_A f_n \, d m , x' >$$

$$= < \lim_n \int_A f_n \, d m , x' >$$

Ceci exprime que f est faiblement intégrable et

$$\int_A f \, d m = \lim_n \int_A f_n \, d m \quad . \blacksquare$$

3-4 Fonctions réelles fortement intégrables.-

Proposition 8.-

Soit (f_n) une suite de fonctions réelles faiblement intégrables et f $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ - mesurable.

1°) (f_n) converge en moyenne vers f si et seulement si

(j) (f_n) converge vers f en mesure

(jj) les mesures $\nu_n : A \longrightarrow \int_A f_n \, d m$ possèdent la propriété

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

$\| m \|(A) \leq \delta \longrightarrow \|\nu_n (A)\| \leq \varepsilon$ pour tout r

2°) si (f_n) converge en moyenne vers f on a

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \lim_n \sup_{B \in \mathcal{A} \cap A} \|\nu_n(B) - \int_B f \, d m \| = 0$$

Démonstration.-

1°) La condition est nécessaire en vertu du corollaire 1 du théorème 4. La condition est suffisante en vertu des relations

$$\left\|\int_A (f_n-f_k)dm\right\| \leq \left\|\int_{[A\cap\|f_n-f_k\|>\delta]} (f_n-f_k)dm\right\| + \left\|\int_{[A\cap\|f_n-f_k\|\leq\delta]} (f_n-f_k)dm\right\|$$

$$\leq \left\|\int_{[A\cap\|f_n-f_k\|>\delta]} f_n\, dm\right\| + \left\|\int_{[A\cap\|f_n-f_k\|>\delta]} f_k\right\| dm + \|m\|(A)\,.\,\delta$$

de la convergence en mesure et de la condition (jj).

2°) L'uniformité de la convergence résulte immédiatement de la dernière majoration.

Théorème7.-

Soit (f_n) une suite de fonctions réelles fortement intégrables convergeant en moyenne vers f.

Alors f est fortement intégrable et (f_n) converge fortement en moyenne vers f.

En outre, $\lim\limits_n \nu_n(B) = \int_B f\, dm$ uniformément sur $B \in \mathcal{B} \cap A$.

En particulier, les mesures ν_n convergent pour la semi norme de la semi - variation.

Démonstration.-

Il reste seulement compte tenu de la proposition précédente à démontrer que f est fortement intégrable.

Soit $(h_{n,k})$ une famille extraite de $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ telle que, pour tout n , la suite $(h_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge fortement en moyenne vers f_n .

Quitte à extraire une sous suite, compte tenu de la propriété de convergence uniforme exprimée par la proposition précédente 2°), on peut supposer que, pour A donné,

$$\sup_{B \subset A} \left\| \int_B h_{n,k} \, d m - \int_B f_n \, d m \right\| \leq \frac{1}{n}$$

Il est alors facile d'extraire une suite $(h_{n_j, k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ convergeant en mesure vers f . La suite $(1_A \, . \, h_{n_j, k_j})$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ converge donc fortement en moyenne vers $1_A \, . \, f$.

Corollaire 1 (Théorème de convergence dominée).-

Soit (f_n) une suite de fonctions fortement intégrables convergeant en mesure vers f. S'il existe une fonction faiblement intégrable g telle que

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left\| \int_A f_n dm \right\| \leq \left\| \int_A g \, dm \right\|$$

f est fortement intégrable et (f_n) converge fortement en moyenne vers f.

Démonstration.-

On applique la proposition 5 qui donne la propriété (jj) pour la suite (f_n) et le théorème 7.

Corollaire 2.-

Si (f_n) fortement intégrable converge simplement vers f en étant majorée uniformément par une constante a , f est fortement intégrable et (f_n) converge fortement en moyenne vers f.

Démonstration.-

On utilise le fait que

$$\left\| \int_A f_n \, d \mu \right\| \leq a \, \|m\| (A) \, . \blacksquare$$

4 - Intégration en moyenne d'ordre p par rapport à une mesure de puissance $p^{\text{ième}}$ majorée.-

4-1 Définition 9.-

Soit m (resp. α) une mesure définie sur le δ - anneau $\mathcal{C}$, à valeurs dans l'espace de Banach $\mathbb{B}$ (resp. dans $\mathbb{R}^+$).

On dira que m est de puissance $p^{\text{ième}}$ majorée (ou majorée si $p = 1$) par la mesure α, s'il existe un anneau $\mathcal{A}$ engendrant $\mathcal{C}$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour toute partition finie $(A_i)_{i = 1 \dots n}$ de A extraite de $\mathcal{A}$ et toute suite $(a_i)_{i = 1 \dots n}$ de nombres réels on a

$$(i) \qquad \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \, m(A_i) \right\|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \, \alpha(A_i)$$

4-2 Exemples.-

1°) Si m est à variation finie $|m|$ sur $\mathcal{C}$, m est majorée par $|m|$

2°) Les mesures stochastiques associées au chapitre 2 à des martingales de carré intégrable seront telles qu'il existe une mesure α telle que pour toute fonction $\sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$ $A_i \in \mathcal{A}$, (A_i) deux à deux disjoints, on a

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \, . \, m(A_i) \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|^2 \, \alpha(A_i)$$

3°) On obtient un exemple de mesure de puissance $p^{\text{ième}}$ majorée, en considérant pour une mesure positive finie donnée α sur A la mesure vectorielle

$$m : A \rightsquigarrow 1_A \in \mathcal{L}^p(\Omega, (\ ), \alpha)$$

4-3 <u>Proposition et Définition</u>.-

Si m est de puissance $p^{\text{ième}}$ majorée par α, l'application

$$f \rightsquigarrow \int f \, dm$$

définie sur $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ par

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \, 1_{A_i} \right) dm = \sum_{i=1}^{n} a_i \, m(A_i)$$

se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{E}(\mathcal{C}), \alpha) \quad \text{dans } \mathbb{B}$$

Ce prolongement est appelé l'intégrale en moyenne d'ordre p de f par rapport à m.

<u>Démonstration</u>.-

La proposition résulte immédiatement de ce que la relation (i) s'écrit pour $f \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$:

$$\left\| \int f \, dm \right\|^p \leq \int \|f\|_p^p \, d\alpha \quad . \blacksquare$$

4-4 <u>Proposition 9</u>.-

Si m est de puissance $p^{\text{ième}}$ majorée par α, l'intégrale en moyenne d'ordre p est la restriction à $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{E}(\mathcal{C}), \alpha)$ de l'intégrale forte définie en 3.

<u>Démonstration</u>.-

On a pour tout $A \in$

$$\|m(A)\| = \left\| \int 1_A \, dm \right\| \leq \alpha(A)$$

D'où

$$||m|| \leq \alpha$$

$\forall f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{E}(\mathcal{A}), \alpha)$, il existe une suite (f_n) de $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ convergeant α . p.p. , donc presque partout pour $||m||$, vers f. En outre

$\forall A \in$ $\lim_n \int f_n \, dm = \int f \, dm$ pour la norme de $\mathbb{B}$ par définition.

Les f_n convergent donc en moyenne vers f d'après la définition 7 et f est fortement intégrable, d'intégrale forte $\lim_n \int f_n \, dm$.

4.5 Définition 10.-

Soit m (resp. α) une mesure définie sur le δ - anneau $\mathcal{C}$, à valeurs dans l'espace de Banach $\mathbb{B}_1$ (resp. dans $\mathbb{R}^+$).

Soit $\mathbb{B}_3$ un espace de Banach et $\mathbb{B}_2$ un sous espace de $\mathcal{L}(\mathbb{B}_1;\mathbb{B}_3)$. On dira que m est de puissance $p^{\text{ième}}$ majorée par α relativement à $\mathbb{B}_2$, s'il existe un anneau $\mathcal{A}$ engendrant $\mathcal{C}$, tel que, pour tout $A \in \mathcal{C}$, pour toute partition finie $(A_i)_{i=1\ldots n}$ de A, extraite de $\mathcal{A}$, et toute suite $(u_i)_{i=1\ldots n}$ extraite de $\mathbb{B}_2$ on a

$$\text{(i)} \quad \left|\left| \sum_{i=1}^{n} u_i\,(m(A_i))\right|\right|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i|^p\,\alpha(A_i)$$

Nous verrons un exemple de telle mesure au chapitre III. Nous avons immédiatement la proposition et définition analogue à celle de 4.3 ci dessus.

4.6 Proposition et Définition.-

Si m est de puissance $p^{\text{ième}}$ majorée par α , relativement à $\mathbb{B}_2$, l'application $f \rightsquigarrow \int f\, d\, m$, définie sur $\mathcal{E}_{\mathbb{B}_2}(\mathcal{A})$ par (cf. les notations en 1.1 et 1.2)

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} \cdot a_i\right) d\, m = \sum_{i=1}^{n} (a_i \mid m\,(A_i))$$

se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de $\mathcal{L}^p\,(\Omega,\mathcal{T}(\mathcal{C}),\alpha)$ dans $\mathbb{B}_3$.

Ce prolongement est appelé l'intégrale en moyenne d'ordre p de f par rapport à m.

REFERENCES

[1] BARTLE R.G.
" A general bilinear vector integral "
Studia Math. 15. P. 337-352 (1956)

[2] BARTLE R.G. - DUNFORD N. et SCHWARTZ J.
" Weak compactness and vector measures "
Canad. J. of Math. 7 (1955) P. 289-305

[3] DINCULEANU N.
" Vector measures "
Pergamon Press. 1967

[4] DUNFORD N. et SCHWARTZ J.
" Linear operators I "
Interscience 1966

[5] METIVIER M.
" Limites projectives de mesures "
Annali di mat. pura ed aplicata. IV t. LXIII (1963)
P. 225-251

[6] METIVIER M.
" Martingales à valeurs vectorielles. Applications à la dérivation des mesures vectorielles "
Annales de l'Institut Fourier de l'Université de Grenoble.
Tome XVII . Fascicule 2 . 1967

[7] NEVEU J.
" Bases mathématiques du Calcul des Probabilités "
Masson . 1964

[8] PETTIS B.J.
" On integration in vector spaces "
Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938) P. 277-304

[9] UHL J.J.
" Extensions on decomposition of vector measures "
J. London Math. Soc. 1972