

PIERRE BOLLEY

JACQUES CAMUS

Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 1

« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 1, p. 1-24

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972__1_A1_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES

ET DEGENERES A UNE VARIABLE

par

Pierre BOLLEY et Jacques CAMUS

Cet article est essentiellement un complément à celui de [1], ceci en vue des applications aux problèmes elliptiques et dégénérés à plusieurs variables.

I. UNE CLASSE D'ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS.

On désigne par $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, les ensembles des nombres complexes, réels positifs et négatifs respectivement.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. On notera, pour r entier positif ou nul, $H^r(\Omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre r sur Ω , et $H_0^r(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)^{(*)}$ dans $H^r(\Omega)$ (cf. [4]).

Etant donnés deux entiers k et $m \geq 0$, on définit les espaces de Sobolev avec poids sur Ω :

$$W_k^m(\Omega) = \{u \in H^{m-k}(\Omega) ; t^k u \in H^m(\Omega)\}.$$

Ce sont des espaces de Hilbert pour la norme :

$$u \longmapsto \|u\|_{W_k^m(\Omega)}^2 = (\|u\|_{H^{m-k}(\Omega)}^2 + \|t^k u\|_{H^m(\Omega)}^2)^{1/2}.$$

Proposition 1.1 : Pour k et $m \geq 1$, on a :

$$W_k^m(\mathbb{R}) \subset W_{k-1}^{m-1}(\mathbb{R}) \text{ et, } W_k^m(\mathbb{R}_+) \subset W_{k-1}^{m-1}(\mathbb{R}_+),$$

algébriquement et topologiquement.

(*) Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$) désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dans Ω et à support compact dans Ω (resp. $\bar{\Omega}$).

L'espace des distributions sur Ω sera noté $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration : Pour $\mathbb{R}$: soit $u \in W_k^m(\mathbb{R})$, ceci équivaut à dire que sa transformée de Fourier $\hat{u}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau} u(t) d\tau$ vérifie :

$$(1.1) \quad \begin{cases} (1+|\tau|)^{m-k} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}), \\ (1+|\tau|)^m D_t^k \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Il faut établir que ceci implique $(1+|\tau|)^{m-1} D_t^{k-1} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$.
D'après (1.1), $\hat{u} \in H_{\text{Loc}}^k(\mathbb{R})$; on est donc ramené (après localisation) au cas où $\hat{u}$ vérifie (1.1) et $\text{Supp } \hat{u} \subset [1, +\infty[$.

On fait alors le changement de variable $\tau = \frac{1}{t}$.

Lemme 1.1 : Si $t = \frac{1}{\tau}$ et si $v(t) = \hat{u}(\tau)$ on a : pour tout entier k ,

$$(1.2) \quad D_\tau^k \hat{u}(\tau) = (-1)^k t^{k+1} D_t^k (t^{k-1} v(t)).$$

Cette formule est vraie pour $k=1$; on la démontre ensuite par récurrence sur l'entier k .

Posons alors $W(t) = t^{k-1} v(t)$; cette fonction satisfait aux conditions suivantes :

$$(1.3) \quad \begin{cases} t^{-m} W(t) \in L^2(\mathbb{R}_+) \\ t^{k-m} D_t^k W(t) \in L^2(\mathbb{R}_+) \text{ et } \text{Supp } W \subset [0, 1]. \end{cases}$$

Il est facile de voir que ces conditions impliquent : $t^{\ell-m} D_t^\ell W(t)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}_+)$ pour $\ell=0, \dots, k$. Il en résulte donc que :

$$(1+|\tau|)^{m-1} D_\tau^{k-1} \hat{u} \text{ appartient à } L^2(\mathbb{R}). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

- Pour $\mathbb{R}_+$: cela résulte du lemme suivant :

Lemme 1.2 : Il existe un opérateur P (de prolongement) linéaire, continu de

$W_k^m(\mathbb{R}_+)$ dans $W_k^m(\mathbb{R})$ tel que pour tout u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R}_+)$, on ait :

$$P u|_{\mathbb{R}_+} = u$$

dans $W_k^m(\mathbb{R}_+)$.

Démonstration : Pour u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R}_+)$, on pose :

$$Pu(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{\text{Max}(k,m)} \alpha_j u(-jt) & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

les α_j étant des constantes solutions du système :

$$\sum_{j=1}^{\text{Max}(k,m)} \alpha_j (-j)^p = 1 \text{ pour } p = -k, \dots, \text{Max}(-1, m-k-1).$$

Ces conditions impliquent que $Pu \in H^{m-k}(\mathbb{R})$ et que $t^k Pu \in H^m(\mathbb{R})$

et que :

$$\|Pu\|_{W_k^m(\mathbb{R})} \leq C \cdot \|u\|_{W_k^m(\mathbb{R}_+)} ,$$

où C est une constante indépendante de u .

Proposition 1.2 : On a : (i) $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $W_k^m(\mathbb{R})$.

(ii) $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ est dense dans $W_k^m(\mathbb{R}_+)$.

Démonstration :

(i) Dans une première étape, on tronque : soit ψ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi(t) = 1$ pour $|t| \leq 1$ et $\psi(t) = 0$ pour $|t| \geq 2$.

On pose $\psi_R(t) = \psi(t/R)$ pour $R > 0$. Pour u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R})$, la fonction $u_R = \psi_R \cdot u$ appartient à $W_k^m(\mathbb{R})$ et converge vers u dans $W_k^m(\mathbb{R})$ quand R tend vers $+\infty$.

Dans une seconde étape, on régularise les fonctions u_R , notées maintenant u : soit j appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $j(t) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} j(t) dt = 1$. On pose $j_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} j\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ pour $\varepsilon > 0$. Pour u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R})$ à support compact, la fonction $u_\varepsilon = j_\varepsilon * u$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et converge vers u dans $W_k^m(\mathbb{R})$ quand ε tend vers 0, d'après la proposition 1.

(ii) Cela résulte de (i) et du lemme 1.1.

On peut caractériser les espaces de Sobolev avec poids $W_k^m(\mathbb{R}_+)$ de la façon suivante :

Proposition 1.3 : Un élément u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ appartient à $W_k^m(\mathbb{R}_+)$ si et seulement si $t^k u$ appartient à $H_0^m(\mathbb{R}_+) \cap H_0^k(\mathbb{R}_+)$.

Démonstration : On utilise la proposition 1.2 et l'inégalité n° 330 de [5] qui permet d'établir que l'application $v \mapsto v/t$ est linéaire continue de $H_0^r(\mathbb{R}_+)$ dans $H_0^{r-1}(\mathbb{R}_+)$, pour tout entier $r \geq 1$.

Remarque 1.2 : De ce résultat suit que $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ est dense dans $W_k^m(\mathbb{R}_+)$ pour $k \geq m$.

II. ETUDE D'UNE CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS ELLIPTIQUES ET DEGENERES.

1°) Notations et hypothèses.

Soit $L \equiv L(t; D_t)$ l'opérateur différentiel défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$Lu(t) \equiv L(t; D_t) \{u(t)\} \equiv \sum_{h=0}^{\text{Min}(k,m)} P^{m-h}(D_t) \{t^{k-h} u(t)\}$$

où $D_t = \frac{1}{i} \frac{d}{dt}$, et où m et k sont deux entiers ≥ 1 et où :

(i) $P^{m-h}(D_t)$, pour $0 \leq h \leq \text{Min}(m,k)$ est un opérateur différentiel ordinaire d'ordre $\leq m-h$, à coefficients constants complexes :

$$P^{m-h}(D_t) = \sum_{j=0}^{m-h} p_j^{m-h} D_t^j, \quad p_j^{m-h} \in \mathbb{C},$$

(ii) $P^m(\tau)$ est un polynôme de degré m , ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

Utilisant la transformation de Fourier définie au I, l'opérateur $\hat{L} = \hat{L}(\tau; D_\tau)$, transformé de Fourier de l'opérateur L , est défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\hat{L} \hat{v}(\tau) = \hat{L}(\tau; D_\tau) \hat{v}(\tau) = \sum_{h=0}^{\text{Inf}(k,m)} P^{m-h}(\tau) \{(-D_\tau)^{k-h} \hat{v}(\tau)\},$$

où $D_\tau = \frac{1}{i} \frac{d}{d\tau}$.

On désignera par $L^* = L^*(t; D_t)$ l'opérateur adjoint formel de l'opérateur L qui est défini par : pour tout φ et ψ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} L \varphi(t) \cdot \overline{\psi(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \cdot \overline{L^* \psi(t)} dt.$$

L'opérateur L^* est un opérateur différentiel ordinaire du même type que L .

Nous allons étudier les opérateurs $L(t; D_t)$ tout d'abord sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{R}_+$.

2°) Etude sur $\mathbb{R}$ de la classe d'opérateurs L .

D'une façon générale, on désigne par $\text{Ker } L$ l'espace des distributions T de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $LT = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

L'opérateur L induit, pour tout entier $p \geq 0$, une application linéaire continue de $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ dans $H^p(\mathbb{R})$. Considéré comme opérateur différentiel, l'opérateur L est d'ordre m en la différentiation et admet pour points singuliers le point $t=0$ à l'ordre k et le point $t = \infty$. Par contre, l'opérateur différentiel $\hat{L}$ est d'ordre k en la différentiation et n'admet, sur $\mathbb{R}$, que le point $\tau = \infty$ pour point singulier en lequel il est du type de Fuchs (cf : [3]). L'équation déterminante en ce point étant :

$$\phi(\rho) = \sum_{h=0}^{\inf(k,m)} P_{m-h}^{m-h} i^{k-h} \rho(\rho-1) \dots (\rho-k+h+1),$$

avec la convention :

$$\rho(\rho-1) \dots (\rho-k+h+1) = 1 \text{ pour } h=k.$$

Ainsi l'étude de l'opérateur L sur $\mathbb{R}$ est ramenée par la transformation de Fourier à l'étude de l'opérateur $\hat{L}$ sur $\mathbb{R}$.

Aux espaces $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ et $H^p(\mathbb{R})$, on associe respectivement par transformation de Fourier, les espaces :

$$\begin{aligned} \hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}) &= \{ \hat{v} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) ; (1+|\tau|)^{m+p-h} D_\tau^{k-h} \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}), 0 \leq h \leq k \}, \\ \hat{H}^p(\mathbb{R}) &= \{ \hat{f} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) ; (1+|\tau|)^p \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \}, \end{aligned}$$

munis des normes canoniques. On définit de manière analogue les espaces

$\hat{W}_k^{m+p}(\Omega)$ et $\hat{H}^p(\Omega)$ lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.1 : Soit p un entier ≥ 0 et soit r_p le nombre de racines de l'équation $\phi(\rho) = 0$ vérifiant :

$$\operatorname{Re} \rho > -p + k - m - \frac{1}{2}.$$

On suppose qu'aucune racine de $\phi(\rho) = 0$ n'est située sur la droite

$$\operatorname{Re} \rho = -p - m + k - \frac{1}{2}.$$

L'opérateur L , considéré comme opérateur linéaire continu de $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ dans $H^p(\mathbb{R})$ est à indice et son indice est égal à $k - 2r_p$.

Remarque 2.1 : Il résulte de ce théorème que l'indice de l'opérateur L , de $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ dans $H^p(\mathbb{R})$, dépend de p et que, pour p assez grand, il demeure constant et égal à $-k$.

Remarque 2.2 : Au cours de la démonstration de ce théorème, on montrera que, plus précisément, on a :

(i) si $r_p = 0$, alors l'opérateur L est linéaire continu surjectif de $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ sur $H^p(\mathbb{R})$, et la dimension du noyau de L dans $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ est égal à k .

(ii) si $r_p = k$ (ce qui a lieu lorsque p est assez grand), alors l'opérateur L est un isomorphisme de $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ sur un sous-espace fermé de codimension k de $H^p(\mathbb{R})$.

Démonstration : L'opérateur $\hat{L}$ est du type de Fuchs en $\tau = \infty$, par suite, le comportement des solutions de l'équation :

$$(2.1) \quad \hat{L}(\tau; D) \hat{v}(\tau) = 0,$$

au voisinage de $\tau = \infty$ est fonction des racines ρ_j , $j=1, \dots, k$, de l'équation déterminante en $\tau = \infty$, $\phi(\rho) = 0$.

En particulier, lorsque l'équation (2.1) est du premier type de Fuchs en $\tau = \infty$, il existe un système fondamental $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k\}$ de solutions dans un voisinage de $\tau = \infty$ de la forme :

$$(2.2) \quad \hat{v}_j(\tau) = \tau^{\rho_j} \phi_j\left(\frac{1}{\tau}\right),$$

pour $|\tau|$ assez grand et $j=1, \dots, k$, et où $\phi_j(\zeta)$ est une fonction holomorphe dans un voisinage de $\zeta = 0$ et non nulle en $\zeta = 0$ (*).

Par contre, dans le cas où l'équation (2.1) n'est pas du premier type de Fuchs en $\tau = \infty$ (2ème type de Fuchs), on peut encore donner la forme explicite d'un système fondamental $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k\}$ de solutions dans un voisinage de $\tau = \infty$, mais l'écriture d'un tel système, en général, n'est pas très simple.

Ceci nous amène à introduire un opérateur $\hat{M} = \hat{M}(\tau; D_\tau)$ avec :

$$(2.3) \quad \hat{M}(\tau; D_\tau) = \sum_{h=1}^{\text{Min}(k,m)} M^{m-h}(\tau) (-D_\tau)^{k-h}$$

où $M^{m-h}(\tau)$, pour $h=1, \dots, \text{Inf}(k,m)$, est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, telle que pour $|\tau|$ assez grand, l'équation :

$$(2.4) \quad \{\hat{L}(\tau; D_\tau) + \hat{M}(\tau; D_\tau)\} \{\hat{v}(\tau)\} = 0,$$

se réduise à :

$$(2.5) \quad \sum_{h=0}^{\text{Min}(k,m)} p_{m-h}^{m-h} \tau^{k-h} (-D_\tau)^{k-h} \hat{v}(\tau) = 0.$$

Un tel opérateur existe toujours. L'équation (2.5) est une équation d'Euler dont l'équation déterminante est encore $\phi(\rho) = 0$. Ainsi, il existe un système fondamental $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k\}$ de l'équation (2.5) au voisinage de $\tau = +\infty$ ou $-\infty$ de la forme :

$$(2.6) \quad \hat{v}_j(\tau) = |\tau|^{\rho_j} (\text{Log } |\tau|)^{\lambda_j},$$

pour $|\tau|$ assez grand et $j=1, \dots, k$, et où λ_j est une certaine constante réelle.

On a alors le résultat suivant :

(*) Signalons que ceci a lieu si la condition (suffisante) suivante est vérifiée :

(I) Si $k \geq 2$, aucune des différences $\rho_i - \rho_j$, pour $1 \leq i < j \leq k$ n'est un entier de $\mathbb{Z}$.

Lemme 2.1 : L'opérateur $\hat{L} + \hat{M}$ est linéaire, continu, surjectif de $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ (resp. $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_-)$) sur $\hat{H}^p(\mathbb{R}_+)$ (resp. $\hat{H}^p(\mathbb{R}_-)$) et la dimension du noyau de $\hat{L} + \hat{M}$ dans $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ (resp. $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_-)$) est égale à $k - r_p$.

Démonstration : On fait la démonstration sur $\mathbb{R}_+$, sur $\mathbb{R}_-$ la méthode est analogue. Il sera commode de supposer que $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{r_p}$ sont les r_p racines de $\phi(\rho) = 0$ satisfaisant à $\operatorname{Re} \rho > -p - m + k - \frac{1}{2}$.

D'après ce qui précède, il existe un système fondamental de solutions $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k\}$ de l'équation (2.4) sur $\mathbb{R}$ tel que le comportement des $\hat{v}_j$ au voisinage de $\tau = +\infty$ soit donné par (2.6). Ainsi, il est facile de voir que le noyau de l'opérateur $\hat{L} + \hat{M}$ dans $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ est engendré par la famille $\{\hat{v}_{r_p+1}, \dots, \hat{v}_k\}$ et donc, sa dimension est $k - r_p$.

On démontre maintenant la surjectivité de l'opérateur $\hat{L} + \hat{M}$. Soit $\hat{f}$ appartenant à $\hat{H}^p(\mathbb{R}_+)$. La fonction

$$(2.7) \quad \hat{v}(\tau) = - \sum_{j=1}^{r_p} \hat{v}_j(\tau) \int_{\tau}^{+\infty} \hat{f}(\sigma) \overline{\hat{g}_j(\sigma)} d\sigma + \sum_{j=r_p+1}^k v_j(\tau) \int_0^{\tau} \hat{f}(\sigma) \overline{\hat{g}_j(\sigma)} d\sigma$$

est solution de l'équation

$$(2.8) \quad (\hat{L} + \hat{M}) \hat{v}(\tau) = \hat{f}(\tau)$$

sur $\mathbb{R}_+$, où

$$(2.9) \quad \hat{g}_j(\tau) = (-1)^j \frac{\Delta(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{j-1}, \hat{v}_{j+1}, \dots, \hat{v}_k)}{i^k P^m(\tau) \Delta(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k)}$$

pour $j=1, 2, \dots, k$ et où Δ est la notation classique du wronskien. Comme

$$\sum_{j=1}^k D_{\tau}^{k-h} \hat{v}_j(\tau) \overline{\hat{g}_j(\tau)} = 0$$

pour $h=2, 3, \dots, k$, il suffit de vérifier, pour démontrer que la solution (2.7) appartient à $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ que :

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^{r_p} (1+\tau)^{m+p-h} D_{\tau}^{k-h} \hat{v}_j(\tau) \int_{\tau}^{+\infty} \hat{f}(\sigma) \overline{\hat{g}_j(\sigma)} d\sigma \\ & + \sum_{j=r_p+1}^k (1+\tau)^{m+p-h} D_{\tau}^{k-h} \hat{v}_j(\tau) \int_0^{\tau} \hat{f}(\sigma) \overline{\hat{g}_j(\sigma)} d\sigma \end{aligned}$$

appartient à $L^2(\mathbb{R}_+)$ pour $k=1,2,\dots,k$. Lorsque les racines ρ_j sont distinctes, les $\hat{v}_j(\tau)$ sont de la forme τ^{ρ_j} , sans termes logarithmiques, au voisinage de $\tau = +\infty$ et les inégalités de Hardy [5] permettent alors de terminer cette vérification. Par contre, dans le cas général, les $\hat{v}_j$ sont donnés par (2.6) au voisinage de $\tau = +\infty$, et on ne peut plus conclure aussi facilement par cette méthode. C'est pourquoi, on donne maintenant une démonstration de la surjectivité plus longue, mais générale. Cette démonstration sera faite en trois étapes.

1ère étape : Soit $\hat{f}$ appartenant à $\hat{H}^p(\mathbb{R}_+)$ à support dans $[0, T]$ avec $0 < T < +\infty$. Il est facile de vérifier qu'une solution du type :

$$- \sum_{j=1}^k \hat{v}_j(\tau) \int_{\tau}^{+\infty} \hat{f}(\sigma) \overline{\hat{v}_j(\sigma)} d\sigma$$

convient.

2ème étape : Soit $\hat{f}$ appartenant à $\hat{H}^p(\mathbb{R}_+)$, à support dans $[T, +\infty[$ avec T choisi suffisamment grand pour que l'équation (2.8) se réduise à

$$(2.10) \quad \sum_{h=0}^{\min(k,m)} p_{m-h}^{m-h} \tau^{k-h} (-D_{\tau})^{k-h} \hat{v}(\tau) = \frac{p_m^m \tau^k}{p_m^m} \hat{f}(\tau)$$

sur $[T, +\infty[$.

On fait le changement de variable $t = \log \tau$ sur l'intervalle

$[T, +\infty[$ ce qui ramène l'équation (2.10) à l'équation à coefficients constants

$$(2.11) \quad \sum_{h=0}^{\min(k,m)} p_{m-h}^{m-h} (-1)^{k-h} D_t (D_t + i) \dots (D_t + i(k-h-1)) u(t) = h(t)$$

où $u(t) = \hat{v}(\tau)$ et $h(t) = \frac{p_m^m \tau^k}{p_m^m} \hat{f}(\tau)$.

On fait le changement de fonction $u(t) = e^{\alpha t} w(t)$ avec $\alpha = -p-m+k - \frac{1}{2}$,

ce qui ramène l'équation (2.11) à une équation elliptique :

$$(2.12) \quad \sum_{h=0}^{\min(k,m)} p_{m-h}^{m-h} (-1)^{k-h} (D_t - i\alpha) (D_t + i(1-\alpha)) \dots$$

$$\dots (D_t + i(k-h-1-\alpha)) w(t) = e^{-\alpha t} h(t)$$

son polynôme caractéristique étant en effet $\phi(i\xi + \alpha)$, c'est-à-dire $\phi(i\xi - m - p + k - \frac{1}{2})$ qui est non nul pour ξ réel. Par suite, $e^{-\alpha t} h(t)$ appartenant à $L^2(\text{Log } T, +\infty)$, il existe $w(t)$ appartenant à $H^k(\text{Log } T, +\infty)$ solution de (2.12). La fonction $\hat{v}(\tau) = e^{\alpha \tau} w(t)$ est solution de (2.10) sur $[T, +\infty[$ et appartient à $\hat{W}_k^{m+p}(T, +\infty)$.

Il est ensuite facile, à l'aide des résultats de la 1ère étape, de construire une solution $\hat{v}(\tau)$ de (2.8) sur $\mathbb{R}_+$ et appartenant à $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$.

3ème étape : Les deux étapes précédentes permettent de résoudre le cas général : étant donné $\hat{f}$ appartenant à $\hat{H}^p(\mathbb{R}_+)$, on le décompose en $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$ avec $\hat{f}_1$ (resp. $\hat{f}_2$) appartenant à $\hat{H}^p(\mathbb{R}_+)$ à support dans $[0, T[$ (resp. $[T, +\infty[$). Ce qui achève la démonstration du lemme 3.1.

Par suite, l'opérateur $\hat{L} + \hat{M}$, considéré comme opérateur de $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ (resp. $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_-)$) dans $\hat{H}^p(\mathbb{R}_+)$ (resp. $\hat{H}^p(\mathbb{R}_-)$) est un opérateur à indice, d'indice $k - r_p$. Donc, l'opérateur :

$$(\hat{v}_1, \hat{v}_2) \longrightarrow ((\hat{L} + \hat{M}) \hat{v}_1, (\hat{L} + \hat{M}) \hat{v}_2) : \hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_-) \times \hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \hat{H}^p(\mathbb{R}_-) \times \hat{H}^p(\mathbb{R}_+)$$

est un opérateur à indice, d'indice $2(k - r_p)$. De plus, $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R})$ peut être considéré comme un sous-espace fermé de codimension k de $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_-) \times \hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ et $\hat{H}^p(\mathbb{R}_-) \times \hat{H}^p(\mathbb{R}_+)$ s'identifie à $\hat{H}^p(\mathbb{R})$. On en déduit que $\hat{L} + \hat{M}$, considéré comme opérateur de $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R})$ dans $\hat{H}^p(\mathbb{R})$ est à indice, d'indice $k - 2r_p$ (*).

On aura établi le théorème 2.1, si l'on prouve que l'opérateur $\hat{M}$ est un opérateur compact de $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R})$ dans $\hat{H}^p(\mathbb{R})$. Il suffit pour cela de revenir à la proposition 1.4.

Du théorème 2.1, on déduit que l'image $L \hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R})$ dans $H^p(\mathbb{R})$ est égale à $L \hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}) = \{f \in H^p(\mathbb{R}) ; \forall g \in \text{Ker } L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R}), \langle f, \bar{g} \rangle_{H^p(\mathbb{R}) \times H^{-p}(\mathbb{R})} = 0\}$. On en déduit facilement la remarque (2.2).

On donne maintenant les résultats de régularité associés aux opérateurs L :

(*) Une idée analogue a été utilisée dans [8].

Corollaire 2.1 : Soient p et q deux entiers ≥ 0 tels que l'équation $\phi(p) = 0$ n'ait pas de zéro dans la bande :

$$-(p+q) - m + k - \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} p \leq -p - m + k - \frac{1}{2}.$$

Si u appartient à $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ et si Lu appartient à $H^{p+q}(\mathbb{R})$, alors u appartient à $W_k^{m+p+q}(\mathbb{R})$. En particulier, on a :

$$\operatorname{Ker} L \cap W_k^{m+p}(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} L \cap W_k^{m+p+q}(\mathbb{R}).$$

En effet, d'après le théorème 2.1, l'indice de l'opérateur L , de $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ dans $H^p(\mathbb{R})$ et de $W_k^{m+p+q}(\mathbb{R})$ dans $H^{p+q}(\mathbb{R})$ est le même. Par ailleurs, il est évident que :

$$\operatorname{Ker} L \cap W_k^{m+p+q}(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Ker} L \cap W_k^{m+p}(\mathbb{R}),$$

et que

$$\operatorname{Ker} L^* \cap H^{-(p+q)}(\mathbb{R}) \supset \operatorname{Ker} L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R}).$$

On en déduit facilement que $\operatorname{Ker} L \cap W_k^{m+p+q}(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} L \cap W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ et que $\operatorname{Ker} L^* \cap H^{-(p+q)}(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R})$. Le corollaire est une conséquence de ces deux égalités.

On en déduit :

Corollaire 2.2 : Soit p un entier ≥ 0 tel que l'équation $\phi(p) = 0$ n'ait pas de zéro dans le demi-espace : $\operatorname{Re} p \leq -p - m + k - \frac{1}{2}$.

Si u appartient à $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ et si Lu appartient à $H^\infty(\mathbb{R}) (= \bigcap_s H^s(\mathbb{R}))$, alors u appartient à $W_k^\infty(\mathbb{R}) = \{u \in H^\infty(\mathbb{R}) ; t^k u \in H^\infty(\mathbb{R})\}$.

En particulier, on a : $\operatorname{Ker} L \cap W_k^{m+p}(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} L \cap W_k^\infty(\mathbb{R})$.

3°) Etude sur $\mathbb{R}_+$ de la classe d'opérateurs L :

De façon générale, on désigne par $\operatorname{Ker}_+ L$ l'espace des distributions T de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ telles que $LT = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$.

Pour p entier ≥ 0 , on désigne par $H^{-p}(\mathbb{R}_+)$ le dual topologique de $H_0^p(\mathbb{R}_+)$ et par $H_0^{-p}(\mathbb{R}_+)$ l'espace des distributions T de $H^{-p}(\mathbb{R})$ à support dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, cet espace s'identifie canoniquement au dual topologique de $H^p(\mathbb{R}_+)$.

Le nombre de racines à partie imaginaire positive de $P^m(\tau) = 0$ sera noté m_+ .

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.1 : Soit p un entier ≥ 0 et soit r_p le nombre de racines de l'équation $\phi(\rho) = 0$ vérifiant :

$$\operatorname{Re} \rho > -p - m + k - \frac{1}{2}.$$

On suppose qu'aucune racine de $\phi(\rho) = 0$ n'est située sur la droite $\operatorname{Re} \rho = -p - m + k - \frac{1}{2}$.

L'opérateur L , considéré comme opérateur linéaire continu de $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}_+)$, est à indice et son indice est égal à $m_+ - r_p$.

Remarque 3.1 : Il résulte de ce théorème que l'indice de l'opérateur L , de $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}_+)$, dépend de p et que, pour p assez grand, il demeure constant et égal à $m_+ - k$.

Remarque 3.2 : On déduit facilement du lemme 1.1 et de la remarque 2.2. que si $r_p = 0$, c'est-à-dire si toutes les racines de $\phi(\rho) = 0$ satisfont $\operatorname{Re} \rho < -p - m + k - \frac{1}{2}$, l'opérateur L est linéaire continu surjectif de $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ sur $H^p(\mathbb{R}_+)$ et son noyau dans $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ est de dimension m_+ .

Nous allons donner une démonstration du théorème 3.1 différente de celle donnée dans [2].

3.1. Etude de l'opérateur L sur $(0, T)$, $0 < T < +\infty$.

On va démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.1 : L'opérateur L , considéré comme opérateur de $W_k^{m+p}(0, T)$ dans $H^p(0, T)$ est un opérateur à indice, et son indice est égal à $m - r_p$.

La démonstration sera faite en 3 étapes.

1ère étape : L'opérateur L , de $W_k^{m+p}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$, est un opérateur à indice.

Il est clair que le noyau de L dans $W_k^{m+p}(0,T)$ est de dimension finie, de sorte qu'il suffit de prouver que l'image $LW_k^{m+p}(0,T)$ est fermée et de codimension finie dans $H^p(0,T)$.

Du théorème 2.1, on déduit, par prolongement, que :

$$LW_k^{m+p}(0,T) \subset \{f \in H^p(0,T) ; \forall g \in \text{Ker } L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R}), \text{supp } (g) = \{0\} \\ \langle f, \bar{g} \rangle_{H^p(0,T) \times [H^p(0,T)]} = 0\}.$$

Réciproquement, soit un tel f dans $H^p(0,T)$; on va construire un prolongement F de f tel que F appartienne à $H^p(\mathbb{R})$ et soit orthogonal à $\text{Ker } L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R})$.

Soit $\{g_1, \dots, g_s\}$ une base de l'espace vectoriel constitué par les éléments de $\text{Ker } L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R})$ et à support ponctuel en $\{0\}$. On complète cette base en une base $\{g_1, \dots, g_r\}$ de $\text{Ker } L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R})$. Les restrictions $g_{s+1}|_{\mathbb{R}-[0,T]}, \dots, g_r|_{\mathbb{R}-[0,T]}$ sont linéairement indépendantes dans $H^{-p}(\mathbb{R}-[0,T])$ car si on a une combinaison linéaire :

$$\sum_{j=s+1}^r \mu_j g_j|_{\mathbb{R}-[0,T]} = 0,$$

alors, $\sum_{j=s+1}^r \mu_j g_j$ appartient à $\text{Ker } L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R})$ et son support est contenu dans $[0,T]$. Mais, l'opérateur L n'admet que le point $t=0$ pour point singulier,

par suite, $\sum_{j=s+1}^r \mu_j g_j$ est à support en $\{0\}$. Donc :

$$\sum_{j=s+1}^r \mu_j g_j = 0.$$

ce qui implique $\mu_j = 0$ pour $j = s+1, \dots, r$.

Ainsi, il existe des fonctions φ_j appartenant à $H_0^p(\mathbb{R}-[0,T])$

telles que :

$$\langle \tilde{\varphi}_j, \bar{g}_i \rangle_{H^p(\mathbb{R}) \times H^{-p}(\mathbb{R})} = \delta_{ij}$$

pour $s+1 \leq i, j \leq r$. $\tilde{\varphi}_j$ désignant le prolongement de φ_j par 0 sur $[0,T]$.

Soit maintenant Pf un prolongement quelconque de f dans $H^p(\mathbb{R})$

et considérons :

$$F = Pf + \sum_{j=s+1}^r \mu_j \tilde{\psi}_j$$

où les μ_j sont des constantes choisies de façon que l'on ait :

$$\langle F, \bar{g}_j \rangle_{H^p(\mathbb{R}) \times H^{-p}(\mathbb{R})} = \langle Pf, \bar{g}_j \rangle_{H^p(\mathbb{R}) \times H^{-p}(\mathbb{R})} + \mu_j = 0$$

pour $s+1 \leq j \leq r$. Par ailleurs, on a aussi :

$$\langle F, \bar{g}_j \rangle_{H^p(\mathbb{R}) \times H^{-p}(\mathbb{R})} = 0$$

pour $1 \leq j \leq s$. L'élément F est donc un prolongement de f dans $H^p(\mathbb{R})$ orthogonal à $\text{Ker } L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R})$. D'après le théorème 2.1, il existe une fonction U , appartenant à $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ telle que $LU = F$. La restriction $u = U|_{]0,T[}$ appartient à $W_k^{m+p}(0,T)$ et vérifie $Lu = f$. On en déduit que :

$$L W_k^{m+p}(0,T) = \{f \in H^p(0,T) ; \forall g \in \text{Ker } L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R}), \text{Supp } g = \{0\},$$

$$\langle f, \bar{g} \rangle_{H^p(0,T) \times [H^p(0,T)]} = 0\},$$

ce qui prouve que l'image $L W_k^{m+p}(0,T)$ est fermée et de codimension finie dans $H^p(0,T)$.

2ème étape : Calcul de l'indice de l'opérateur L dans un cas particulier.

Pour cela, on étudie l'équation :

$$(3.1) \quad L(t; D_t) u(t) = 0,$$

du point de vue de la théorie de Fuchs en $t=0$. Cette équation s'écrit aussi :

$$\sum_{\ell=0}^m \sum_{h=0}^{\text{Inf}(k,\ell)} \sum_{j=m-\ell}^{\text{Inf}(m-\ell+k-h,m-h)} P_j^{m-h} (-1)^j \binom{j}{j-m+\ell} (k-h) \dots$$

$$\dots (k-h-j+m-\ell+1) t^{k-h-j+m-\ell} \frac{d^{m-\ell} u}{dt^{m-\ell}} = 0.$$

Cette équation est du type de Fuchs en $t=0$ et l'équation déterminante en ce point s'écrit :

$$F(r) \equiv \sum_{\ell=0}^{\text{Min}(k,m)} r(r-1) \dots (r-m+\ell+1) \sum_{h=0}^{\ell} p_{m-h}^{m-h} i^h \binom{m-h}{\ell-h} (k-h) \dots (k-\ell+1) = 0.$$

Les polynômes F et ϕ sont liés par une certaine relation. Pour cela, on rappelle que :

$$\phi(\rho) \equiv \sum_{h=0}^{\text{Min}(k,m)} p_{m-h}^{m-h} i^{k-h} \rho(\rho-1) \dots (\rho-k+h+1).$$

Posons :

$$\psi(\rho) \equiv \begin{cases} \sum_{h=0}^k p_{m-h}^{m-h} i^{k-h} \rho(\rho-1) \dots (\rho-k+h+1) & \text{si } k \leq m ; \\ \sum_{h=0}^m p_{m-h}^{m-h} i^{k-h} (\rho-k+m) \dots (\rho-k+h+1) & \text{si } k \geq m. \end{cases}$$

Avec ces notations, on a :

$$\phi(\rho) \equiv \begin{cases} \psi(\rho) & \text{si } k \leq m ; \\ \rho(\rho-1) \dots (\rho-k+m+1) \psi(\rho) & \text{si } k \geq m ; \end{cases}$$

et le polynôme $F(r)$ s'écrit alors :

$$F(r) \equiv \begin{cases} i^k r(r-1) \dots (r-m+k+1) \psi(-1-r) & \text{si } k < m ; \\ i^k \psi(-1-r) & \text{si } k \geq m. \end{cases}$$

On fait l'hypothèse suivante :

$$(I') \begin{cases} \text{Aucune des racines } \rho_j, \text{ pour } j=1, \dots, \text{Min}(k,m), \text{ de l'équation } \psi(\rho) = 0 \\ \text{n'est un entier de } \mathbb{Z} \text{ et si } \text{Min}(k,m) \geq 2, \text{ aucune des différences } \rho_i - \rho_j, \\ \text{pour } 1 \leq i < j \leq \text{Min}(k,m), \text{ n'est un entier de } \mathbb{Z}. \end{cases}$$

On va montrer que si l'opérateur L vérifie la condition (I') , alors la dimension du noyau de L dans $W_k^{m,p}(0,T)$ est égale à $m - R_p$ où R_p est le nombre de racines de l'équation $\psi(\rho) = 0$ satisfaisant à $\text{Re } \rho > -m - p + k - \frac{1}{2}$.

Grâce à la condition (I') , on vérifie que l'équation (3.1) est du premier type de Fuchs en $t=0$ et admet un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}_+$ de la forme :

$$\begin{cases} \phi_s(t) = t^s \varphi_s(t) & \text{pour } 0 \leq s \leq m - k - 1 ; \\ \phi_{m-k-1+j}(t) = t^{-1-\rho_j} \varphi_{m-k-1+j}(t) & \text{pour } j=1, \dots, k ; \end{cases}$$

si $k < m$, et de la forme :

$$\phi_j(t) = t^{-1-\rho_j} \varphi_j(t) \quad \text{pour } j=1, \dots, m,$$

si $k \geq m$, où les ρ_j sont les racines de l'équation $\psi(\rho) = 0$ et où les φ_s sont des fonctions entières telles que $\varphi_s(0) = 1$. Il est alors facile de vérifier que la dimension du noyau de L est égale à $m - R_p$.

On montre maintenant que, si l'opérateur L vérifie la condition (I'), alors la codimension de $LW_k^{m+p}(0, T)$ dans $H^p(0, T)$ est égale à $r_p - R_p$.

Pour cela, il suffit d'évaluer la dimension de l'espace des g appartenant à $\text{Ker } L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R})$ à support ponctuel en $\{0\}$, c'est-à-dire, par transformation de Fourier, la dimension de l'espace des polynômes appartenant à $\text{Ker } \hat{L}^* \cap \hat{H}^{-p}(\mathbb{R})$.

L'opérateur L^* , adjoint formel de l'opérateur L , s'écrit :

$$L^*(t; D_t) u(t) = \sum_{h=0}^{\text{Min}(k, m)} P_j^{m-h} (D_t) \{t^{k-h} u(t)\},$$

avec

$$P_j^{m-h} (D_t) = \sum_{\ell=0}^h \sum_{j=h-\ell}^{m-\ell} \overline{p_j^{m-\ell}} \binom{j}{h-\ell} (k-\ell) \dots (k-h+1) (-i)^{\ell-h} D_t^{j-h+\ell},$$

pour $h=0, \dots, \text{Min}(k, m)$.

Les racines ρ_j^* de l'équation déterminante $\phi^*(\rho) = 0$ associée à L sont égales à :

$$\rho_j^* = -\overline{\rho_j} - m + k - 1$$

pour $j=1, \dots, k$.

On cherche à quelles conditions un polynôme $\hat{v}^*(\tau) = \sum_{\ell=0}^n c_\ell \tau^\ell$ est solution de $\hat{L}^* \hat{v}^* = 0$. Or :

$$\begin{aligned} \hat{L}^*(\tau; D_\tau) \hat{v}^*(\tau) &= \sum_{h=0}^{\text{Min}(k, m)} \sum_{j=0}^{m-h} P_j^{m-h} \tau^j \sum_{\ell=0}^n c_\ell (-D_\tau)^{k-h} \tau^\ell \\ &= \sum_{h=0}^{\text{Min}(k, m)} \sum_{j=0}^{m-h} P_j^{m-h} i^{k-h} \sum_{\ell=k-h}^n c_\ell \ell(\ell-1) \dots (\ell-k+h+1) \\ &\quad \tau^{\ell-k+h+j}, \end{aligned}$$

donc, nécessairement, $\phi^*(n) = 0$ ($\phi^*(n)$ est en effet le coefficient du terme de plus haut degré), c'est-à-dire que n doit être une racine entière ρ^* de $\phi^*(\rho^*) = 0$.

Ainsi, si $k \leq m$ et si la condition (I') est satisfaite, il n'y a pas de solution polynôme, autre que 0, appartenant à $\text{Ker } \hat{L}^* \cap \hat{H}^{-p}(\mathbb{R})$.

Si $k > m$, les polynômes de degré $0, 1, \dots, k-m-1$ sont solutions de $\hat{L}^* \hat{V}^* = 0$ ($\hat{L}^*$ est un opérateur différentiel d'ordre k n'ayant pas les termes D_t^j avec $j < k-m$) et, si la condition (I') est satisfaite, $\phi^*(\rho^*) = 0$ n'admet que $0, 1, \dots, k-m-1$ comme racines entières, ainsi les polynômes de $\text{Ker } \hat{L}^*$ forment un espace vectoriel de dimension $k-m$. D'autre part, un polynôme de degré ρ^* appartient à $\hat{H}^{-p}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\rho^* < p - \frac{1}{2}$, i.e. : si et seulement si $\rho^* = -\bar{p} - m + k - 1 < p - \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\rho > -m - p + k - \frac{1}{2}$. Il n'y a donc que les $r_p - R_p$ racines entières ρ_j de $\phi(\rho) = 0$ qui vérifient $\text{Re } \rho > -m - p + k - \frac{1}{2}$ et qui induisent des solutions polynômes appartenant à $\text{Ker } \hat{L}^* \cap \hat{H}^{-p}(\mathbb{R})$.

Finalement, la codimension de $LW_k^{m+p}(0, T)$ dans $H^p(0, T)$ est égale à $r_p - R_p$ et par suite, l'indice de l'opérateur L , opérant de $W_k^{m+p}(0, T)$ dans $H^p(0, T)$ est égal à $(m - R_p) - (r - R_p) = m - r_p$.

3ème étape : Calcul de l'indice de l'opérateur L dans le cas général.

Si l'opérateur L ne vérifie pas la condition (I'), il est facile de vérifier qu'il existe des nombres complexes ϵ_{m-h}^{m-h} , pour $1 \leq h \leq \text{Min}(k, m)$, aussi petits que l'on veut en module tels que :

(i) L'opérateur $L_\epsilon(t; D_t) \equiv L(t; D_t) + \sum_{h=1}^{\text{Min}(k, m)} \epsilon_{m-h}^{m-h} D_t^{m-h} \{t^{k-h}\}$ vérifie la condition (I') ;

(ii) L'équation déterminante, associée à l'opérateur L_ϵ , $\phi_\epsilon(\rho) = 0$ n'admet aucune racine sur la droite $\text{Re } \rho = -p - m + k - \frac{1}{2}$;

(iii) Le nombre de racines de l'équation $\phi_\epsilon(\rho) = 0$ vérifiant $\operatorname{Re} \rho > -p-m+k-\frac{1}{2}$ est égal à r_p .

De plus, si $|\epsilon_{m-h}^{m-h}|$, pour $1 \leq h \leq \min(k, m)$, est assez petit, l'opérateur L_ϵ de $W_k^{m+p}(0, T)$ dans $H^p(0, T)$ est un opérateur à indice dont l'indice est égal à celui de L . Mais d'après la 2ème étape, l'indice de L , dans les espaces considérés, est égal à $m-r_p$. Par suite, l'indice de l'opérateur L de $W_k^{m+p}(0, T)$ dans $H^p(0, T)$ est égal à $m-r_p$. Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.1.

3.2. Etude de l'opérateur L sur $(T, +\infty)$, $0 < T < +\infty$:

On va établir la proposition suivante :

Proposition 3.2 : L'opérateur L , considéré comme opérateur de $W_k^{m+p}(T, +\infty)$ dans $H^p(T, +\infty)$, est un opérateur à indice, son indice est égal à m_+ .

Démonstration : Selon la méthode indiquée dans le paragraphe 3.1 (1ère étape), il est facile de voir que l'opérateur L est linéaire continu surjectif de $W_k^{m+p}(T, +\infty)$ sur $H^p(T, +\infty)$.

Pour montrer que la dimension du noyau de L dans $W_k^{m+p}(T, +\infty)$ est égale à m_+ , on va établir un résultat général sur les équations différentielles à coefficients "presque constants".

Soit $A = A(D_t) = \sum_{p=0}^m a_p D_t^p$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients constants tel que le polynôme $A(\tau) = \sum_{p=0}^m a_p \tau^p$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On note m_+ le nombre de zéros à partie imaginaire positive de $A(\tau)$.

Soit $B = B(t; D_t) = \sum_{p=0}^{m-1} b_p(t) D_t^p$ un opérateur différentiel d'ordre $m-1$ au plus, à coefficients appartenant à $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et dont toutes les dérivées sont bornées sur $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Proposition 3.3 : Il existe $\epsilon > 0$ telle que : si pour tout t appartenant à $\mathbb{R}_+$, et $0 \leq p \leq m-1$, on a : $|b_p(t)| \leq \epsilon$, alors :

- (i) la dimension du noyau de $A+B$ dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ est égale à m_+ ;
- (ii) il existe une constante $c > 0$ et, pour tout entier $\ell \geq 0$, il existe une constante $c_\ell > 0$ telles que, si u appartient à $\text{Ker}_+(A+B) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$, alors :

$$|D_t^\ell u(t)| \leq c_\ell \cdot e^{-ct}$$

pour tout t appartenant à $\mathbb{R}_+$.

Cette proposition est en fait un cas particulier du théorème 3.2 de [7]. Néanmoins, dans ce cas, on peut en donner une démonstration simple.

Démonstration :

- (i) L'opérateur $\{A ; \gamma_0, \dots, \gamma_{m_+-1}\}$ étant un isomorphisme de $H^m(\mathbb{R}_+)$ sur $L^2(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^{m_+}$, l'opérateur $\{A+B ; \gamma_0, \dots, \gamma_{m_+-1}\}$ est aussi un isomorphisme de $H^m(\mathbb{R}_+)$ sur $L^2(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^{m_+}$ pourvu que ϵ soit assez petit. Par suite, $\text{Ker}_+(A+B) \cap H^m(\mathbb{R}_+)$ est de dimension m_+ .

Les coefficients de $B(t; D_t)$ étant de classe $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$, $\text{Ker}_+(A+B) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ est contenu dans $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$. Tout élément u de $\text{Ker}_+(A+B) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ peut être considéré comme une solution du problème :

$$\begin{cases} Au = f, \\ u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+}) \cap L^2(\mathbb{R}_+), \\ f(=-Bu) \in H^{-m+1}(\mathbb{R}_+). \end{cases}$$

Il en résulte, par prolongement à $\mathbb{R}$ et transformation de Fourier, que u appartient à $H^\infty(\mathbb{R}_+) (= \bigcap_s H^s(\mathbb{R}_+))$. Donc, $\text{Ker}_+(A+B) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ coïncide avec $\text{Ker}_+(A+B) \cap H^m(\mathbb{R}_+)$ et sa dimension est égale à m_+ .

- (ii) On fait le changement de fonction : $u(t) = e^{-ct} v(t)$, où c est une constante positive. La formule de Leibnitz donne :

$$D_t^p u(t) = e^{-ct} D_t^p v(t) + \sum_{q=0}^{p-1} \binom{p}{q} (ic)^{p-q} e^{-ct} D_t^q v(t),$$

donc,

$$\{A(D_t) + B(t; D_t)\} \{u(t)\} = e^{-ct} \{A(D_t) + c(t; D_t)\} \{v(t)\},$$

où

$$\begin{aligned} c(t; D_t) = B(t; D_t) + \sum_{p=1}^{m-1} (a_p + b_p(t)) \sum_{q=0}^{p-1} \binom{p}{q} (ic)^{p-q} D_t^q + \\ + a_m \sum_{q=0}^{m-1} \binom{m-1}{q} (ic)^{m-1-q} D_t^q, \end{aligned}$$

l'opérateur $c(t; D_t)$ est du même type que l'opérateur $B(t; D_t)$ et vérifie des propriétés analogues dès que c est assez petit. Il suffit maintenant d'appliquer les résultats de (i) à l'opérateur $A(D_t) + c(t; D_t)$.

Remarque 3.3 : Par une méthode analogue, on peut montrer que toute fonction u appartenant à $\text{Ker}_+(A+B) \cap C^\infty(\mathbb{R}_+)$ et n'appartenant pas à $L^2(\mathbb{R}_+)$ est à croissance rapide.

On peut maintenant démontrer que la dimension du noyau de L dans $W_k^{m+p}(T, +\infty)$ est égale à m_+ . Remarquons déjà qu'il suffit de le montrer pour T grand.

On écrit l'opérateur $L(t; D_t)$ sous la forme :

$$L(t; D_t) = t^k (A(D_t) + B(t; D_t)),$$

avec

$$A(D_t) = P^m(D_t)$$

et

$$B(t; D_t) = \frac{1}{t^k} L(t; D_t) - P^m(D_t).$$

Chacun des coefficients de l'opérateur $B(t; D_t)$ est un polynôme en $\frac{1}{t}$ sans terme constant. Il existe donc $T > 0$, assez grand, tel que sur l'intervalle $(T, +\infty)$, on puisse appliquer la proposition 3.3. On en déduit facilement que la dimension du noyau de L dans $W_k^{m+p}(T, +\infty)$ est exactement m_+ . Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.2.

3.3. Démonstration du théorème 3.1.

On considère l'application :

$$(u_1, u_2) \longmapsto (Lu_1, Lu_2) : W_k^{m+p}(0, T) \times W_k^{m+p}(T, +\infty) \longrightarrow H^p(0, T) \times H^p(T, +\infty).$$

Il résulte des propositions 3.1 et 3.2 que cette application est à indice, d'indice $m_+ + (m-r_p)$.

Par ailleurs, l'espace $W_k^{m+p}(0, +\infty)$ peut être considéré comme un sous-espace fermé de codimension $m+p$ dans $W_k^{m+p}(0, T) \times W_k^{m+p}(T, +\infty)$. De même, l'espace $H^p(0, +\infty)$ peut être considéré comme un sous-espace fermé de codimension p dans $H^p(0, T) \times H^p(T, +\infty)$.

Par suite, l'opérateur L , considéré comme opérateur de $W_k^{m+p}(0, +\infty)$ dans $H^p(0, +\infty)$, est un opérateur à indice dont l'indice est égal à : $(m-r_p) + m_+ - (m+p) + p = m_+ - r_p$, ce qu'il fallait démontrer.

Du théorème 3.1, on déduit que l'image $LW_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}_+)$ est égale à :

$$LW_k^{m+p}(\mathbb{R}_+) = \{f \in H^p(\mathbb{R}_+) ; \forall g \in \text{Ker } L^* \cap H_0^{-p}(\mathbb{R}_+), \langle f, \bar{g} \rangle_{H^p(\mathbb{R}_+) \times H_0^{-p}(\mathbb{R}_+)} = 0\}.$$

Désignons par ℓ_p la dimension de l'espace $\text{Ker } L^* \cap H_0^{-p}(\mathbb{R}_+)$. La dimension du noyau dans $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ est donc égale à $m_+ - r_p - \ell_p$.

Concernant cet entier ℓ_p , on donne les remarques suivantes :

Remarque 3.4. : Si q est un entier ≥ 0 tel que l'équation $\phi(p) = 0$ n'ait pas de zéro dans la bande :

$$-(p+q) - m + k - \frac{1}{2} \leq \text{Re } p \leq -p - m + k - \frac{1}{2},$$

alors on a vu (cf. corollaire 2.1) que :

$$\text{Ker } L^* \cap H^{-(p+q)}(\mathbb{R}) = \text{Ker } L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R}).$$

Il en résulte que :

$$\text{Ker } L^* \cap H_0^{-(p+q)}(\mathbb{R}_+) = \text{Ker } L^* \cap H_0^{-p}(\mathbb{R}_+),$$

et donc $\ell_{p+q} = \ell_p$.

Remarque 3.5 : De manière générale, l'entier k_p peut être atteint par des conditions algébriques portant sur l'opérateur L à partir de la proposition suivante :

Proposition 3.4 : Soit u appartenant à $\text{Ker } L \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) La distribution u est à support dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$).
- (ii) La transformée de Fourier $\hat{u}$ de u se prolonge en une fonction holomorphe dans un voisinage de $\text{Im } \tau \leq 0$ (resp. $\text{Im } \tau \geq 0$).

(On désigne par $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$).

Démonstration :

(i) Si u est une distribution de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ à support dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, sa transformée de Fourier $\hat{u}$ se prolonge en une fonction holomorphe dans la demi-espace $\text{Im } \tau < 0$. Or, de plus, ici, $\hat{u}$ appartient à $\text{Ker } \hat{L}$, donc $\hat{u}$ est holomorphe dans un voisinage de l'axe réel dans $\mathbb{C}$.

(ii) La fonction $\hat{u}$ appartient à $\text{Ker } \hat{L}$ et peut donc être majorée en module par un polynôme dans un voisinage de l'infini. Par suite, si $\hat{u}$ est supposée holomorphe dans $\text{Im } \tau < 0$, on en déduit que u est une distribution à support dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (cf. [6]).

On donne maintenant les résultats de régularité associés aux opérateurs L :

Corollaire 3.1 : Soient p et q deux entiers ≥ 0 tels que l'équation $\phi(\rho) = 0$ n'ait pas de zéro dans la bande :

$$-(p+q) - m + k - \frac{1}{2} \leq \text{Re } \rho \leq -p - m + k - \frac{1}{2}.$$

Si u appartient à $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ et si Lu appartient à $H^{p+q}(\mathbb{R}_+)$, alors u appartient à $W_k^{m+p+q}(\mathbb{R}_+)$. En particulier, on a :

$$\text{Ker}_+ L \cap W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+) = \text{Ker}_+ L \cap W_k^{m+p+q}(\mathbb{R}_+).$$

On en déduit :

Corollaire 3.2 : Soit p un entier ≥ 0 tel que l'équation $\phi(p) = 0$ n'ait pas de zéro dans le demi-espace : $\text{Re } p \leq -p - m + k - \frac{1}{2}$.

Si u appartient à $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ et si Lu appartient à $H^\infty(\mathbb{R}_+)$ ($= \bigcap_s H^s(\mathbb{R}_+)$), alors u appartient à $W_k^\infty(\mathbb{R}_+) = \{u \in H^\infty(\mathbb{R}_+) ; t^k u \in H^\infty(\mathbb{R}_+)\}$. En particulier, on a :

$$\text{Ker}_+ L \cap W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+) = \text{Ker}_+ L \cap W_k^\infty(\mathbb{R}_+).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable". A paraître au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.
- [2] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une ou plusieurs variables". Séminaire Goulaouic-Schwartz 1970-1971. Ecole Polytechnique. Séance du 24 mars 1971.
- [3] E.A. CODDINGTON and N. LEVINSON : "Theory of ordinary differential equations." Mc. Graw-Hill, New-York (1955).
- [4] J.L. LIONS et E. MAGENES : "Problèmes aux limites non homogènes". Dunod - Tome 1 - PARIS 1968.
- [5] HARDY - LITTLEWOOD - POLYA : "Inequalities". Cambridge University. Press. 1967.
- [6] L. SCHWARTZ : "Théorie des distributions". Hermann - Paris 1966.
- [7] M.I. VISIK and V.V. GRUSIN : "On a class of higher order degenerate elliptic equations". Math. U.S.S.R. Sbornik - Vol. 8 (1969), n° 1.
- [8] M.I. VISIK and V.V. GRUSIN : "Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain". Math. U.S.S.R. Sbornik - Vol. 9 - (1969) - n° 4.