

JEAN PELLAUMAIL

Une preuve de l'existence d'un relèvement

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1970-1971, fascicule 1

« Probabilités », , p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1970-1971__1_1_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE PREUVE DE L'EXISTENCE D'UN RELEVEMENT *

A - 1 : Introduction :

Le but essentiel de cette première partie est de prouver le théorème A - 7, c'est-à-dire l'existence d'un relèvement (lifting) dans le cas où la mesure considérée est σ -finie et complète.

La méthode générale utilisée est celle des "densités", méthode introduite par von NEUMANN dans [8] et reprise, dans le cadre général, par MAHARAM dans [5]. Cette méthode n'utilise pas le théorème de Krein-Milmann (contrairement à la méthode proposée dans [3] par A. et C. IONESCU-TULCEA). Par contre, pour alléger la démonstration, nous utiliserons un cas particulier du théorème de convergence des martingales (cf., par exemple, [7] - V - T17 - a)).

De façon plus précise, nous utiliserons les techniques proposées dans [7] - VIII - 11 et dans [10] - théorème 5. Dans [7] - VIII - 11, on ne prouve pas la "multiplicativité" du relèvement : en particulier, on ne prouve pas que le relèvement d'une fonction indicatrice est une fonction indicatrice. Dans [10] on n'utilise pas le théorème de convergence des martingales et on prouve un théorème plus général que celui énoncé ici : par contre, la démonstration complète est nettement plus longue que celle proposée ici.

* Par Jean PELLAUMAIL, Maître-Assistant, à l' I. N. S. A. de Rennes.
Novembre 1970.

Nous utiliserons le plan suivant :

- 2 - Définition d'un relèvement.
- 3 - Définition d'une algèbre de relèvement associée à un relèvement.
- 5 - Equivalence entre l'existence d'un relèvement et d'une algèbre de relèvement.
- 4 - On peut toujours prolonger une algèbre de relèvement qui n'est pas "maximale".
- 6 - L'existence d'une "densité inférieure" implique l'existence d'une algèbre de relèvement.
- 7 - Existence d'un relèvement (théorème fondamental).

A - 2 : Définition d'un relèvement (lifting).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ un espace mesuré. On appelle relèvement une application ρ de $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, m)$ dans $\mathcal{B}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, m)$ qui satisfait aux conditions suivantes :

- (i) $\rho(1_\Omega) = 1_\Omega$
- (ii) $\rho(f)$ appartient à la classe d'équivalence de f pour l'égalité presque sûre.
- (iii) $\rho(f + \lambda g) = \rho(f) + \lambda \rho(g)$
- (iv) $\rho(f \cdot g) = \rho(f) \cdot \rho(g)$
- (v) $f \geq 0 \Rightarrow \rho(f) \geq 0$

A - 3 : Algèbre de relèvement (lemme et définition).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ un espace mesuré et ρ un relèvement défini sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, m)$. Alors, pour tout élément A de $\mathcal{F}$, $\rho(1_A)$ est une fonction indicatrice : de plus, si on pose $1_{\rho^{-1}(A)} = \rho(1_A)$, $\rho^{-1}(\mathcal{F})$ est une algèbre satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- (i) $A \in \rho^{-1}(\mathcal{F})$ et $m(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset$
- (ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists B \in \rho^{-1}(\mathcal{F})$ avec $m(A \Delta B) = 0$

Si une algèbre satisfait à ces deux conditions, on dira que c'est une algèbre de relèvement relativement à $(\Omega, \mathcal{F}, m)$.

Preuve :

Soit A élément de $\mathcal{F}$. On a $\rho(1_A) + \rho(1_{\Omega \setminus A}) = \rho(1_{\Omega}) = 1_{\Omega}$

et $\rho(1_A) \cdot \rho(1_{\Omega \setminus A}) = \rho(1_A \cdot 1_{\Omega \setminus A}) = \rho(1_{\emptyset}) = 1_{\emptyset}$

Donc $[\rho(1_A)](\omega) \neq 0 \Rightarrow [\rho(1_{\Omega \setminus A})](\omega) = 0 \Rightarrow [\rho(1_A)](\omega) = 1$

Donc $\rho(1_A)$ est une fonction indicatrice.

De plus, $1_B = \rho(1_A)$ et $m(B) = 0 \Rightarrow m(A) = 0 \Rightarrow \rho(1_A) = 1_{\emptyset}$

ce qui prouve (i). Enfin, soit A élément de $\mathcal{F}$ et

$1_B = \rho(1_A) \Rightarrow m(A \Delta B) = 0$ ce qui prouve (ii).

A - 4 . Proposition :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ un espace mesuré, la mesure m étant supposée positive et finie. Soit $\mathcal{N}^0$ la famille des ensembles de mesure nulle. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre contenue dans $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{A} \cap \mathcal{N}^0 = \{\emptyset\}$ et telle que la tribu $\mathcal{G}$ engendrée par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}^0$ coïncide avec l'algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}^0$ (c'est-à-dire que $\mathcal{A}$ est une algèbre de relèvement relativement à $(\Omega, \mathcal{G}, m)$). Si $\mathcal{G}$ est distincte de $\mathcal{F}$, il existe une algèbre $\mathcal{B}$ contenue dans $\mathcal{F}$, contenant $\mathcal{A}$ et distincte de $\mathcal{A}$, telle que $\mathcal{B} \cap \mathcal{N}^0 = \{\emptyset\}$ et telle que la tribu $\mathcal{H}$ engendrée par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{N}^0$ coïncide avec l'algèbre engendrée par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{N}^0$ (c'est-à-dire que $\mathcal{B}$ est une algèbre de relèvement relativement à $(\Omega, \mathcal{H}, m)$).

Preuve : Soit B un élément de $(\mathcal{F} \setminus \mathcal{G})$. Soit c (resp d) la borne supérieure (resp inférieure) des $m(A)$ pour A élément de $\mathcal{G}$ et A contenu (resp. contenant) presque sûrement B. Puisque $\mathcal{G}$ est une tribu, il existe C' et D' éléments de $\mathcal{G}$ tels que ces bornes c et d soient atteintes, donc il existe C et D éléments de $\mathcal{A}$ tels que $m(C) = c$, $m(D) = d$ et C (resp. D) est contenu (resp. contient) presque sûrement B.

Soit $B' = [(B \cup C) \cap D]$. On a $m(B \Delta B') = 0$. Soit $\mathcal{A}'$ l'algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ et B'. On a $\mathcal{A}' \cap \mathcal{N}^0 = \{\emptyset\}$: en effet, H appartient à $\mathcal{A}'$ si et seulement si $H = (E \cap B') \cup (F \setminus B')$ avec E et F éléments

de $\mathcal{A}$; si $m(H) = 0$, on a $m(E \cap B') = 0$ et donc $E \cap B' = \emptyset$ (par définition de d) ; de même $m(F \setminus B') = 0$ implique $F \subset B'$ (par définition de c) donc $H = \emptyset$.

Par ailleurs, la tribu engendrée par $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{N}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$, $\mathcal{N}$ et B' . Enfin $\mathcal{A}'$ contient $\mathcal{A}$ (il suffit de prendre $E = F$ dans la définition de H précédente) et $\mathcal{A}'$ est distincte de $\mathcal{A}$ car $\mathcal{A}'$ contient B' et B' n'appartient pas à $\mathcal{A}$ puisque B n'appartient pas à $\mathcal{G}$ et que $m(B \Delta B') = 0$

C. Q. F. D.

5 : Proposition (cf. [4] définition 3 page 36).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ un espace mesuré et $\mathcal{A}$ une algèbre de parties de Ω , contenue dans $\mathcal{F}$ et telle que :

(I) $A \in \mathcal{A}$ et $m(A) = 0$ implique $A = \emptyset$

(II) $A \in \mathcal{F}$ implique qu'il existe $B \in \mathcal{A}$ tel que $m(A \Delta B) = 0$.

Alors il existe un ^{relèvement} (unique) p défini sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, m)$

et tel que $p(1_A) = 1_A$ si A appartient à $\mathcal{A}$.

Preuve :

Soit $\mathcal{E}$ la famille des fonctions étagées appartenant à $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, m)$.

$\mathcal{E}$ est dense dans $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, m)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Etant donné

$f = \sum_{i=1}^k a_i 1_{A_i}$ élément de $\mathcal{E}$, soit $p(f) = \sum_{i=1}^k a_i 1_{B_i}$ avec, pour

tout i , B_i élément de $\mathcal{A}$ et $m(B_i \Delta A_i) = 0$. On vérifie immédiatement

que $p(f)$ ne dépend pas de l'écriture de f . De plus $\|p(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$,

donc l'application p est continue, donc elle se prolonge, de façon

unique, en une application p définie sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, m)$. Ce prolonge-

ment est linéaire et multiplicatif puisqu'il est linéaire et multipli-

catif sur $\mathcal{E}$ (vérification immédiate).

6 : Proposition (cf. [10] théorème 5).

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F}$ une algèbre de parties de Ω . Soit $\mathcal{N}$

une famille de parties de Ω , contenue dans $\mathcal{F}$, stable pour la

réunion finie et héréditaire (c'est-à-dire que $\{A \in \mathcal{N} \text{ et}$

$B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{N}\}$). Soit d une application de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ telle

que, quels que soient A et B éléments de $\mathcal{F}$

(I) $[d(A) \Delta A] \in \mathcal{N}$

(II) $[A \Delta B] \in \mathcal{N} \Rightarrow d(A) = d(B)$

(III) $d(A \cap B) = d(A) \cap d(B)$

(IV) $d(\emptyset) = \emptyset$

(V) $\{\Omega \setminus [d(A) \cup d(\Omega \setminus A)]\} \in \mathcal{N}$

Cette condition (V) est satisfaite si $\mathcal{N}$ est la famille des ensembles de mesure nulle pour une mesure m .

Alors il existe une algèbre $\mathcal{A}$ de parties de $\mathcal{F}$ telle que :

$$(i)' \quad A \in \mathcal{A} \Rightarrow d(A) \subset A$$

$$(ii)' \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad \exists A' \in \mathcal{A} \text{ avec } (A \Delta A') \in \mathcal{N}$$

De plus, si $d(\Omega) = \Omega$, on a :

$$(iii)' \quad \mathcal{N} \cap \mathcal{A} = \{ \emptyset \}$$

Preuve :

Notons d'abord que (i)' et $d(\Omega) = \Omega$ implique (iii)'.
 En effet, $A \in \mathcal{N} \Rightarrow \Omega \Delta (\Omega \setminus A) \in \mathcal{N} \Rightarrow d(\Omega \setminus A) = d(\Omega) = \Omega$
 donc, $A \in \mathcal{A} \Rightarrow (\Omega \setminus A) \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega = d(\Omega \setminus A) \subset (\Omega \setminus A) \subset \Omega$
 soit $\Omega \setminus A = \Omega$ soit $A = \emptyset$.

Notons à ce sujet, que le théorème 5 de [10] est inexact

puisque'on ne suppose pas $d(\Omega) = \Omega$.

Par ailleurs, soit X la famille des algèbres $\mathcal{B}$ satisfaisant à la condition (i)'. X n'est pas vide puisque $\{ \emptyset, \Omega \} \in X$. Soit $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ une chaîne maximale dans X pour la relation d'inclusion; alors,

$\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$ est un élément maximal donc (lemme de Zorn) X possède un élément maximal soit $\mathcal{E}$. On veut prouver que $\mathcal{E}$ satisfait à

(iii)'. Soit donc $A \in \mathcal{F}$. On pose $A' = \bigcup_{C \in \mathcal{E}} [d(C \cup A) \setminus C]$. On veut prouver $A' \in \mathcal{E}$ et $(A \Delta A') \in \mathcal{N}$ (ce qui prouvera (iii)').

Pour cela, nous allons raisonner en plusieurs étapes : Soit $A^c = \Omega \setminus A$

1°) Si on pose $(A^c)' = \bigcup_{C \in \mathcal{E}} [d(C \cup A^c) \setminus C]$ on a $(A^c)' \cap A' = \emptyset$

En effet, si H et K appartiennent à $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} [d(H \cup A) \setminus H] \cap [d(K \cup A^c) \setminus K] &= d(H \cup A) \cap d(K \cup A^c) \cap H^c \cap K^c \\ \text{soit, d'après (ii),} &= d[(H \cup A) \cap (K \cup A^c)] \cap (H \cup K)^c \\ &\subset d(H \cup K) \cap (H \cup K)^c \end{aligned}$$

soit, d'après (i)', $= \emptyset$

2°) $d(A) \subset A'$ puisque $\emptyset \in \mathcal{E}$ et par définition de A' . De même

$d(A^c) \subset (A^c)'$. Donc $[A' \setminus d(A)] \in \mathcal{N}$ d'après (v) et d'après

$$[A' \setminus d(A)] \subset \Omega \setminus [d(A) \cup d(A^c)] \quad (\text{cf. 1°})$$

On a donc $(A \Delta A') \in \mathcal{N}$ (cf. (i)).

3°) Si F appartient à $\mathcal{E}$, $d(F \cup A) \subset (F \cup A')$ (par définition de A'). De même, $d(F \cup A^c) \subset [F \cup (A')^c]$.

4°) Soit $\mathcal{E}'$ l'algèbre engendrée par $\mathcal{E}$ et A' , c'est-à-dire la famille des $H \equiv (A' \cap E) \cup (F \setminus A')$ avec E et F éléments de $\mathcal{E}$. On a

$$d(H) = d[(A \cap E) \cup (F \setminus A)] \quad \text{d'après (ii) et } (A \Delta A') \in \mathcal{N}_0 \text{ cf 2°)}$$

$$= d[(E \cup A^c) \cap (F \cup A)]$$

$$= d(E \cup A^c) \cap d(F \cup A) \quad \text{d'après (iii)}$$

$$\subset [E \cup (A')^c] \cap (F \cup A') \quad \text{d'après le 3°)}$$

$$\subset [E \cup (A')^c] \cap (F \cup A') \quad \text{d'après le 1°)}$$

$$= (E \cap A') \cup (F \setminus A') = H \quad \text{ce qui prouve (i)'}$$

donc $\mathcal{E}'$ appartient à X et $\mathcal{E}'$ contient $\mathcal{E}$ donc $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$ (puisque $\mathcal{E}$ est un élément maximal) donc A' appartient à $\mathcal{E}$ ce qui achève la démonstration.

Théorème (cf [7] théorème VIII - 11 page 195)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ un espace mesuré dont la mesure est supposée positive, σ -finie et complète. Alors il existe un ~~liffing~~^{relèvement} défini sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, m)$.

Preuve :

Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une partition $\mathcal{F}$ -mesurable et dénombrable de Ω telle que, pour tout n , $m(A_n) < +\infty$. Soit $\mathcal{F}_n$ la famille des éléments de $\mathcal{F}$ qui sont contenus dans A_n . Supposons que, pour tout n , on sache construire un ~~liffing~~^{relèvement} ρ_n défini sur $L^\infty(A_n, \mathcal{F}_n, m)$. Etant donné f élément de $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, m)$, on pose :

$$\rho(f) = \sum_{n \geq 0} \rho_n(f \cdot 1_{A_n})$$

Alors, on vérifie immédiatement que ceci définit un liffing sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, m)$. Autrement dit, il suffit de prouver l'existence d'un liffing dans le cas où la mesure m est finie ce que nous supposons désormais.

Soit $\mathcal{N}$ la famille des éléments de $\mathcal{F}$ de mesure nulle.

Soit $\mathcal{Y}$ la famille des algèbres $\mathcal{A}$ contenues dans $\mathcal{F}$, telles que

$\mathcal{A} \cap \mathcal{N}^0 = \{\emptyset\}$, et telles que la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ soit contenue dans l'algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}^0$. Cette famille Y n'est pas vide puisqu'elle contient $\{\emptyset, \Omega\}$. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une "chaîne" (chaîne pour la relation d'inclusion) maximale dans Y . On veut, d'abord, prouver que cette chaîne admet un élément maximal.

1er cas :

Supposons que I n'admette pas de suite cofinale. Soit $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

Si A appartient à la tribu engendrée par $\mathcal{A}$, il appartient à la tribu engendrée par l'un des $\mathcal{A}_i$ et donc à l'algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}^0$. Donc $\mathcal{A}$ est un élément maximal.

2ème cas :

Supposons que I admette une suite cofinale et soit $(\mathcal{A}_n)_{n > 0}$ la suite d'éléments de Y associée. Soit $\mathcal{A} = \bigcup_{n > 0} \mathcal{A}_n$ et $\mathcal{G}$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}^0$. Soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{N}^0$: par définition de Y , $\mathcal{F}_n$ coïncide avec l'algèbre engendrée par $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{N}^0$: on peut donc appliquer la proposition A-5 c'est-à-dire qu'il existe un lifting p_n défini sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_n, m)$ tel que, $p_n(1_A) = 1_A$ si $A \in \mathcal{F}_n$. Pour tout élément A de $\mathcal{G}$, soit :

$g_n(A) = p_n[E(1_A | \mathcal{F}_n)]$. Alors g_n est une martingale, ([7] - V - 17) par conséquent $g_n(A)$ converge presque sûrement vers 1_A . Posons :

$d(A) = \text{domaine où } \liminf g_n(A) = 1 = \text{domaine où } \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(A) = 1$

Compte tenu de $0 \leq g_n(A) = 1 - g_n(\Omega \setminus A) \leq 1$, on vérifie immédiatement que d satisfait, relativement à $\mathcal{G}$ et $\mathcal{N}^0$, aux conditions

(i) à (v) de la proposition A-6 : en particulier, la condition (iii)

découle de ce que $1_{A \cap B} \leq 1_A$ donc $d(A \cap B) \subset d(A) \cap d(B)$

réciroquement $1_{A \cap B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cup B}$; si ω appartient à $d(A) \cap d(B)$

cela implique que $\lim [g_n(A)](\omega) = 1$ et $\lim [g_n(B)](\omega) = 1$ donc

$\lim g_n(A \cup B)(\omega) = 1$ donc $\lim g_n(A \cap B)(\omega) = 1$ donc ω appartient

à $d(A \cap B)$. On a donc bien $d(A \cap B) = d(A) \cap d(B)$.

D'après la proposition A - 6, on sait donc qu'il existe une algèbre $\mathcal{A}'$ satisfaisant aux conditions (I)', (II)' et (III)' de cette proposition A - 6. Cette algèbre contient toutes les algèbres $\mathcal{A}_n$ puisque, si A appartient à $\mathcal{A}_n$, $d(A) = A$. On a donc prouvé l'existence d'un élément maximal $\mathcal{A}'$ dans le 2ème cas.

Il résulte alors de la proposition A - 4 que la tribu engendrée par cet élément maximal et par $\mathcal{A}^0$ coïncide avec $\mathcal{F}$. C. Q. F. D.

B I B L I O G R A P H I E

- (1) BOURBAKI Espaces vectoriels topologiques - Edition
Initiale Hermann - Paris (1955).
- (1)bis BOURBAKI Intégration. Chapitre IX (1969)
- (2) DUNFORD-SCHWARTZ Linear Operators - Part 1
John Wiley Sons - (1967)
- (3) IONESCU-TULCEA On the lifting property - I - J. Math. Anal.
Appl. 3, 537-546 (1961).
- (4) IONESCU-TULCEA Topics in the theory of lifting.
Springer - Verlag. (1969).
- (5) MAHARAM D. On a theorem of Von Neumann
Proc. Am. Math. soc 9 - N° 6 - 987-994 (1958).
- (6) METIVIER Martingales à valeurs vectorielles - Appli-
cations à la dérivation des mesures vectoriel-
les.
Ann. Inst. Fourier, Grenoble - 17, 2 (1967)
175-208.
(6 bis) Voir ci-Dessous
- (7) MEYER Probabilités et potentiel - Hermann (1966).
- (8) J. von NEUMANN Algebraische Repräsentanten der Funktionen
bis auf eine Menge vom Masse Null, J. Reine
Angew.
Math. vol. 165 (1931) p 109-115.
- (9) PELLAUMAIL Sur la dérivation des mesures vectorielles.
C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, p. 904-907 (1969)
- (10) SION A proof of the lifting theorem.
Department of Mathematics - The University
of British Columbia (1970).
- (6)bis METIVIER Notions fondamentales de la théorie des
Probabilités DUNOD (1968).