PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

G. BRAY

À propos de la généralisation d'un résultat de théorie ergodique à des espaces uniformément convexes

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1970-1971, fascicule 1
« Probabilités », , p. 155-176
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1970-1971___1_155_0>

A PROPOS DE LA GENERALISATION D'UN RESULTAT DE THEORIE ERGODIQUE A DES ESPACES UNIFORMEMENT CONVEXES

PAR

Monsieur G. BRAY *

INTRODUCTION. -

En théorie ergodique, nous avons le résultat suivant [3].

Soit T une contraction unitaire sur un espace de Hilbert, si la suite $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers une projection P alors pour toute suite croissante d'entiers $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la moyenne arithmétique $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^{k_i}x$ converge fortement vers P (x).

M. Sucheston m'a demandé d'étudier la généralisation de ce résultat au cas d'une contraction opérant sur un espace uniformément convexe.

Ces résultats sont généralisés dans deux cas :

1. A une isométrie inversible sur un espace E uniformément c dont le dual E^* est strictement convexe, l'application de dualité J de E dans E^* étant faiblement continue. Nous avons remarqué qu'il était poss. dans ce cas de définir le J - adjoint d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$, cette n. présentant des analogies avec la notion d'adjoint dans les espaces de Hilbert. Cette notion est déjà implicitement contenue dans les travaux de livant ([11] , [12]).

2. Cas d'une contraction normale sur un espace de Hilbert.

Depuis que cette étude a été commencée, de nombreux résultats dans cette direction ont été obtenus, en particulier par Lee Kenneth J. [13] et Mustafa Akcoglu et Louis Sucheston [14] . Il semble cependant qu question posée par le Professeur Louis Sucheston reste ouverte.

Le paragraphe IV donne une réponse affirmative à une question posée par le Professeur S. Kakutani au Congrès de théorie ergodique de Paimpol de 1971.

* Laboratoire de Probabilités - Equipe associée du CNRS n° 250 - Rennes -

I - NOTION D'OPERATEUR J - ADJOINT DANS UN ESPACE UNIFORMEMENT CONVEXE

1 - Résultats préliminaires :

1.1 On pourra trouver les définitions et résultats exposés dans ce paragraphe principalement dans [3] [2] et [1]

Définition 1 : Un espace de Banach est strictement convexe si

$$||x + y|| = ||x|| + ||y|| \Longrightarrow y = \lambda x \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Corollaire 1 : Un espace de Banach E réel est strictement convexe si et seulement si tout $x^* \in E^*$ atteint sa norme en au plus un point de la boule unité de E.

Définition 2 : Un espace de Banach E est uniformément convexe si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que :}$$

$$\forall x, y \in E \; : \; ||x|| = ||y|| = 1$$

$$||x - y|| \geq \varepsilon \Longrightarrow ||x + y|| \leq 2(1 - \delta(\varepsilon))$$

Définition 3 : Un espace de Banach E est uniformément lisse si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que si } ||x|| = ||y|| = 1$$

$$||x - y|| < \delta(\varepsilon) \qquad ||x + y||(1 + \varepsilon) \geq ||x|| + ||y||$$

Propriété 1 : Le dual d'un espace de Banach uniformément convexe (resp. uniformément lisse) est uniformément lisse (resp. uniformément convexe).

Propriété 2 : Un espace de Banach E uniformément convexe est réflexif et strictement convexe.

Propriété 3 : Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace E uniformément convexe convergeant faiblement vers x_o converge fortement vers x_o si et seulement si $\lim\limits_{n \to \infty} ||x_n|| = ||x_o||$.

1.2 Applications de dualité :

R^+ désigne l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, E est un espace de Banach, E^* son dual, si $x \in E$ et $x^* \in E^*$ (x^*, x) désigne la dualité entre E^* et E.

Définition 4 : Soit φ une application continue de R^+ dans R^+ strictement croissante telle que $\varphi(0) = 0$ et $\lim\limits_{r\to\infty}\varphi(r) = \infty$.

Une application J de E dans E^* est dite application de dualité (associée à φ) si et seulement si

$$\forall u \in E \qquad (J(u), u) = \|J u\| \, \|u\|$$

$$\|J(u)\| = \varphi(\|u\|)$$

Propriétés : a) Pour tout espace de Banach E il existe une application de dualité de E dans E^* (non nécessairement univoque) associée à φ.

b) Si E^* est strictement convexe, il existe exactement une application de dualité J pour toute fonction φ vérifiant les conditions de la définition 4.

c) Si E est réflexif et strictement convexe alors l'application de dualité correspondant à chaque φ est continue de E dans la topologie faible E^*.

Définition 5 : Une application de dualité J sera dite faiblement continue si elle est continue de E muni de sa topologie faible dans E^* muni de sa topologie faible.

Définition 6 : Dans un espace de Banach X x sera dit orthogonal à y si et seulement si :

$\forall k \in C \quad \|x + ky\| \geq \|x\|$ (Nous noterons $x \longmapsto y$)

Cette notion n'est pas symétrique en général.

Propriétés : x est orthogonal à y si et seulement si

il existe $x_0^* \in X^*$ tel que $(x_0^*, x) = \|x_0^*\| \, \|x\|$

et $(x_0^*, y) = 0$

(cf. 7 Th. 2.1 et § 5)

Corollaire : Si E est un espace de Banach et E^* strictement convexe alors

$x \hookrightarrow y$ si et seulement si

$$(Jx, y) = 0$$

Si $x \hookrightarrow y$ on dira aussi que x est J - orthogonal à y.

2 - Notion d'opérateur J - adjoint dans un espace uniformément convexe.

Soit E un espace uniformément convexe, son dual E^* étant strictement convexe. Soit J l'application de dualité de E dans E^* associée à une fonction φ possédant les propriétés de la définition 4.

Définition 2.1 : Soit T un opérateur de $\mathcal{L}(E)$; si $J^{-1}\,{}^tT\,J$ appartient à $\mathcal{L}(E)$ on dira que $J^{-1}\,{}^tT\,J$ est l'opérateur J - adjoint de T (noté $\tilde{T}$).

Définition 2.2 : Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ admettant un opérateur J - adjoint :

$$\tilde{T} = J^{-1}\,{}^tT\,J$$

a) T sera dit J - normal $\Longleftrightarrow T\tilde{T} = \tilde{T}T$

b) T sera dit J - autoadjoint $\Longleftrightarrow T = \tilde{T}$

c) T sera dit J - unitaire $\Longleftrightarrow T\tilde{T} = \tilde{T}T = I$

Proposition 2.1 : Si T est une isométrie de E sur E alors T est J - unitaire.

Démonstration : En effet, $J\,T^{-1}x$ est l'unique forme linéaire de E^* telle que

$$(J\,T^{-1}x,\ T^{-1}x) = ||J\,T^{-1}x||\ \ ||T^{-1}x|| = ||JT^{-1}x||\ \ ||x||$$

et $||JT^{-1}x|| = \varphi(\ ||T^{-1}x||\ ) = \varphi(\ ||x||\ )$

or $({}^tT\,Jx, T^{-1}x) = (J\,x,\ x) = \varphi(\ ||x||\ )\ ||x||$

et $||{}^tT\,Jx|| < ||Jx|| = \varphi(||x||)$

or $||x||\ ||Jx|| = (Jx,x) = ({}^tT\,J,\ x\,T^{-1}x) \leq ||{}^tT\,Jx||\,||x|| \leq ||Jx||\ ||x||$

d'où $||{}^tT\ \ Jx|| = ||Jx|| = \varphi(\ ||x||\ )$

et en vertu de l'unicité de la forme linéaire $J\,T^{-1}x$:

$$\forall\, x \in E \qquad J\,T^{-1}x = {}^tT\,J\,x$$

d'où $T^{-1} = J^{-1}\,{}^t\,T\,J$ i. e. T est J - unitaire.

Remarque : Cette proposition met en évidence le fait qu'il existe des opérateurs ayant un J - adjoint :

Dans [12] , F.E. Sullivan et H.B. Cohen ont introduit dans un espace de Banach la notion de $\mathfrak{F}$- projection dont nous rappelons la définition.

Définition 2.3 : Soit $\mathfrak{F}$ une fonction continue strictement croissante de R^+ dans R^+ , une projection P d'un espace de Banach E dans lui même est une $\mathfrak{F}$- projection si

$$\mathfrak{F}(||x||) = \mathfrak{F}(\,||Px||\,) + \mathfrak{F}(||(I-P)\ (x)||) \quad \forall\ x \in E$$

Définition 2.4 : Dans un espace de Banach E, un sous espace X sera dit J - orthogonal au sous espace Y (ce que l'on notera $X \longmapsto Y$) si et seulement si :

$$\forall\ x \in X \qquad \forall\ y \in Y \qquad x \longmapsto y$$

X et Y seront dits orthogonaux si et seulement si $X \longmapsto Y$ et $Y \longmapsto X$.

Proposition 2.2 : Soit E un espace uniformément convexe dont le dual $E^{\times}$ est strictement convexe, alors une projection P de E est une $\mathfrak{F}$ - projection (avec $\mathfrak{F}(r) = r\,\varphi(r)\ \forall\ r \in R^+$) si et seulement si P et I-P) sont J - autoadjoints.

Démonstration : Soit P une projection de E telle que P et (I - P) soient J - autoadjoints alors :

$$(Jx,x) = (Jx,Px) + (Jx,(I-P)x) = ({}^tPJx,Px) + ({}^t(I-P)Jx,\ (I-P)x)$$

$$= (JPx,Px) + (J(I-P)x,\ (I-P)x)$$

d'où $||x|| \quad (\,||x||\,) = ||Px||\ (||Px||\,) + ||(I-P)x||\,||(I-P)\ (x)||$

donc P est une $\mathfrak{F}$- projection avec $\mathfrak{F}$ telle que

$$\mathfrak{F}(r) = r\ \varphi(r) \qquad \forall\ r \in R^+$$

Réciproquement, soit P une $\mathcal{F}$- projection avec $\mathcal{F}$ comme précédemment alors

$$\forall\, z \in E \qquad ||z||\,\varphi(||z||) = ||Pz||\,\varphi(||Pz||) + ||(I-P)\,z||\,\varphi(||(I-P)z||)$$

considérant $z = Px + k\,(I-P)\,y \qquad x,y \in E,\ k \in \mathbb{C}$

On en déduit que

$$||Px + k\,(I-P)\,y||\,\varphi(||Px+k(I-P)\,y||) \geq ||Px||\,\varphi(||Px||)$$

φ étant croissante ceci équivaut

$$||Px + k\,(I-P)\,y|| \geq ||Px||$$

d'où $\forall\, u \in P\,(E) \quad \forall\, v \in (I-P)\,(E)$ et $\forall\, k \in \mathbb{C}$

$$||u + kv|| \geq ||u||$$

Soit $P\,(E) \perp\!\!\!\longrightarrow (I-P)\,(E)$. De la même façon, en considérant $z = (I-P)x$

on aurait $(I-P)\,(E) \perp\!\!\!\longrightarrow P\,(E)$.

$P\,(E)$ et $(I-P)\,(E)$ étant J - orthogonaux

$\forall\, x$ et $y \in E \qquad (J\,Px,\,(I-P)\,y) = 0$

soit $(J\,Px,\,y) - ({}^tP\,J\,Px,\,y) = 0$ d'où $J\,Px = {}^tPJPx \qquad \forall\, x \in E$

de même en considérant $(I-P)\,E \perp\!\!\!\longrightarrow P\,(E)$

$\forall\, x$ et $y \in E\ (J\,(I-P)x,\,Py) = 0$

d'où $\quad (J\,(I-P)\,x,\,(I-P)\,y) = (J\,(I-P)\,(x),\,y)$

soit $\forall\, x \in E \quad {}^t(I-P)\,J\,(I-P)\,x = J\,(I-P)\,x$

or P est une $\mathcal{F}$ projection

$$\begin{aligned}(Jx,x) &= (JPx,Px) + (J(I-P)x,\,(I-P)x)\\ &= ({}^tPJPx,x) + ({}^t(I-P)\,J\,(I-P)\,x,\,x)\end{aligned}$$

d'où en vertu de l'unicité de Jx

$$Jx = {}^tP\,J\,P\,x + {}^t(I-P)\,J\,(I-P)\,x$$

et compte tenu de ce qui précède $J\,x = JPx + J\,(I-P)\,x \qquad \forall\, x \in E$

En remarquant que $(I-P)\,E \perp\!\!\!\longrightarrow P\,(E)$ peut également s'écrire

$$\forall\, x \in E \qquad {}^tP\,J\,(I-P)\,x = 0$$

comme ${}^tP\,J\,x = {}^tP\,J\,(Px + (I-P)\,x) = {}^tP\,J\,P\,x + {}^tP\,J\,(I-P)\,x$

soit ${}^tP\,J\,x = {}^tP\,J\,x = {}^tP\,J\,P\,x = J\,P\,x$

ce qui achève la démonstration du fait que , si P est une $\mathcal{F}$- projection, alors P et (I - P) sont J - autoadjoints.

<u>Corollaire 2.2</u> : a) Pour toute $\mathcal{F}$- projection P et tout $x \in E$, on a

$$J\,x = J\,P + J\,(I - P)\,x$$

b) Pour toute famille finie de $\mathcal{F}$- projections (P_i $1 \leq i \leq n$) telle que

$$\bigcup_{i=1}^{n} P_i = P$$

$$P_i \wedge P_j = 0 \qquad \forall\, i \text{ et } \forall\, j \text{ avec } i \neq j$$

et pour toute suite de nombres complexes $\{a_i \mid 1 \quad 1 \leq i \leq n\}$

$$J\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, P_i\,(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} J\,(a_i\, P_i\,(x))$$

<u>Démonstration</u> :

Le a) résulte de la démonstration qui en est donnée dans la proposition 2.2.

b) Soit $y = \sum_{i=1}^{n} a_i\, P_i\,(x)$

$P_1\,(y) = a_1\,P_1\,(x)$ et $(I - P_1)\,(y) = \sum_{i=2}^{n} a_i\,P_i\,(x)$

compte tenu de a).

$$J\,y = J\,(a_1 P_1(x)) + J\left(\sum_{i=2}^{n} a_i\,P_i\,(x)\right)$$

comme $P_2\,(I-P_1)\,y = a_2\,P_2\,(x)$ et $(I-P_2)\,(I-P_1)\,y = \sum_{i=3}^{n} a_i\,P_i\,(x)$

on en déduit de proche en proche

$$J\,y = \sum_{i=1}^{n} J\,(a_i\,P_i)\,(x))$$

Or, d'après un résultat de Browder, E étant uniformément convexe et E^*strictement convexe

$$\forall\, t \in \mathbb{C} \quad \exists\, s_w(t) \in \mathbb{C} \text{ tel que } J\,(tw) = s_w\,(t)\,J\,(w)$$

en effet J (tw) est l'unique forme linéaire telle que

$$(J(tw), tw) = ||J(tw)||\,||tw|| \text{ et } ||J\,(tw)|| = \varphi(||tw||)$$

or $\quad (s\,J\,(w),\, tw) = st\,||J(w)||\,||w||\,||J\,(w)|| = \varphi(\,||w||\,)$

donc si $t = 0$ prenons $s_w\,(t) = 0$

et si $t \neq 0$ et $w \neq 0$ $s_w(t) = s = \frac{||J(tw)||}{||J(w)||} \frac{|t|}{t}$

d'où $(s\, J(w), tw) = ||J(tw)||\ ||tw||$

et en vertu de l'unicité $J(tw) = s_w(t)\, J(w)$

avec $s_w(0) = 0$

$$s_w(t) = \frac{\varphi(||tw||)}{\varphi(||w||)} \frac{|t|}{t} \quad \text{et } s_o(t) = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{C}$$

Si on considère φ_o telle que $\varphi_o(r) = r \quad \forall\, r \in \mathbb{R}^+$

alors $s_w(t) = \bar{t} \quad \forall\, w \neq 0$

et dans ce cas

$$J\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, P_i\, (x)\right) = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i\, J\, P_i\, (x)$$

Si on place dans L^p avec $\varphi(t) = r^{p-1}\ \forall\, r \in \mathbb{R}^+$

alors $s_w(t) = \frac{|t|^p}{t}$ si $t \neq 0$

De même $\forall\, t \in \mathbb{C}\ \exists\, s'_w(t) \in \mathbb{C}$ tel que

$\forall\, w \in E^*\quad J^{-1}(tw) = s'_w(t)\ J^{-1}(w)$

avec $s'_w(t) = \frac{\varphi^{-1}(||tw||)}{\varphi^{-1}(||w||)} \frac{|t|}{t}$

Théorème 2.1 :

Soit dans $\mathcal{L}(E)$ $\mathcal{P}$ une algèbre booléenne complète de $\mathcal{F}$ - projections, $\mathcal{G}$ l'algèbre faiblement fermée engendrée par $\mathcal{P}$. Supposons de plus que $s'_w(t)$ est comme dans les exemples ci dessus une fonction indépendante de w, (notée $s'(t)$), continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et telle que $s'(0) = 0$

Alors $\tilde{T}(x) = \int s\ [\psi_T(w)]\ \Lambda(dw)(x)$

Tout opérateur de $\mathcal{G}$ est J - normal. Si de plus on suppose $\varphi = \varphi_o$ alors la J - adjonction est involutive.

Démonstration :

Il résulte du théorème 4.5 page 358 de [1] que $\mathcal{G}$ est aussi l'algèbre uniformément fermée engendrée par $\mathcal{P}$ et que $\mathcal{G}$ est isomprphe à l'algèbre $\mathcal{C}(\Omega)$ des fonctions continues sur l'espace de représentation Ω de $\mathcal{P}$ hyperstonien.

cet isomorphisme étant donné par

$$C(\Omega) \ni h \longrightarrow \int_\Omega h(w)\,\Lambda(dw)$$

où $\Lambda(.)$ est une mesure sur Ω telle que pour tout sous ensemble ouvert et fermé σ de Ω $\Lambda(\sigma) \in \mathcal{P}$. Nous désignerons par $\mathcal{B}$ l'algèbre booléenne des ouverts et fermés de Ω. Soit $T \in \mathcal{G}$ alors il existe $\psi_T \in C(\Omega)$ telle que

$$T x = \int_\Omega \psi_T(w)\ \Lambda(dw)(x)$$

La notion d'intégrale utilisée étant celle de Dunford cf [6] p. 340

On remarque que $^tT x' = \int_\Omega \psi_T(w)\ {}^t\Lambda(dw)(x')$

en effet $(Tx, x') = (x, {}^tT x') = \int_\Omega \psi_T(w)\,(\Lambda(dw)\,x, x')$

$$= \int_\Omega \psi_T(w)\,(x, {}^t\Lambda(dw)(x'))$$

Soit une suite de fonctions g_n avec

$$g_n(w) = \sum_{i=1}^{p_n} a_{i_n}\,(1_{O_{i_n}})(w) \qquad O_{i_n} \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad a_{i_n} \in \mathbb{C}$$

telle que $\lim_{n \to \infty} g_n(w) = \psi_T(w)$ sauf sur un ensemble de Λ mesure nulle donc rare.

Alors $\int_\Omega g_n(w)\ {}^t\Lambda\ (dw)(x') = \sum_{i_n=1}^{p_n} a_{i_n}\ {}^t\Lambda(1_{O_{i_n}})(x')$

converge fortement vers ^tTx, d'où il résulte que $J^{-1}(\int_\Omega g_n(w)\,{}^t\Lambda\,(dw)$ (x'))

converge faiblement vers $J^{-1}\,{}^tTx'$ lorsque n tend vers l'infini.

Or $J^{-1}\left(\sum_{i_n=1}^{p_n} a_{i_n}\ {}^t\Lambda\,(1_{O_{i_n}})(x')\right) = \sum_{i_n=1}^{p_n} s'(a_{i_n})\,J^{-1}\,{}^t\Lambda\,(1_{O_{i_n}})(x'$

Compte tenu du fait que les projections sont des $\mathcal{F}$- projections

$$J^{-1}\left(\int_\Omega g_n(w)\ {}^t\Lambda(dw)(x')\right) = \sum_{i_n=1}^{p_n} s'(a_{i_n})\ {}^t\Lambda(1_{O_{i_n}})(J^{-1}x')$$

qui converge faiblement vers $J^{-1}\,{}^tT x'$ lorsque n tend vers l'infini.

$g_n(w)$ convergeant vers $\psi_T(w)$ sauf sur un ensemble de Λ mesure nulle, s' étant continue $s[g_n(w)]$ converge vers $s[\psi(w)]$ lorsque n tend vers l'infini sauf sur un ensemble de Λ mesure nulle et

$\sum_{i_n=1}^{P_n} s'(a_{i_n})\ {}^t\Lambda(1_{\Omega_{i_n}})\ (J^{-1}x')$ converge fortement vers

$$\int_\Omega s\left[\psi_T(w)\right]\ {}^t\Lambda\ (dw)\ (J^{-1}x')$$

d'où $J^{-1}\ {}^tT\ x' = \int_\Omega s\left[\psi_T(w)\right]\ {}^t\Lambda\ (dw)\ (J^{-1}x')$

Posant $J\ x = x'$

$\tilde{T}\ x = J^{-1}\ {}^t\ T\ J\ x = \int_\Omega s\left[\psi_T(w)\right]\ {}^t\Lambda\ (dw)\ (x)$

et $\tilde{T}\ T\ (x) = T\ \tilde{T}\ (x) = \int_\Omega \psi_T\ (w)\ s\left[\psi_T(w)\right]\ {}^t\Lambda\ (dw)\ \ (x)$

donc T est J normal.

On remarque que

$$\tilde{\tilde{T}} = \int_\Omega s^2\left[\psi_T(w)\right]\ {}^t\Lambda\ (dw)$$

et l'opération de J - adjonction est involutive si et seulement si

$$s\left[\psi_T(w)\right] = \overline{\psi_T\ (w)}$$

<u>Remarques</u> :

1. On retrouve ici l'analogie avec la notion d'adjoint telle qu'on la trouve dans les espaces de Hilbert.

2. Etant donné un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ il serait intéressant de répondre aux questions suivantes :

a) Peut - on caractériser la classe des $T \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E)$ et $T\ \tilde{T} = \tilde{T}\ T$ où tout du moins est - il possible de donner des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi ?

b) Si $T \in \mathcal{L}(E)$ est J - normal la sous algèbre faiblement fermée de $\mathcal{L}$ (E) engendrée par T et $\tilde{T}$ est - elle engendrée par une algèbre booléenne complète de $\mathcal{F}$- projections ?

3. Quelques exemples.

Soit (S,Σ,μ) un espace de probabilité. Considérons les espaces $L^p(S,\Sigma,\mu)$ et $L^\infty(S,\Sigma,\mu)$ que nous noterons respectivement L^p et L^∞. Soit U une isométrie de L^p sur L^p et $g \in L^\infty$.

a) L'opérateur T_1 de L^p dans L^p défini par $T_1 f = g\,U\,f$ pour tout f de L^p est tel que

$$\tilde{T}_1 f = U^{-1}((J^{-1}g)f) \text{ et } \tilde{T} \in \mathcal{L}(L^p)$$

Si de plus $\forall\, h \in L^\infty$ $\forall\, v \in L^p$ $U^{-1}(hv) = U^{-1}(h)\,U^{-1}(v)$ et si $U^{-1}(g\,J^{-1}(g)) = g\,J^{-1}(g)$ l'opérateur est J-normal.

Démonstration :

$$\tilde{T}_1 f = J^{-1}\,{}^tT_1 f \qquad \text{or } {}^tT_1 J f = {}^tU(g\,J\,f)$$

d'où $\tilde{T}_1 f = J^{-1}\,{}^tU\,(g\,J\,f)$

or U est une isométrie de L^p sur L^p donc est J - unitaire

d'où $\tilde{T}_1 f = U^{-1}J^{-1}(g\,J\,f)$

or dans L^p si on prend $J f = |f|^{p-1}\,\mathrm{sgn}\, f$ alors

$$J^{-1}(gJf) = (J^{-1}g)\,f$$

$$\tilde{T}_1 f = U^{-1}(f\,J^{-1}(g))$$

$$\tilde{T}_1 T_1 f = U^{-1}(g\,J^{-1}(g)\,f) \text{ et } T_1\tilde{T}_1 f = g\,J^{-1}(g)\,f$$

et compte tenu des hypothèses faites $\tilde{T}_1 T_1 = T_1 \tilde{T}_1$

b) L'opérateur T_2 de L^p dans L^p défini par

$\forall\, f \in L^p$ $\qquad T_2 f = U^{-1}(g\,U\,f)$ est J - normal

et $\qquad \tilde{T}_2 f = U^{-1}(J^{-1}(g)\,U\,f)$

Le calcul est analogue au calcul précédent. On trouve

$$\tilde{T}_2 T_2 f = T_2 \tilde{T}_2 f = U^{-1}(g\,J^{-1}(g)\,U\,f)$$

II - Un résultat de théorie ergodique. -

Théorème 1 :

Soit E un espace de Banach dont le dual E^* est strictement convexe, l'application de dualité de E dans E^* étant faiblement continue. Soit T une isométrie inversible sur E telle que la suite $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un opérateur de projection P sur E lorsque n tend vers l'infini. Alors, pour toute suite croissante d'entiers $\{k_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $k_i \in \mathbb{N}$; et pour tout x de E $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T^{k_i} x$ converge fortement vers $P(x)$.

Démonstration :

Il est facile de voir qu'il suffit de se restreindre à $x \in E_o = \{ x \mid Px = 0 \}$. En effet des égalités

$$(T^{n+1} x, y) = (T^n Tx, y) = (T\, T^n x, y) = (T^n x, {}^tTy)$$

il résulte, en faisant tendre n vers l'infini et compte tenu des hypothèses, que

$$T\,P\,x = P\,T\,x = P\,x$$

ce qui implique $P\,x = x \Longleftrightarrow T\,x = x$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{T^{k_i} x}{n} - Px = \frac{\sum_{i=1}^{n} T^{k_i}(x-Px)}{n} \qquad \text{avec } x - Px \in E_o.$$

Soit $x \in E_o$, montrons que

$$\left(J\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{T^{k_i} x}{n}\right), \sum_{i=1}^{n} \frac{T^{k_i} x}{n}\right) = \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{T^{k_i} x}{n} \right\| \varphi\left(\left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{T^{k_i} x}{n} \right\| \right)$$

tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

$$\left(J\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{T^{k_i}}{n}\right), \sum_{i=1}^{n} \frac{T^{k_i}}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left({}^tT^{k_j} J\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{T^{k_i} x}{n}\right), x\right)$$

Or, d'après la proposition 2.1, T est J - unitaire d'où

$$ {}^{t}T^{k_j} J = J T^{-k_j} $$

l'expression précédente est donc égale à

$$ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \; (J(\sum_{i=1}^{n} \frac{T^{k_i - k_j} x}{n}) \; , x) $$

lorsque n tend vers l'infini si on fait d'abord tendre i vers l'infini

j étant fixé.

$$ T^{k_i - k_j} x \rightharpoonup 0 \qquad (\rightharpoonup \text{ désigne la convergence faible}) $$

et $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T^{k_i - k_j} x \longrightarrow 0$, comme J est faiblement continue

$$ (J(\sum_{i=1}^{n} \frac{T^{k_i - k_j} x}{n}) \; , x) \longrightarrow 0 $$

et la moyenne arithmétique de ces quantités tend aussi vers zéro.

La fonction φ qui définit l'application de dualité J étant continue strictement croissante, il en est de même de la fonction $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}(r) = r \; \varphi(r) \qquad \forall \; r \in \mathbb{R}^{+}$ qui admet une fonction réciproque continue telle que $\mathcal{F}^{-1}(0) = 0$.

On vient de démontrer que $\lim\limits_{n \to \infty} \mathcal{F}(|| \sum_{i=1}^{n} \frac{T^{k_i} x}{n} ||) = 0$

Il en résulte que

$$ \lim_{n \to \infty} || \sum_{i=1}^{n} \frac{T^{k_i} x}{n} || = 0 $$

ce qui achève la démonstration du théorème.

III - Cas d'un opérateur normal :

Théorème :

Soit T une contraction normale sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ telle que la suite $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un opérateur de projection P. Alors pour toute suite croissante d'entiers $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et pour tout $x \in E$, la suite

$$\frac{T^{k_1}x + T^{k_2}x + \dots + T^{k_n}x}{n}$$

converge fortement vers $P\,x \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$.

Démonstration :

Soit $\mathcal{G}$ la W^*- algèbre engendrée par T. $\mathcal{G}$ est isomorphe à l'espace des fonctions continues $C\,(\mathcal{M})$ sur le spectre $\mathcal{M}$ de $\mathcal{G}$ qui est hyperstonien. Soit $\varphi_S \in C\,(\mathcal{M})$ l'image d'un opérateur S de $\mathcal{G}$ par l'isomorphisme de Gelfand et soit Λ la mesure spectrale sur $\mathcal{M}$, on a

$$\|\,S\,\| = \|\varphi_S\|$$

$$S\,x = \int_{\mathcal{M}} \varphi_s\,(m)\;\Lambda\,(dm)\,(x)$$

La suite $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers P, alors $P \in \mathcal{G}$ et $P\,(x) = \int_{\mathcal{M}} 1_O\,(m)\;\Lambda\,(dm)\,(x)$ où O est un sous ensemble ouvert et fermé de $\mathcal{M}$.

L'hypothèse se traduit par :

$$\forall\, x\,,\, y \in \mathcal{H} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{M}} [\varphi_T^{\,n}\,(m) - 1_O\,(m)] < \Lambda(dm)\,x, y > \; = 0$$

T étant une contraction $|\varphi_T\,(m)| \leq 1$.

Posons :

$$\mathcal{M}_1 = \{m \mid m \in \mathcal{M} \text{ et } |\varphi_T\,(m)| = 1$$

$$\mathcal{M}_2 = \{m \mid m \in \mathcal{M} \text{ et } |\varphi_T\,(m)| < 1$$

$$\forall\, m \in \mathcal{M}_2 \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_T^{\,n}\,(m) = 0$$

L'ensemble $\mathcal{M}_2$ peut être remplacé par un ensemble ouvert et fermé $\mathcal{M}_2'$ qui diffère de $\mathcal{M}_2$ par un ensemble rare donc de mesure $< \Lambda\,(dm)\ x,y >$ nulle pour tout x et tout y de $\mathcal{H}$. Alors, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathcal{M}_2'} \varphi_T^n\,(w) < \Lambda\ (dm)\ (x), y > \ = 0 \quad \forall\ x \text{ et } y \in \mathcal{H}$$

D'où en désignant par $\mathcal{M}_1'$ l'ensemble ouvert et fermé complémentaire de $\mathcal{M}_2'$ qui diffère du $\mathcal{M}_1$ par un ensemble rare donc de mesure $< \Lambda\,(dm)\ x,y >$ nulle pour tout x et tout y.

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathcal{M}_1'} \left[\varphi_T^n\,(m) - 1_0\,(m)\right] < \Lambda\ (dm)\ x,\ y > \ = 0$$

(Dans cette formule, on peut d'ailleurs remplacer $\mathcal{M}_1'$ par $\mathcal{M}_1$).

Démontrons maintenant que $\forall\ x\ \in E_0$ où $E_0 = \{\ x \mid x \in \mathcal{H}\ Px = 0\ \}$

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \frac{\sum_{p=1}^{n} T^{k_p} x}{n} \right\|^2 = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{p=1}^{n} T^{k_p} x\ ,\ \sum_{p=1}^{n} T^{k_p} x > \ = 0$$

$$\frac{1}{n^2} < \sum_{p=1}^{n} T^{k_p} x,\ \sum_{p=1}^{n} T^{k_p} x > \ = \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} < T^{*k_q}\, T^{k_p} x,\ x >$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \int_{\mathcal{M}} \varphi_T^{k_p}\,(m)\, \overline{\varphi}_T^{k_q}\,(m) < \Lambda\,(dm)\ \ x,\ x >$$

Etudions d'abord :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \int_{\mathcal{M}_2} \varphi_T^{k_p}\,(m)\, \overline{\varphi}_T^{k_q}\,(m) < \Lambda(dm)\ (x)\ ,\ x >$$

or, d'après ce qui précède $m \in \mathcal{M}_2 \quad \left| \varphi_T^{k_p}\,(m)\ \overline{\varphi}_T^{k_q}\,(m) \right| < 1$

$$\text{et} \quad \lim_{k_q \to \infty} \varphi_T^{k_p}\,(m)\, \overline{\varphi}_T^{k_q}\,(m) = 0$$

d'où $\lim\limits_{k_q \to \infty} \int_{\mathfrak{M}_2} \varphi_T^{k_p}(m)\, \varphi_T^{-k_q}(m) < \Lambda \;(dm)\; x,\; x >$

Maintenant faisons tendre n vers l'infini

$$\frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \left[\frac{1}{n} \sum_{q=1}^{n} \int_{\mathfrak{M}_2} \varphi_T^{k_p}(m)\, \varphi_T^{-k_q}(m) < \Lambda(dm) \;\; x,\; x \; > \right]$$

Le crochet est la moyenne arithmétique de quantités qui tendent vers zéro dont il tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. L'expression qui est une moyenne arithmétique de quantités qui tendent vers zéro tend vers zéro.

Etudions maintenant

$$\frac{1}{n} \sum_{q=1}^{n} \left[\frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \int_{\mathfrak{M}_1} \varphi_T^{k_p}(m)\, \varphi_T^{-k_p}(m) < \Lambda \;(dm)\; x,\; x \; > \right]$$

Désignons par $\hat{\varphi}_T$ la restriction de φ_T à $\mathfrak{M}_1$.

L'expression s'écrit alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{q=1}^{n} \left[\frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \int_{\mathfrak{M}_1} \hat{\varphi}_T^{k_p - k_q} (m) < \Lambda \;(dm)\;\; x\;,\; x > \right]$$

Faisons tendre n vers l'infini et remarquons que d'après l'hypothèse

$$\lim_{p \to \infty} \int_{\mathfrak{M}_1} \hat{\varphi}_T^{k_p - k_q} (m) < \Lambda \;(dm\;\; x,\; x > = 0 \qquad x \in E_0$$

et comme pour l'intégrale étendue à $\mathfrak{M}_2$, la limite est nulle ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque :

Ce résultat s'étend sans aucune difficulté au cas d'un opérateur J - normal appartenant à la sous - algèbre de $\mathcal{L}(X)$ (où x est uniformément convexe) faiblement fermée engendrée par une famille booléenne de $\mathcal{F}$- projection. Mais ceci présente peu d'intérêt tant qu'on ne sait pas répondre à la question 2b du Ch. I.

IV - Un théorème d'existence :

La démonstration qui suit est basée sur un lemme de S. Kakutani [15] et est très voisine de la démonstration de son théorème [15] .

Lemme :

Soient E un espace uniformément convexe et $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que pour tout n $||x_n|| \leq M$ et qui converge faiblement vers zéro. Alors, il existe une sous suite $\{x_{m_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $1 < m_1 < m_2 < \ldots$ extraite de x_n telle que :

$$\left\| \frac{x_{m_{2n-1}} + x_{m_{2n}}}{2} \right\| \leq \vartheta M \text{ pour } n \quad N$$

où $\vartheta = \text{Max} \left(\frac{3}{4}, 1 - \delta\left(\frac{1}{2}\right)\right) < 1$ est une constante indépendante de la suite donnée.

δ est le module d'uniforme convexité défini par la condition :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \qquad ||x - y|| \geq \varepsilon \max(||x||, ||y||)$$

$$\Longrightarrow \left|\left| \frac{x + y}{2} \right|\right| \leq (1 - \delta(\varepsilon)) \max(||x||, ||y||)$$

Théorème :

Soient E un espace uniformément convexe séparable, T_n une suite de contractions de E telle que pour tout $x \in E$ $T_n x$ converge faiblement vers zéro. Alors, il existe une sous suite croissante d'entiers n_i telle que les moyennes de Césaro $\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} T^{n_i} x$ convergent fortement vers zéro pour tout $x \in E$.

Démonstration :

Soit $S = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite totale dans E avec $||x_k|| = 1$.
Il suffit de prouver que le théorème est vrai pour tout $x_k \in S$.

Soit la suite

$T_2 x_1, \ldots, T_n x_1, \ldots$ avec $||T_n x_1|| \leq 1$ ($\forall n$)

Alors, il existe une sous suite $\{m_p^1\}_{p \in \mathbb{N},\, p \geq 1}$ d'entiers telle que $1 < m_1^1 < m_2^1 < \ldots < m_p^1 \ldots$ et qui vérifie :

$$(\forall p \in \mathbb{N}) \atop p \geq 1 \qquad \left\| \frac{T_{m^1_{2p-1}} x_1 + T_{m^1_{2p}} x_1}{2} \right\| \leq \theta$$

où θ a été défini dans le lemme.

Pour tout $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$, $\lambda \in [0,1]$ considérons la suite

$$\frac{T_{m_3^1} x + T_{m_4^1} x}{2}, \ldots, \frac{T_{m^1_{2p-1}} x + T_{m^1_{2p}} x}{2},$$

alors il existe une sous suite croissante d'entiers $\{m_p^2\}_{p \in \mathbb{N}}$ extraite de la suite $\{m_p^1\}_{p \in \mathbb{N},\, p \geq 3}$ telle que

$$\left\| \frac{T_{m^2_{4k+1}} x + T_{m^2_{4k+2}} + T_{m^2_{4k+3}} + T_{m^2_{4(k+1)}} x}{4} \right\| \leq \theta M \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$\text{avec } M = \sup_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \geq 2}} \left\| \frac{T_{m^1_{2p-1}} x + T_{m^1_{2p}} x}{2} \right\|$$

où θ est indépendant de la suite donnée donc de x.

si $\lambda = 1$ $x = x_1$ et $M = \theta$ d'après la première partie

$\lambda = 0$ $x = x_2$ et $M = 1$

Par conséquent, l'inégalité ci dessus nous donne pour

$$x = x_1 \qquad \left\| \frac{T_{m^2_{4p+1}} x_1 + T_{m^2_{4p+2}} x_1 + T_{m^2_{4p+3}} x_1 + T_{m^2_{4(p+1)}} x_1}{4} \right\| \leq \theta$$

$$x = x_2 \qquad \left\| \frac{T_{m^2_{4p+1}} x_2 + T_{m^2_{4p+2}} x_2 + T_{m^2_{4p+3}} x_2 + T_{m^2_{4(p+1)}} x_2}{4} \right\| \leq \theta$$

pour $x = x_i$ avec $i > 2$, ces sommes de 4 termes sont évidemment majorées par 1.

Poursuivons le raisonnement par récurrence. Supposons que à l'étape n nous ayons trouvé une suite $\{m^n_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ telle que les blocs dyadiques de longueur 2^n

$$x^n_k = \frac{T_{m^n_{k\,2^n+1}} x + T_{m^n_{k\,2^n+2}} x + \dots + T_{m^n_{(k+1)2^n}}}{2^n} \qquad k \in \mathbb{N}$$

soient majorés par θ^{n+1-p} pour $x = x_p$ $p = 1, 2, \dots, n$

et par 1 pour $x = x_p$ $p > n$

Considérons alors une suite de tels blocs dyadiques obtenue en supprimant la premier de ces blocs $(k > 0)$ et avec

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^i x_i \qquad \lambda^i \in \mathbb{R}, \quad \lambda^1 + \lambda^2 + \dots + \lambda^n = 1, \; 0 \leq \lambda^i \; i = 1,2,\dots,n$$

$$\left\{ x_k^n = \frac{T_{m^n_{k\,2^n+1}} x + T_{m^n_{k\,2^n+1}} x + \dots + T_{m^n_{(k+1)2^n}}}{2^n} \right\} \quad k \geq 1$$

Par application du lemme, il existe une sous suite d'entiers $\{ k_i \}_{i \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\left\| \frac{x^n_{k_{2i-1}} + x^n_{k_{2i}}}{2} \right\| \leq \theta M \text{ avec } M = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|x_k^n\|$$

Posons alors :

$$m_1^{n+1} = m^n_{k_0\,2^n+1}, \dots, m^{n+1}_{2^n} = m^n_{(k_0+1)2^n}, \; m^{n+1}_{2^n+1} = m^n_{k_1\,2^n+1}, \dots, m^{n+1}_{2^{n+1}} =$$
$$m^n_{(k_1+1)\,2^n}, \; m^{n+1}_{i2^n+1} = m^n_{k_i 2^n+1}, \dots, m^{n+1}_{(i+2)2^n} = m^n_{(k_i+2)2^n}, \dots$$

l'inégalité ci dessus s'écrit :

$$\left\| x_k^{n+1} \right\| = \left\| \frac{T_{m^{n+1}_{k\,2^{n+1}}} x + T_{m^{n+1}_{k\,2^{n+1}+2}} x + \dots + T_{m^{n+1}_{(k+1)\,2^{n+1}}} x}{2^{n+1}} \right\| < \theta M$$

Posons $\lambda^p = 1$ pour $p \in \{1,2,\dots n\}$ alors $x = x_p$ et d'après l'hypothèse de récurrence $M = \theta^{n+1-p}$, donc pour $x = x_p$ $p \in \{1,2,\dots,n\}$ le bloc dyadique correspondant noté $x^{n+1}_{p,k}$ est tel que

$$\left\| x^{n+1}_{p,k} \right\| \leq \left\| \frac{T_{m^{n+1}_{k\,2^{n+1}+1}} x_p + T_{m^{n+1}_{k\,2^{n+1}+2}} x_p + \dots + T_{m^{n+1}_{(k+1)2^{n+1}}} x_p}{2^{n+1}} \right\| \leq \theta^{n+2-p}$$

Si $p = n + 1$ on a $x = x_{n+1}$ et le bloc dyadique est majoré par θ.

Pour $p > n + 1$, les blocs dyadiques sont majorés par 1, ce qui achève ce raisonnement par récurrence.

Construisons alors la sous suite $\{T_{n_p}\}_{p\in\mathbb{N}}$ en posant

$$n_1^1 = 1 \,,\; n_2 = m_1^1 \,,\; n_3 = m_2^1 \,,\; \ldots \,,\; n_{2^p} = m_1^p \,,\; \ldots \,,\; n_{2^{p+1}-1} = m_{2^p}^p \; \ldots$$

et montrons que pour tout $x_i \in S$ les moyennes de Césaro

$\frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} T_{n_j} x_i$ convergent fortement vers zéro.

Soit p tel que $r\, 2^q \leq p \quad (r+1)\, 2^q \quad r$ et $q \in \mathbb{N}$

alors :

$$\left\| \frac{T_{n_1} x_i + T_{n_2} x_i + \ldots T_{n_p} x_i}{p} \right\| \leq \left\| \frac{T_{n_1} x_i + \ldots + T_{n_{2^q-1}} x_i}{p} \right\| +$$

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{r-1} \| T_{n_{k2^q}} x_i + T_{n_{k2^q+1}} x_i + \ldots + T_{n_{(k+1)2^q-1}} x_i \|$$

$$+ \frac{1}{p} \quad \| T_{n_{r2^q+1}} x^i + \ldots + T_{n_p} x_i \|$$

d'où en remarquant que le second terme de cette somme est une somme de $x_{i,k}^q$ avec $k = 1,2,\ldots (r-1)$

on a si $q > i$

$$\| x_{i,k}^q \| \leq \theta^{q+1-i}$$

d'où

$$\left\| \frac{T_{n_1} x_i + T_{n_2} x_i + \ldots + T_{n_p} x_i}{p} \right\| \leq \frac{(2^q-1) + (r-1)\,\theta^{(q+1-i)} + 2^q}{p}$$

Faisons tendre r vers l'infini alors $p \to \infty$ et

$$\lim_{p\to\infty} \left\| \frac{T_{n_1} x_i + \ldots + T_{n_p} x_i}{p} \right\| \leq \overline{\lim} \frac{(r-1)}{p} \,\theta^{q+1-i} \leq \theta^{q+1-i}$$

Mais, comme q est arbitraire et que $\theta < 1$ on a

$$\overline{\lim_{p}} \left\| \frac{T_{n_1} x_i + \ldots + T_{n_p} x_i}{p} \right\| = 0$$

pour tout $x_i \in S$ ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W.G. BADE — " On boolean algebras of operators and algebras of operators "
Trans. of the A.M.S. Vol. 80 n° 2 pp. 345-360

[2] BROWDER F.E. — " On a theorem of Beurling and Livingstone "
Candd. J. Math. 17 1965, pp. 367-372

[3] BROWDER F.E. — " Problèmes non linéaires "
Université de Montréal Lectures Notes - Summer 1965

[4] A. BRUNEL et M. KEANE — " Ergodic theorems of operators sequences "

[5] M. DAY — " Normed linear spaces "
Ergebnisse der Mathematik Springer 1962

[6] N.DUNFORD — " Spectral operators "
Pacific J. Math. 4 (1964) 321-354

[7] W.F. EBERLEIN — " Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions "
Trans. of the A.M.S. 67 (1949) pp. 217-240

[8] R.C. JAMES — " Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces "
Trans. of the A.M.S. vol. 61 (1947) pp. 265-292

[9] R.C. JAMES — " Inner Products in Normed linear spaces "

[10] G. KOTHE — " Topologische Lineare Räume "
Springer 1960

[11] F.E. SULLIVAN — " A norm characterisation of real L^p spaces "
Doctoral Dissertation University of Pittsburg 1968

[12] F.E. SULLIVAN and H.B. COHEN — " Von Neumann Algebras in Banach Spaces of the type US and U.R. "

[13] Lee KENNETH JONES — " A mean ergodic theorem for weakly mixing operators "

[14] Mustafa AKCOGLU and L. SUCHESTON — " An operator convergence in Hilbert space and in Lebesgue space "

[15] S. KAKUTANI — " Weak convergence in uniformly convex spaces "
The Tohoku Mathematical Journal - Vol. 45 - Part. 1
Sept. 1988 - pp. 188-193