

M. S. BAOUENDI

Analycité des solutions du problème de Dirichlet homogène

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1969-1970, fascicule 1

« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 5, p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1969-1970__1_A5_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALYCITE DES SOLUTIONS DU PROBLEME DE DIRICHLET HOMOGENE

par

M.S. BAQUENDI

(rédigé par B. Hanouzet et J.L. Durrmeyer)

Soit Ω un ouvert borné très régulier de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ analytique.
 $P(x,D)$ désigne un opérateur elliptique d'ordre 2 à coefficients analytiques dans $\overline{\Omega}$.

Soit $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ telle que :

$$\begin{cases} P(x,D) u = f \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

On se propose de démontrer que si f est analytique dans $\overline{\Omega}$, alors u est analytique dans $\overline{\Omega}$.

La démonstration est faite en deux étapes. Au I, on étudie l'analyticité dans Ω , la démonstration est extraite de H rmander ([1]) ; au II, on étudie l'analyticité au bord. Le résultat est aussi vrai pour un opérateur elliptique d'ordre $2m$. Pour des résultats analogues pour des systèmes, on pourra consulter Morrey et Nirenberg ([2]), pour un opérateur elliptique dégénéré, Baouendi et Goulaouic ([3]).

I. ANALYCITE DANS Ω .

1 ) Préliminaires et notations.

Notons $\omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$, pour qu'une fonction g soit analytique dans $\overline{\omega}$ il faut et il suffit qu'une des propriétés suivantes soit réalisée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } B > 0 \text{ telle que pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n, \text{ on ait :} \\ \sup_{x \in \omega} |D^\alpha g(x)| \leq B^{|\alpha|+1} |\alpha| ! \quad (1) \\ \text{(ou : } \sup_{x \in \omega} |D^\alpha g(x)| \leq B^{|\alpha|+1} |\alpha| |\alpha| \text{)} \quad (1') \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } B > 0 \text{ telle que pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n, \text{ on ait :} \\ |D^\alpha g|_{L^2(\omega)} \leq B^{|\alpha|+1} |\alpha| ! \quad (2) \\ \text{(ou : } |D^\alpha g|_{L^2(\omega)} \leq B^{|\alpha|+1} |\alpha| |\alpha| \text{)} \quad (2'). \end{array} \right.$$

On démontre que (1) (resp. (2)) équivaut à (1') (resp. (2')) par la formule de Stirling, que (1) équivaut à (2) par le théorème de Sobolev.

Dans la suite, on suppose que $R < 1$ et on note, pour $0 < \varepsilon < R$:

$$\omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R - \varepsilon.\}$$

$$N_\varepsilon(g) = |g|_{L^2(\omega_\varepsilon)}.$$

On obtient une condition nécessaire d'analytité.

Proposition 1.1.

Si g est analytique dans $\bar{\omega}$, il existe une constante $B > 0$ telle que :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \forall \varepsilon > 0 :$$

$$\varepsilon^{|\alpha|} \sup_{x \in \omega_j} |D^\alpha g(x)| \leq B^{|\alpha|+1} j^{-|\alpha|} |\alpha| |\alpha|. \quad (3)$$

En particulier, en prenant $j = |\alpha|$ on a :

$$\varepsilon^{|\alpha|} \sup_{x \in \omega_{|\alpha| \varepsilon}} |D^\alpha g(x)| \leq B^{|\alpha|+1}. \quad (3')$$

et de façon équivalente, en utilisant la norme L^2 :

$$(j\epsilon)^{|\alpha|} N_{j\epsilon}(D^\alpha g) \leq B^{|\alpha|+1} |\alpha|^{|\alpha|} \quad (4)$$

$$\epsilon^{|\alpha|} N_{|\alpha|\epsilon}(D^\alpha g) \leq B^{|\alpha|+1} \quad (4').$$

Démonstration :

Si $j\epsilon \geq R$ alors $\omega_{j\epsilon} = \emptyset$ et (3) est évident.

Si $j\epsilon < R$, d'après (1'), on a :

$$\sup_{x \in \omega_{j\epsilon}} |D^\alpha g(x)| \leq \sup_{x \in \omega} |D^\alpha g(x)| \leq B^{|\alpha|+1} |\alpha|^{|\alpha|}.$$

et par suite, comme $j\epsilon < R < 1$:

$$(j\epsilon)^{|\alpha|} \sup_{x \in \omega_{j\epsilon}} |D^\alpha g(x)| \leq B^{|\alpha|+1} |\alpha|^{|\alpha|}.$$

2°) Passons maintenant à l'étude de l'analyticité dans Ω . Ennonçons le résultat :

Théorème 1.

Soit $P(x,D)$ un opérateur elliptique d'ordre 2, à coefficients analytiques dans Ω . Si u est une distribution telle que $P(x,D)u$ est analytique dans Ω , alors u est analytique dans Ω .

Notons d'abord que, puisque $P(x,D)$ est elliptique (donc hypoelliptique), les hypothèses impliquent que $u \in C^\infty(\Omega)$. D'autre part, l'analyticité étant une propriété locale, il suffit de montrer le théorème au voisinage de chaque point de Ω , à une translation près, on peut se ramener à l'origine. Nous supposons donc que :

$$u \in C^\infty(\omega)$$

$$P(x,D)u = f \text{ est analytique dans } \bar{\omega}$$

$$P(x,D) = \sum_{|\beta| \leq 2} a_\beta D^\beta \text{ avec } a_\beta \text{ analytique dans } \bar{\omega}$$

D'après (1) et (2), on sait qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |D^\alpha f|_{L^2(\omega)} \leq A^{|\alpha|+1} |\alpha| |\alpha| \quad (5)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \sum_{|\beta| \leq 2} \sup_{x \in \omega} |D^\alpha a_\beta(x)| \leq A^{|\alpha|+1} |\alpha| |\alpha| \quad (6)$$

Lemme I.1.

Soit $v \in C^\infty(\omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $|\alpha| = 2$, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon + \varepsilon_1 < R$, on ait :

$$\varepsilon^2 N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^\alpha v) \leq C_1 \left\{ \varepsilon^2 N_{\varepsilon_1}(P(x,D)v) + \sum_{|\beta| \leq 2} N_{\varepsilon_1}(D^\beta v) + N_{\varepsilon_1}(v) \right\} \quad (7)$$

$P(x; D)$ étant un opérateur elliptique sur Ω , il existe une constante $C > 0$ telle que

$\forall u \in \mathcal{D}(\omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq 2$, on ait :

$$|D^\alpha u|_{L^2(\omega)} \leq C |P(x,D)u|_{L^2(\omega)} \quad (8)$$

On prend alors $u = \varphi v$ avec $\varphi \in \mathcal{D}(\omega_{\varepsilon_1})$,

$0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ sur $\omega_{\varepsilon+\varepsilon_1}$ et

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \varphi(x)| \leq C(\alpha) \varepsilon^{-|\alpha|}$$

($C(\alpha)$ est une constante > 0 indépendante de ε).

Pour construire φ il suffit de prendre $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\psi(t) = 1$ pour $t \leq 0$, $\psi(t) = 0$ pour $t \geq 1$ et $0 \leq \psi(t) \leq 1$, puis de poser :

$$\varphi(x) = \psi(\varepsilon^{-1}(|x| - R + \varepsilon + \varepsilon_1)).$$

Pour (8), on a :

$$|D^\alpha(\varphi v)|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C |P(x,D) \varphi v|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

et par ailleurs :

$$N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^\alpha v) = N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^\alpha(\varphi v)) \leq \|D^\alpha(\varphi v)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

On a :

$$P(x,D)(\varphi v) = \varphi P(x,D)v + [P(x,D), \varphi]v.$$

$$\|\varphi P(x,D)v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq N_{\varepsilon_1}(P(x,D)v).$$

Développons le commutateur par la formule de Leibnitz :

$$\begin{aligned} [P(x,D), \varphi]v &= \sum_{|\beta| \leq 2} a_\beta D^\beta(\varphi v) - \varphi \sum_{|\beta| \leq 2} a_\beta D^\beta v \\ &= \sum_{\substack{|\beta| \leq 2 \\ \beta \neq 0}} a_\beta (D^\beta \varphi)v + \sum_{\substack{|\beta| \leq 2 \\ |\beta_1|=1 \\ |\beta_2|=1}} a_\beta (D^{\beta_1} \varphi)(D^{\beta_2} v) \end{aligned}$$

et majorons chacun des termes :

$$\begin{aligned} \|(D^\beta \varphi)v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\beta \varphi(x)| N_{\varepsilon_1}(v) \\ &\leq \varepsilon^{-2} C(\beta) N_{\varepsilon_1}(v) \\ \|(D^{\beta_1} \varphi)(D^{\beta_2} v)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^{\beta_1} \varphi(x)| N_{\varepsilon_1}(D^{\beta_2} v) \\ &\leq C(\beta_1) \varepsilon^{-1} N_{\varepsilon_1}(D^{\beta_2} v) \end{aligned}$$

Il existe donc une constante $C' > 0$ telle que :

$$\|[P(x,D), \varphi]v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C'(\varepsilon^{-1} \sum_{|\beta|=1} N_{\varepsilon_1}(D^\beta v) + \varepsilon^{-2} N_{\varepsilon_1}(v))$$

ce qui termine la démonstration de 7.

Remarquons que le lemme I.1. donne une majoration des dérivées d'ordre 2 par $P(x,D)v$ et les dérivées d'ordre 1 et 0 sur un ouvert plus grand. Nous employons une méthode "d'ouverts emboîtés" pour démontrer le résultat :

Lemme I.2.

Soit $v \in C^\infty(\omega)$ telle que $P(x,D)v = f$ soit analytique dans $\overline{\omega}$. Il existe une constante $B > 0$ telle que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \varepsilon > 0 : \varepsilon^{|\alpha|} N_{|\alpha|\varepsilon}(D^\alpha v) \leq B^{|\alpha|+1} \quad (9).$$

La démonstration se fait par récurrence. Nous supposons que la relation (9) est vérifiée à l'ordre j (c'est-à-dire pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq j$) et nous montrons qu'on peut choisir une constante $B > 0$ telle qu'elle soit encore vérifiée à l'ordre $j+1$, ce choix étant fait indépendamment de j .

Soit donc $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| = j+1$. On pose :

$\alpha = \alpha' + \alpha''$ avec $|\alpha'| = j-1$ et $|\alpha''| = 2$.

On applique la relation (7) en remplaçant v par $D^{\alpha'} v$ et α par α'' :

$$\varepsilon^{2} N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^\alpha v) \leq C_1 \left\{ \varepsilon^{2} N_{\varepsilon_1}(P(x,D) D^{\alpha'} v) + \varepsilon \sum_{|\beta|=1} N_{\varepsilon_1}(D^{\beta+\alpha'} v) + N_{\varepsilon_1}(D^{\alpha'} v) \right\}.$$

puis on choisit $\varepsilon_1 = j\varepsilon = (|\alpha|-1)\varepsilon$ ce qui donne

$$\varepsilon^{|\alpha|} N_{|\alpha|\varepsilon}(D^\alpha v) \leq C_1 \left\{ \varepsilon^{|\alpha|} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon}(P(x,D) D^{\alpha'} v) + \varepsilon^{|\alpha|-1} \sum_{|\beta|=1} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon}(D^{\alpha'+\beta} v) + \varepsilon^{|\alpha|-2} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon}(D^{\alpha'} v) \right\}$$

Nous majorons séparément chacun des termes intervenant à droite dans cette dernière inégalité.

(i) Comme $|\alpha|-1$ et $|\alpha'| = j-1$, on a :

$$\varepsilon^{|\alpha|-2} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon}(D^{\alpha'} v) \leq \varepsilon^{|\alpha|-2} N_{|\alpha'|\varepsilon}(D^{\alpha'} v)$$

et par l'hypothèse de récurrence

$$\varepsilon^{|\alpha|-2} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon} (D^{\alpha'} v) \leq B^{|\alpha'|+1} = B^{|\alpha|-1}. \quad (i).$$

ii) Comme $|\beta+\alpha'| = |\beta| + |\alpha'| = |\alpha| - 1$, on a :

$$\varepsilon^{|\alpha|-1} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon} (D^{\beta+\alpha'} v) \leq B^{|\alpha|}$$

et par suite :

$$\varepsilon^{|\alpha|-1} \sum_{|\beta|=1} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon} (D^{\beta+\alpha'} v) \leq n B^{|\alpha|}. \quad (ii).$$

iii) Il reste à majorer le terme :

$$\varepsilon^{|\alpha|} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon} (P(x,D) D^{\alpha'} v).$$

On a :

$$\begin{aligned} P(x,D) D^{\alpha'} v &= D^{\alpha'} (P(x,D) v) + [P(x,D), D^{\alpha'}] v \\ &= D^{\alpha'} f + \sum_{\substack{\gamma \leq \alpha' \\ |\gamma| \geq 1}} \sum_{|\delta| \leq 2} \binom{\alpha'}{\gamma} (D^{\gamma} a_{\delta}) (D^{\delta+\alpha'-\gamma} v). \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{|\alpha|} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon} (P(x,D) D^{\alpha'} v) &\leq \varepsilon^{|\alpha|} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon} (D^{\alpha'} f) \\ &+ \sum_{\substack{\gamma \leq \alpha' \\ |\gamma| \geq 1}} \sum_{|\delta| \leq 2} \varepsilon^{|\alpha|} \binom{\alpha'}{\gamma} \sup_{x \in \omega_{(|\alpha|-1)\varepsilon}} |D^{\gamma} a_{\delta}(x)| N_{(|\alpha|-1)\varepsilon} (D^{\delta+\alpha'-\gamma} v) \end{aligned}$$

Par (5) et (4'), on a :

$$\varepsilon^{|\alpha'|} N_{|\alpha'|, \varepsilon} (D^{\alpha'} f) \leq A^{|\alpha'|+1}$$

et comme $|\alpha| = |\alpha'| + 2$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{|\alpha|} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon} (D^{\alpha'} f) &\leq \varepsilon^{|\alpha|} N_{|\alpha'|, \varepsilon} (D^{\alpha'} f) \\ &\leq \varepsilon^2 A^{|\alpha'|+1} \leq A^{|\alpha'|+1}. \end{aligned}$$

* Comme $|\delta + \alpha' - \gamma| \leq j$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$\varepsilon^{|\delta|+|\alpha'| - |\gamma|} N_{(|\delta|+|\alpha'| - |\gamma|)\varepsilon} (D^{\delta+\alpha'} - \gamma_V) \leq B^{|\delta|+|\alpha'| - |\gamma| + 1}.$$

et par suite :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{|\alpha|} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon} (D^{\delta+\alpha'} - \gamma_V) &\leq \varepsilon^{2-|\delta|+|\gamma|} B^{|\delta|+|\alpha'| - |\gamma| + 1} \\ &\leq \varepsilon^{|\gamma|} B^{|\delta|+|\alpha'| - |\gamma| + 1} \\ &\leq \varepsilon^{|\gamma|} B^{|\alpha| - |\gamma| + 1} \end{aligned}$$

La dernière inégalité est obtenue en supposant $B \geq 1$ et en remarquant que $|\alpha'| + |\delta| \leq |\alpha|$.

* En utilisant (6) et (3), il vient :

$$\varepsilon^{|\gamma|} \sum_{|\delta| \leq 2} \sup_{x \in \omega_{(|\alpha|-1)\varepsilon}} |D^\gamma a_\delta(x)| \leq A^{|\gamma|+1} \gamma! (|\alpha|-1)^{-|\gamma|}$$

* On remplace enfin la sommation sur les multi-indices γ par une sommation simple ce qui est possible en remarquant que le nombre de multi-indices γ vérifiant

$$|\gamma| \leq |\alpha'| \text{ est majoré par } n^{|\alpha'|}$$

$$\text{et que } \binom{\alpha'}{\gamma} \leq \binom{|\alpha'|}{|\gamma|} = \binom{|\alpha|-2}{|\gamma|}.$$

Ainsi :

$$\varepsilon^{|\alpha|} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon} (P(x,D) D^{\alpha'} - v) \leq A^{|\alpha'|+1} + \sum_{k=1}^{|\alpha|-2} n^k \binom{|\alpha|-2}{k} A^{k+1} k! (|\alpha|-1)^{-k} B^{|\alpha|-k+1}$$

$$\text{Or } \binom{|\alpha|-2}{k} \frac{k!}{(|\alpha|-1)^k} \leq 1 \text{ donc}$$

$$\varepsilon^{|\alpha|} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon} (P(x,D) D^{\alpha'} - v) \leq B^{|\alpha|+1} \left(\frac{A^{|\alpha'|+1}}{B^{|\alpha|+1}} + A \sum_{k=1}^{|\alpha|-2} B^{-k} A^k n^k \right) \quad (iii)$$

Regroupant (i), (ii) et (iii), on a alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{|\alpha|} N_{|\alpha|\varepsilon} (D^\alpha v) &\leq C_1 \left\{ B^{|\alpha|-1} + n B^{|\alpha|} \right. \\ &\quad \left. + B^{|\alpha|-1} \left\{ \frac{A^{|\alpha'|+1}}{B^{|\alpha|+1}} + A \sum_{k=1}^{|\alpha|-2} B^{-k} A^k n^k \right\} \right\} \\ &= B^{|\alpha|+1} C_1 \left\{ B^{-2} + n B^{-1} + \frac{A^{|\alpha'|+1}}{B^{|\alpha|+1}} + A \sum_{k=1}^{|\alpha|-2} B^{-k} A^k n^k \right\} \end{aligned}$$

On choisit B tel que $\frac{nA}{B} < 1$ donc :

$$A \sum_{k=1}^{|\alpha|-2} B^{-k} A^k n^k < \frac{nA^2}{B} \times \frac{1}{1 - \frac{nA}{B}}$$

et ensuite B suffisamment grand pour que

$$\left\{ \right\} \leq \frac{1}{C_1}$$

On obtient alors la relation (9) pour $|\alpha| = j+1$:

$$\varepsilon^{|\alpha|} N_{|\alpha|\varepsilon} (D^\alpha v) \leq B^{|\alpha|+1}.$$

Insistons bien sur le fait que le choix de B est indépendant de j .

Démonstration du théorème I.

Soit $C > 0$ tel que $\overline{\omega}_C \subset \omega$. Dans le lemme I.2, nous choisissons $\varepsilon = \frac{C}{|\alpha|}$ pour un multi-indice α fixé.

D'après (9), il vient

$$\frac{C^{|\alpha|}}{|\alpha|^{|\alpha|}} |D^\alpha v|_{L^2(\omega_C)} \leq B^{|\alpha|+1}$$

donc
$$|D^\alpha v|_{L^2(\omega_C)} \leq \frac{B^{|\alpha|+1}}{C^{|\alpha|}} |\alpha|^{|\alpha|}$$

qui montre l'analyticité de v sur $\overline{\omega}_C$ (par (2')).

II. ANALYCITE AU BORD.

On démontre un résultat dans $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$.

On pose $x = (x', y)$ avec $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}_+$.

Pour $0 < R < 1$ et $0 < \varepsilon < R$, nous notons maintenant

$$\omega = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid |x| < R\}$$

$$\bar{\omega} = \overline{\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid |x| < R\}}$$

$$\omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid |x| < R - \varepsilon\}.$$

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on pose $\alpha = (\alpha', k)$ avec $\alpha' \in \mathbb{N}^{n-1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Pour $P(x, D)$ opérateur elliptique dans $\bar{\omega}$ on pose :

$$P(x, D) = \sum_{\substack{|\beta| \leq 2 \\ \beta \neq (0, 2)}} a_\beta(x) D^\beta$$

Théorème II.

Soit $P(x, D)$ un opérateur elliptique d'ordre 2 dans $\bar{\omega}$, à coefficients analytiques dans $\bar{\omega}$. Si $v \in C^\infty(\bar{\omega})$ avec $v(x', 0) = 0$ et $P(x, D)v$ analytique dans $\bar{\omega}$ alors v est analytique dans $\bar{\omega}_0$ quel que soit $c \in]0, R[$.

Nous démontrons comme au I.

Lemme II.1.

Soit $v \in C^\infty(\bar{\omega})$ telle que $v(x', 0) = 0$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = 2$. Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout ε , $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon + \varepsilon_1 < R$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 N_{\varepsilon + \varepsilon_1}(D^\alpha v) &\leq C_1 \{ \varepsilon^2 N_{\varepsilon_1}(P(x, D)v) \\ &+ \varepsilon \sum_{|\beta|=1} N_{\varepsilon_1}(D^\beta v) + N_{\varepsilon_1}(v) \} \end{aligned} \quad (7')$$

Nous utilisons la régularité pour le problème de Dirichlet homogène. $P(x,D)$ étant elliptique dans $\bar{\omega}$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall u \in \mathcal{D}(\omega) \text{ avec } u(x',0), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leq 2$$

on ait :

$$|D^\alpha u|_{L^2(\omega)} \leq C |P(x,D)u|_{L^2(\omega)}.$$

On obtient ensuite (7') en appliquant à $u = \varphi v$ cette dernière inégalité.

Nous ne pouvons obtenir l'analogie du lemme I.2 pour toutes les dérivées, mais seulement pour les dérivées tangentielles. En effet, si $v \in C^\infty(\bar{\omega})$ avec $v(x',0)=0$ on a encore

$v \in C^\infty(\bar{\omega})$ avec $v(x',0) = 0$, on a encore

$D^\alpha v \in C^\infty(\bar{\omega})$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, si $\alpha = (\alpha', 0)$ on a $D^\alpha v(x',0) = 0$,

mais si D^α contient une dérivation normale d'ordre ≥ 1 , on n'a plus à priori

$$D^\alpha v(x',0) = 0.$$

En appliquant (7'), en remplaçant v par $D^\alpha v$, $\alpha = (\alpha', 0)$, on obtient :

Lemme II.2.

Soit $v \in C^\infty(\bar{\omega})$ avec $v(x',0) = 0$ telle que $P(x,D) = f$ soit analytique dans $\bar{\omega}$.

Il existe une constante $B > 0$ telle que :

$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $\alpha = (\alpha', k)$, $k \leq 2$, $\forall \varepsilon > 0$:

$$\varepsilon^{|\alpha|} N_{|\alpha| \varepsilon}(D^\alpha v) \leq B^{|\alpha|+1} \quad (9')$$

Ce lemme permet de conclure que, pour $C > 0$ avec $\bar{\omega}_C \subset \omega$, il existe une constante $B > 0$ telle que :

$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $\alpha = (\alpha', k)$, $k \leq 2$

$$|D^\alpha v|_{L^2(\omega_C)} \leq B^{|\alpha|+1} |\alpha| \quad (10)$$

Le théorème II sera démontré si nous prouvons la relation (10) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Plus précisément, nous avons :

Lemme II.3.

Sous les hypothèses du lemme II.2, pour $C \in]0, R[$, il existe deux constantes E et $F > 0$ telles que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \alpha = (\alpha', k) : |D^\alpha v|_{L^2(\omega_C)} \leq E^{|\alpha'|+1} F^k |\alpha| ! \quad (11)$$

D'après (10), on sait que la relation (11) est vraie pour tout $\alpha' \in \mathbb{N}^{n-1}$ et $k = 0, 1, 2$. Nous montrons qu'on peut choisir E et F telles que, si (11) est vraie à l'ordre k , quel que soit α' , alors elle est aussi vraie à l'ordre $k+1$, quel que soit α' , le choix de E et F étant indépendant de k .

Nous dérivons la relation $P(x, D)v = f$ à l'ordre $(\alpha', k-1)$:

$$D^{(\alpha', k+1)} v = D^{(\alpha', k-1)} f + \sum_{\substack{|\beta| \leq 2 \\ \beta \neq (0, 2)}} (a_\beta D^{(\alpha', k-1)} D^\beta v + [D^{(\alpha', k-1)}, a_\beta] D^\beta v)$$

et nous majorons chacun des termes obtenus.

i) Par (5), on a :

$$|D^{(\alpha', k-1)} f|_{L^2(\omega_C)} \leq A^{|\alpha'|+k} (|\alpha'|+k-1) ! \quad (i)$$

$$ii) \sum_{\substack{|\beta| \leq 2 \\ \beta \neq (0, 2)}} a_\beta D^{(\alpha', k-1)} D^\beta v = \sum_{\beta = (\beta'_1, 0)} a_\beta D^{(\alpha' + \beta'_1, k-1)} v + \sum_{\beta = (\beta'_2, 1)} a_\beta D^{(\alpha' + \beta'_2, k)} v$$

Par l'hypothèse de récurrence :

$$|D^{(\alpha' + \beta'_1, k-1)} v|_{L^2(\omega_C)} \leq E^{|\alpha' + \beta'_1|+1} F^{k-1} (|\alpha'| + |\beta'_1| + k-1) !$$

$$|D^{(\alpha' + \beta'_2, k)} v|_{L^2(\omega_C)} \leq E^{|\alpha'| + |\beta'_2|+1} F^k (|\alpha'| + |\beta'_2| + k) !$$

En tenant compte de $|\beta'_1| \leq 2$, $|\beta'_2| \leq 1$ et en supposant $1 \leq E \leq F$, on a :

$$\left| \sum_{\substack{|\beta| \leq 2 \\ \beta \neq (0,2)}} a_\beta D^{(\alpha', k-1)} D^\beta v \right|_{L^2(\omega_c)} \leq E^{|\alpha'|+1} F^{k+1} (|\alpha'|+k+1)! \frac{AE}{F} \quad (ii)$$

iii) Majorons les termes intervenant dans la commutation.

Par la formule de Leibnitz, on a :

$$[D^{(\alpha', k-1)}, a_\beta] D^\beta v = \sum_{\substack{\gamma \leq (\alpha', k-1) \\ \gamma \neq 0}} \binom{(\alpha', k-1)}{\gamma} (D^\gamma a_\beta) D^{(\alpha', k-1) - \gamma + \beta} v$$

donc, par (6) :

$$\left| [D^{(\alpha', k-1)}, a_\beta] D^\beta v \right|_{L^2(\omega_c)} \leq \sum_{\substack{\gamma \leq (\alpha', k-1) \\ \gamma \neq 0}} \binom{|\alpha'|+k-1}{|\gamma|} A^{|\gamma|+1} |\gamma|! \left| D^{(\alpha', k-1) - \gamma + \beta} v \right|_{L^2(\omega_c)}$$

En posant $\gamma = (\gamma', \gamma'')$, $\beta = (\beta', \beta'')$, comme $k-1-\gamma'' + \beta'' \leq k$, on a par l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \left| D^{(\alpha', k-1) - \gamma + \beta} v \right|_{L^2(\omega_c)} &\leq E^{|\alpha' - \gamma' + \beta'|+1} F^{k-1-\gamma''+\beta''} (|\alpha'| + k-1 - |\gamma| + |\beta|)! \\ &\leq E^{|\alpha'|+2 - |\gamma|} F^k (|\alpha'| + k+1 - |\gamma|)! \end{aligned}$$

(en supposant $1 \leq E \leq F$).

On obtient alors

$$\begin{aligned} \left| [D^{(\alpha', k-1)}, a_\beta] D^\beta v \right|_{L^2(\omega_c)} &\leq \sum_{j=1}^{|\alpha'|+k-1} n^j \frac{(|\alpha'|+k-1) \dots (|\alpha'|+k-j)}{j!} A^{j+1} j! \times \\ &\leq E^{|\alpha'|+2-j} F^k (|\alpha'|+k+1-j)! \leq E^{|\alpha'|+1} F^{k+1} (|\alpha'|+k+1)! \frac{AE}{F} \sum_{j=1}^{|\alpha'|+k-1} \left(\frac{nA}{E} \right)^j \end{aligned}$$

En désignant par N le nombre de multi-indices de longueur ≤ 2 , on a alors :

$$\left| \sum_{\substack{|\beta| \leq 2 \\ \beta \neq (0,2)}} [D^{(\alpha', k-1)}, a_\beta] D^\beta v \right|_{L^2(\omega_c)} \quad (iii)$$

$$\leq E^{|\alpha'|+1} F^{k+1} (|\alpha'|+k+1)! \frac{NAE}{F} \sum_{j=1}^{|\alpha'|+k-1} \left(\frac{nA}{E} \right)^j$$

En regroupant (i), (ii) et (iii) :

$$|D^{(\alpha', k+1)} v|_{L^2(\omega_c)} \leq E^{|\alpha'|+1} F^{k+1} (|\alpha'|+k+1)! \times$$

$$\left\{ \frac{A^{|\alpha'|+k} (|\alpha'|+k-1)!}{E^{|\alpha'|+1} F^{k+1} (|\alpha'|+k+1)!} + \frac{AE}{F} + N \frac{AE}{F} \sum_{j=1}^{|\alpha'|+k-1} \left(\frac{nA}{E} \right)^j \right\}.$$

On choisit d'abord E telle que $\frac{nA}{E} < 1$, puis F telle que $\left\{ \right\} \leq 1$.

Ceci termine la démonstration du lemme II.3 donc celle du théorème II.

On en déduit, par un difféomorphisme analytique, le résultat :

Théorème III.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $P = P(x, D)$ un opérateur elliptique dans $\overline{\Omega}$, Θ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que les coefficients de P sont analytiques dans $\Theta \cap \overline{\Omega}$, que $\partial\Omega \cap \Theta$ est analytique ; soit u une fonction C^∞ dans $\Theta \cap \overline{\Omega}$ vérifiant :

$$\begin{cases} u|_{\partial\Omega \cap \Theta} = 0 \\ P(x, D)u \text{ analytique dans } \Theta \cap \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Alors la fonction u est analytique dans $\Theta \cap \overline{\Omega}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HÖRMANDER : "Linear partial differential operators" - Springer Verlag 1963.

- [2] MORREY et NIRENBERG : "On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations".
Comm. Pure Appl. Math. 10, 271-290 (1957).

- [3] BAOUENDI et GOULAOUIC : "Analyticité "jusqu'au bord" pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés".
C.R. Acad. Sc. PARIS (avril 1970).