

JEAN-CLAUDE TOUGERON

Les théorèmes de transversalité et de quasi-transversalité

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 2

« Séminaire de probabilités, statistiques et analyse », , exp. n° 6, p. 1-22

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969__2_A6_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES THEOREMES DE TRANSVERSALITE ET DE QUASI-TRANSVERSALITE

par

Jean-Claude TOUGERON

Introduction.

Dans cet article, nous démontrons deux variantes, l'une globale (théorème 1), l'autre locale (théorème 2), du théorème de transversalité de R. Thom. Le théorème 2 est la version analytique du théorème de quasi-transversalité démontré dans [3]. Cette version analytique est utilisée dans [4], ce qui justifie le présent article.

§ 1 - Stratifications.

Soit X une variété (différentiable de classe C^∞ ou analytique réelle ou analytique complexe) de faisceau structural $\mathcal{O}$ et de dimension n . Si $\mathcal{J}$ est un faisceau d'idéaux localement de type fini sur X et si $x \in X$, on désigne par $V(\mathcal{J})$ le support de $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ et par $\mathcal{J}_x$, la fibre de $\mathcal{J}$ en x . On note $\overline{\mathcal{J}}$ le faisceau d'idéaux dont la fibre en tout point $x \in X$ est la racine $\overline{\mathcal{J}}_x$ de l'idéal $\mathcal{J}_x$.

Soit $x \in V(\mathcal{J})$; nous dirons que x est un point régulier de codimension k de $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ si, au voisinage de x , $V(\mathcal{J})$ est une variété régulière de codimension k et si $\mathcal{J}_x$ est l'idéal des germes nuls sur $V(\mathcal{J})$.

a) Le faisceau $J_k(\mathcal{J})$. Soit $x \in X$ et soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$ une famille de générateurs de l'idéal $\mathcal{J}_x$. Si $(U, (x_1, \dots, x_n))$ est une carte locale de X au voisinage de x , on désigne par $J_k(\mathcal{J})_x$ l'idéal de $\mathcal{O}_x$ engendré par $\mathcal{J}_x$

et tous les jacobiens
$$\frac{D(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{D(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})}$$
 où $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq s$ et

$1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ (on pose $J_0(\mathcal{J})_x = \mathcal{O}_x$ et si $k > n$, $J_k(\mathcal{J})_x = \mathcal{J}_x$).

Cet idéal ne dépend pas de la famille de générateurs (φ_i) et de la carte locale $(U, \underline{x})$. Les $J_k(\mathcal{J})_x$ définissent un faisceau d'idéaux localement de type fini $J_k(\mathcal{J})$.

b) Le faisceau $\sigma_k(\mathcal{J})$. Soit $\mathcal{H}$ un module de présentation finie sur un anneau local A . On a une suite exacte :

$$(*) \quad A^p \xrightarrow{M} A^q \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow (0)$$

Soit $k \in \mathbb{N}$; si $q-p \leq k < q$, on désigne par $\sigma'_k(\mathcal{H})$ l'idéal engendré dans A par les mineurs d'ordre $q-k$ de la matrice M ; si $k < q-p$, on pose

$\sigma'_k(\mathcal{H}) = \{0\}$; si $k \geq q$, $\sigma'_k(\mathcal{H}) = A$. On démontre (cf. [4], chapitre IV, §1) que l'idéal $\sigma'_k(\mathcal{H})$ est indépendant de la présentation $(*)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désigne par $\sigma_k(\mathcal{H})$ l'idéal engendré dans A par tous les ξ tels que $\xi \cdot \mathcal{H}$ soit contenu dans un sous-module de $\mathcal{H}$ engendré par k éléments. On montre facilement (cf. [4], chapitre IV, §1) que :

$$\sigma'_k(\mathcal{H}) \subset \sigma_k(\mathcal{H}) \quad \text{et} \quad \overline{\sigma'_k(\mathcal{H})} = \overline{\sigma_k(\mathcal{H})}.$$

Si $\mathcal{J}$ est un faisceau d'idéaux localement de type fini sur X , on pose, $\forall x \in X$: $\sigma_k(\mathcal{J})_x = \sigma_k(\mathcal{J}_x)$. Les $\sigma_k(\mathcal{J})_x$ définissent un faisceau d'idéaux $\sigma_k(\mathcal{J})$.

Si $\mathcal{J}$ est localement de présentation finie, on définit un faisceau d'idéaux $\sigma'_k(\mathcal{J})$, localement de type fini sur X , en posant, $\forall x \in X$:

$$\sigma'_k(\mathcal{J})_x = \sigma'_k(\mathcal{J}_x).$$

c) Le faisceau $\mathcal{R}_k(\mathcal{J})$. Le faisceau d'idéaux $\mathcal{J}$ étant localement de type fini, on pose : $\mathcal{R}_k(\mathcal{J}) = \overline{J_k(\mathcal{J})} \cap \overline{\sigma_k(\mathcal{J})}$. Supposons que $k \in [1, n]$: un point x appartient à $V(\mathcal{J}) - V(\mathcal{R}_k(\mathcal{J}))$ si et seulement si $x \in V(\mathcal{J}) - V(\sigma_k(\mathcal{J}))$ (i.e. l'idéal $\mathcal{J}_x$ est engendré sur $\mathcal{O}_x$ par k éléments $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ nuls au point x) et $x \in V(\mathcal{J}) - V(J_k(\mathcal{J}))$ (i.e. il existe un jacobien $\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{D(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})}$ différent de 0 au point x). Cela signifie que x est un point régulier de codimension k de $\mathcal{O}|\mathcal{J}$.

On a $\mathcal{R}_0(\mathcal{J}) = \overline{\sigma_0(\mathcal{J})}$ et $V(\mathcal{J}) - V(\mathcal{R}_0(\mathcal{J})) = \{x \in X ; \mathcal{J}_x = \{0\}\}$. Ainsi, pour $k \in [0, n]$, $V(\mathcal{J}) - V(\mathcal{R}_k(\mathcal{J}))$ est l'ensemble des points réguliers de codimension k de $\mathcal{O}|\mathcal{J}$.

Le cas analytique. Si X est analytique, tout faisceau d'idéaux localement de type fini est cohérent (d'après le théorème de cohérence d'OKA), donc localement de présentation finie. Si $\mathcal{I}$ est un faisceau d'idéaux, analytique cohérent, il en sera de même de $J_k(\mathcal{I})$ et $\sigma'_k(\mathcal{I})$, donc aussi de $\overline{J_k(\mathcal{I})}$ et $\overline{\sigma'_k(\mathcal{I})}$ et enfin de $\mathcal{R}_k(\mathcal{I})$. Ainsi, l'ensemble des points singuliers de $\mathcal{A}|\mathcal{I}$ (i.e. l'ensemble des points $x \in V(\mathcal{I})$ tels que $\mathcal{A}_x|\mathcal{I}_x$ ne soit pas un anneau local régulier) est un sous-ensemble analytique fermé de X , support du faisceau analytique cohérent $\mathcal{A}|\sum_{k=0}^n \mathcal{R}_k(\mathcal{I})$.

d) Strates et faisceaux stratifiables.

Une strate de X , de codimension k , ou encore une k -strate, est un couple $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ de deux faisceaux d'idéaux localement de type fini sur X , tels que : $\mathcal{I} \subset \overline{\mathcal{I}'} \subset \mathcal{R}_k(\mathcal{I})$.

Un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ est stratifiable s'il existe une suite $\mathcal{I}_j$, $j \in [0, s]$, de faisceaux d'idéaux sur X , telle que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0$, $\mathcal{I}_s = \mathcal{A}$ et $\forall j \in [0, s-1]$, $(\mathcal{I}_j, \mathcal{I}_{j+1})$ est une strate de X . La famille $(\mathcal{I}_j)_{j \in [0, s]}$ est alors une stratification de faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$.

Le cas analytique. Supposons que X est analytique et soit $\mathcal{I}$ un faisceau d'idéaux analytique cohérent sur X . Définissons, par récurrence sur j , une chaîne strictement croissante de faisceaux d'idéaux, analytiques cohérents sur X : $\mathcal{I}_0 \subset \dots \subset \mathcal{I}_j \subset \dots$.

On pose $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}$; si $j > 0$, et si $k = \text{ht}(\mathcal{I}_{j-1}) = \inf(\text{ht}_{\mathcal{A}_x}(\mathcal{I}_{j-1,x}))$,

on pose $\mathcal{I}_j = \mathcal{R}_k(\mathcal{I}_{j-1})$. Si $k \leq n$, i.e. $\mathcal{I}_{j-1} \neq \mathcal{A}$, on a :

$\text{ht}(\mathcal{I}_j) > \text{ht}(\mathcal{I}_{j-1})$ (la vérification est de nature locale ; cf. [3], chap. I,

§ 1). Il existe donc un plus petit entier $s \leq n - \text{ht}(\mathfrak{J}_0) + 1$ tel que $\mathfrak{J}_s = \mathcal{O}$.

La suite $\text{st}(\mathfrak{J}) = (\mathfrak{J}_j)_{j \in [0, s]}$ définit la stratification primaire de $\mathfrak{J}$.

Ainsi : tout faisceau d'idéaux, analytique cohérent, est stratifiable.

e) Le faisceau $[\mathfrak{J} : \mathfrak{J}']$.

Supposons que la variété X est analytique et soient $\mathfrak{J}, \mathfrak{J}'$ deux faisceaux d'idéaux, analytiques cohérents sur X . On désigne par $[\mathfrak{J} : \mathfrak{J}']$ le faisceau transporteur de $\mathfrak{J}'$ dans $\mathfrak{J}$; par définition, $\forall x \in X$,

$[\mathfrak{J} : \mathfrak{J}']_x = [\overline{\mathfrak{J}}_x : \overline{\mathfrak{J}'}_x] = \{a \in \mathcal{O}_x ; a. \overline{\mathfrak{J}'}_x \subset \overline{\mathfrak{J}}_x\}$. Ce faisceau d'idéaux est analytique cohérent.

Dans le cas analytique complexe : $V([\mathfrak{J} : \mathfrak{J}']) = \overline{V(\mathfrak{J}) - V(\mathfrak{J}')}.$

En effet, si $x \in V(\mathfrak{J}) - V(\mathfrak{J}')$, $\overline{\mathfrak{J}}_x \neq \mathcal{O}_x$ et $\overline{\mathfrak{J}'}_x = \mathcal{O}_x$, donc $[\mathfrak{J} : \mathfrak{J}']_x = \overline{\mathfrak{J}}_x \neq \mathcal{O}_x$ et $x \in V([\mathfrak{J} : \mathfrak{J}'])$. Ainsi : $V([\mathfrak{J} : \mathfrak{J}']) \supset \overline{V(\mathfrak{J}) - V(\mathfrak{J}')}.$

Réciproquement, si $x \notin \overline{V(\mathfrak{J}) - V(\mathfrak{J}')}$, on a $V(\mathfrak{J}) \subset V(\mathfrak{J}')$ au voisinage de x , donc $\overline{\mathfrak{J}'}_x \subset \overline{\mathfrak{J}}_x$ (d'après le nullstellensatz), i.e. $[\mathfrak{J} : \mathfrak{J}']_x = \mathcal{O}_x$, i.e. $x \notin V([\mathfrak{J} : \mathfrak{J}'])$. On en déduit immédiatement que :

- si $V(\mathfrak{J}) \subset V(\mathfrak{J}')$, $[\mathfrak{J} : \mathfrak{J}'] = \mathcal{O}$.

- si $V(\mathfrak{J}) \not\subset V(\mathfrak{J}')$, $\text{ht}([\mathfrak{J} : \mathfrak{J}']) = \inf_{x \in V(\mathfrak{J}) - V(\mathfrak{J}')} (\text{ht}_{\mathcal{O}_x}(\overline{\mathfrak{J}}_x)).$

§ 2 - Le faisceau d'idéaux $J_k^*(\pi)$.

Soient X, Y deux variétés analytiques réelles (resp. analytiques complexes) de dimensions respectives n, p . On désigne par $J^q(X, Y)$ le fibré sur $X \times Y$ des jets d'ordre q de X dans Y . Soient $(U ; x_1, \dots, x_n)$ et $(V ; y_1, \dots, y_p)$ des cartes locales de X et Y respectivement. Ces coordonnées définissent naturellement sur $J^q(U, V)$ un système de coordonnées (x_1, y_j^w)

($i \in [1, n]$; $j \in [1, p]$; $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{N}^n$ et $0 \leq |\omega| = \sum_{i=1}^n \omega_i \leq q$) de la façon suivante : si $\varphi \in J^q(U, V)$ est un jet d'origine $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ représenté par $f = (f_1, \dots, f_p)$ analytique au voisinage de x^0 , on pose :

$$x_i(\varphi) = x_i^0 ; y_j^\omega(\varphi) = \frac{\partial^{|\omega|}}{\partial x^\omega} f_j(x^0).$$

Soit ρ_q la projection canonique de $J^{q+1}(X, Y)$ sur $J^q(X, Y)$. Si P est une fonction analytique sur un ouvert Ω' de $J^q(U, V)$, on pose :

$$\frac{\partial^* P}{\partial x_i} = \frac{\partial P}{\partial x_i} + \sum_{j, \omega} \frac{\partial P}{\partial y_j^\omega} \cdot y_j^{\omega+[i]}$$

(on désigne par $[i]$ l'élément de $\mathbb{N}^n$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la i ème qui est égale à 1). Les fonctions $\frac{\partial^* P}{\partial x_i}$ sont analytiques sur $\rho_q^{-1}(\Omega')$. Si $P_1, \dots, P_k$ sont analytiques sur Ω' , on pose :

$$\frac{D^*(P_1, \dots, P_k)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})} = \det \left| \frac{\partial^* P_\alpha}{\partial x_{i_\beta}} \right| , \quad \alpha, \beta \in [1, k]$$

Soit π un faisceau d'idéaux, analytique cohérent sur un ouvert Ω de $J^q(X, Y)$. Nous allons définir un faisceau d'idéaux $J_k^*(\pi)$, analytique cohérent sur $\rho_q^{-1}(\Omega)$: si $\xi \in \rho_q^{-1}(\Omega)$, soit Ω' un voisinage ouvert de $\rho_q(\xi)$, contenu dans Ω et dans une carte $J^q(U, V)$, tel que $\pi_{\rho_q(\xi)}$ soit engendré par les fonctions $P_1, \dots, P_s$ analytiques sur Ω' ; par définition, $J_k^*(\pi)_\xi$ est l'idéal engendré par $P_1 \circ \rho_q, \dots, P_s \circ \rho_q$ et les $\frac{D^*(P_{\alpha_1}, \dots, P_{\alpha_k})}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_k \in [1, s]$ et $i_1, \dots, i_k \in [1, n]$), (on vérifiera que cet idéal ne dépend pas de la famille $\{P_1, \dots, P_s\}$ de générateurs de l'idéal $\pi_{\rho_q(\xi)}$ et de la carte $J^q(U, V)$).

Si f est une application analytique (ou C^∞ , si les variétés sont réelles) de X dans Y , on note $j^q(f)$ l'application analytique (ou C^∞ si f est C^∞) de X dans $J^q(X, Y)$ qui associe à tout point $x \in X$ le jet d'ordre q , $j^q(f)(x)$, de f au point x . Posons $f_{-q} = j^q(f)$. On note $f_{-q}^*(\pi)$ le faisceau d'idéaux analytique cohérent (ou différentiable, localement de type fini, si f est C^∞) sur $f_{-q}^{-1}(\Omega)$ tel que la fibre en chaque point η soit engendrée par les $P \circ f_{-q} = f_{-q}^*(P)$, où $P \in \pi_{f(\eta)}$. On vérifie l'égalité :

$$(1) \quad J_k(f_{-q}^*(\pi)) = f_{-q+1}^*(J_k^*(\pi)).$$

La proposition suivante nous permettra de comparer les faisceaux d'idéaux (analytiques cohérents sur $\rho_q^{-1}(\Omega)$) $\rho_q^*(J_k(\pi))$ et $J_k^*(\pi)$:

Proposition 1. On a l'inégalité :

$$\text{ht} [J_k^*(\pi) : \rho_q^*(J_k(\pi))] > n.$$

Pour la démonstration, on peut supposer que les variétés X, Y sont analytiques complexes : en effet, le cas réel se déduit immédiatement, par complexification, du cas complexe.

Soit $\xi \in V(J_k^*(\pi)) - \rho_q^{-1}(V(J_k(\pi)))$, nous devons vérifier (cf. § 1, e) que :

$$(2) \quad h = \text{ht}(J_k^*(\pi)_\xi) > n.$$

Puisque $\rho_q(\xi) \notin V(J_k(\pi))$, on peut supposer, en diminuant Ω si nécessaire, qu'il existe un sous-faisceau π' de π engendré par k fonctions $P_1, \dots, P_k$ analytiques sur Ω et telles que $V(J_k(\pi')) = \emptyset$. Puisque $J_k^*(\pi) \supset J_k^*(\pi')$, il suffit de vérifier (2) pour π' au lieu de π . Ainsi, nous pouvons supposer que π est engendré par des fonctions analytiques $P_1, \dots, P_k$ sur Ω et que

$$V(J_k(\pi)) = \emptyset.$$

Il existe des points ξ' , appartenant à $\rho_q^{-1}(\Omega)$ et aussi voisins que l'on veut de ξ , tels que $V(J_k^*(\pi))$ soit une variété régulière de codimension h , au voisinage de ξ . Remplaçant ξ par ξ' , nous pouvons donc supposer que $V(J_k^*(\pi))$ est régulière de codimension h au voisinage de ξ .

Enfin, on peut admettre (en le diminuant si nécessaire) que Ω est contenu dans une carte locale $J^q(U, V)$ du point $\rho_q(\xi)$ et que dans la carte $J^{q+1}(U, V)$, les coordonnées de ξ sont :

$$x_1(\xi) = \dots = x_n(\xi) = 0$$

et pour $j \in [1, p]$ et $\omega \in \mathbb{N}^n$, $0 \leq |\omega| \leq q+1$, $y_j^\omega(\xi) = \xi_j^\omega$.

Soit ℓ un entier $\geq q+1$; si $j \in [1, p]$ et $\omega \in \mathbb{N}^n$, $q+1 < |\omega| \leq \ell$, désignons par ξ_j^ω des nombres complexes arbitraires. Soient A et B deux espaces vectoriels complexes, le premier admettant comme système de coordonnées les a_j^μ ($\mu \in \mathbb{N}^n$; $0 \leq |\mu| \leq \ell$; $j \in [1, p]$) ; le second admettant comme système de coordonnées les b_j^v ($v \in \mathbb{N}^n$; $\ell+1 \leq |v| \leq \ell+q+2$; $j \in [1, p]$). Si U_0 , A_0 , B_0 sont des voisinages respectifs assez petits de l'origine de U , A , B , on définit une application polynomiale Γ :

$$U_0 \times A_0 \times B_0 \longrightarrow \rho_q^{-1}(\Omega)$$

en posant : $\Gamma^*(x_1) = x_1$; ... ; $\Gamma^*(x_n) = x_n$ et pour $j \in [1, p]$,

$\omega \in \mathbb{N}^n$, $0 \leq |\omega| \leq q+1$:

$$\Gamma^*(y_j^\omega) = \frac{\partial^{|\omega|}}{\partial x^\omega} \left(\sum_{|\mu|=0}^{\ell} (a_j^\mu + \xi_j^\mu) \frac{x^\mu}{\mu!} + \sum_{|\nu|=\ell+1}^{\ell+q+2} b_j^\nu \frac{x^\nu}{\nu!} \right)$$

(si $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose $x^\omega = x_1^{\omega_1} \dots x_n^{\omega_n}$).

Si $a \in A$, on désigne par i_a l'immersion :

$U_0 \times B_0 \ni (x, b) \longmapsto (x, a, b) \in U_0 \times A_0 \times B_0$ et l'on pose

$$\Gamma_a = \Gamma \circ i_a.$$

Lemme 1. L'application Γ est une submersion. L'application Γ_a restreinte à $(U_0 - \{0\}) \times B_0$ est une submersion.

Démonstration. Le jacobien de Γ par rapport aux coordonnées $x_1, \dots, x_n$ et a_j^μ ($0 \leq |\mu| \leq q+1$ et $j \in [1, p]$) est égal à 1, ce qui démontre la première assertion.

Posons $U_0^i = \{x \in U_0 ; x_i \neq 0\}$. Désignons par $\underline{v}^i$ l'ensemble des multi-indices $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que : $\ell+1 \leq |v| \leq \ell+q+2$ et $v_i \geq \ell+1$. Puisque $U_0 - \{0\} = \bigcup_{i=1}^n U_0^i$, il suffit de montrer que le jacobien de Γ_a par rapport aux coordonnées $x_1, \dots, x_n$ et b_j^v (avec $v \in \underline{v}^i$ et $j \in [1, p]$) est $\neq 0$ en tout point de U_0^i . Ce jacobien est visiblement égal au jacobien des

$$\frac{\partial |\omega|}{\partial x^\omega} \left(\sum_{v \in \underline{v}^i} b_j^v \frac{x^v}{v!} \right) \text{ par rapport aux } b_j^v \text{ (} v \in \underline{v}^i \text{ et } j \in [1, p] \text{). Puisque}$$

$$\sum_{v \in \underline{v}^i} b_j^v \frac{x^v}{v!} = x_i^{\ell+1} \cdot \sum_{v \in \underline{v}^i} b_j^v \frac{x^{v-[i]}}{v!} \quad (\text{on note } [i] \text{ le multi-indice dont}$$

toutes les composantes sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ qui est égale à $\ell+1$), la formule de Leibnitz montre que ce jacobien est égal au jacobien des

$$x_i^{\ell+1} \frac{\partial |\omega|}{\partial x^\omega} \left(\sum_{v \in \underline{v}^i} b_j^v \frac{x^{v-[i]}}{v!} \right) \text{ par rapport aux } b_j^v \text{ (} v \in \underline{v}^i \text{ et } j \in [1, p] \text{),}$$

i.e. à C. $x_i^{(\ell+1)p} \binom{n+q+1}{n}$, où C est un nombre rationnel non nul. Puisque $x_i \neq 0$, ce jacobien est non nul, c.q.f.d.

Démonstration de la proposition 1.

Appliquons le lemme précédent, avec $\ell = q+1$. Soit Π la projection : $U_0 \times A_0 \times B_0 \longrightarrow A_0 \times B_0$ et posons $\mathcal{V} = \Gamma^{-1}(\rho_q^{-1}(V(\pi)))$;

$\mathcal{V}^* = \Gamma^{-1}(V(J_k^*(\pi)))$. Puisque Γ et ρ_q sont des submersions, $\mathcal{V}$ est une sous-variété régulière de codimension k de $U_0 \times A_0 \times B_0$, définie par les équations $\varphi_1 = 0 ; \dots ; \varphi_k = 0$, si l'on pose $P_i \circ \rho_q \circ \Gamma = \varphi_i$. De même, $\mathcal{V}^*$ est au voisinage de $\Gamma^{-1}(\xi) = \{0\} \times \{0\} \times B_0$ une sous-variété régulière de codimension h . En outre, $\mathcal{V}^*$ est l'ensemble des points de $\mathcal{V}$ en lesquels s'an-

nulent tous les jacobiens $\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{D(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})}$ ($0 < j_1 < \dots < j_k \leq n$), i.e.

$\mathcal{V}^*$ est l'ensemble des points critiques de $\Pi|_{\mathcal{V}}$. D'après le théorème de

Sard (B. Malgrange, [1], chapitre I, § 7), l'ensemble $\mathcal{X}$ des points

$(a,b) \in A_0 \times B_0$ tels que $\Pi^{-1}(a,b) \cap \mathcal{V}^* = \emptyset$, est partout dense dans $A_0 \times B_0$.

Puisque la restriction de Γ_0 à $U_0 - \{0\} \times B_0$ est une submersion (lemme 1), $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V} \cap ((U_0 - \{0\}) \times \{0\} \times B_0)$ est une sous-variété régulière de codimension k de $(U_0 - \{0\}) \times \{0\} \times B_0$. Soit Π' la projection : $\mathcal{V}_0 \longrightarrow B_0$ et soit b_0 une valeur non critique de Π' (il en existe, d'après le théorème de Sard). Le plan $\Pi'^{-1}(0, b_0)$ (de dimension n) coupe $\mathcal{V}^*$ au seul point $(0, 0, b_0)$ et en ce point $\mathcal{V}^*$ est une variété de codimension h ; on a donc $h \geq n$. Si $h = n$, pour tout point (a,b) assez voisin de $(0, b_0)$, $\Pi'^{-1}(a,b)$ couperait $\mathcal{V}^*$, ce qui est absurde, puisque $\mathcal{X}$ est partout dense dans $A_0 \times B_0$. Ainsi : $h > n$, c.q.f.d.

§ 3 - Le théorème de transversalité.

Dans ce paragraphe, nous supposons que les variétés X, Y sont analytiques réelles. On désigne par $C^\infty(X, Y)$ l'espace des applications C^∞ de X dans Y . Cet espace sera muni de la topologie fine (ou topologie de Whitney) : une base d'ouverts pour cette topologie est formée de tous les ensembles $\mathcal{O}(q, U) = \{f \in C^\infty(X, Y) ; j^q(f)(X) \subset U\}$ où $q \in \mathbb{N}$ et U décrit l'ensemble des ouverts du fibré $J^q(X, Y)$. On vérifie facilement que $C^\infty(X, Y)$ est un espace de Baire (i.e. toute intersection dénombrable d'ouverts partout denses est partout dense).

Définition 1. Une propriété (P) , relative aux éléments de $C^\infty(X, Y)$ est générique (au sens de Thom), si elle est vérifiée en tout point d'un ouvert partout dense de $C^\infty(X, Y)$.

Si $f \in C^\infty(X, Y)$, on rappelle que $\underline{f}_q = j^q(f)$.

Proposition 2. Soit Δ un sous-ensemble fermé de $J^q(X, Y)$, réunion dénombrable de sous-variétés de codimensions $> n$. Génériquement, $\underline{f}_q^{-1}(\Delta) = \emptyset$.

Nous démontrons d'abord deux lemmes préliminaires :

Lemme 2. Soit Δ un sous-ensemble fermé de $J^q(X, Y)$ et soit K un sous-ensemble fermé de X . L'ensemble $\Omega_K = \{f \in C^\infty(X, Y) ; \underline{f}_q^{-1}(\Delta) \cap K = \emptyset\}$ est un ouvert de $C^\infty(X, Y)$.

Démonstration. En effet : $\Omega_K = \{f \in C^\infty(X, Y) ; (j^q(f)(K)) \cap \Delta = \emptyset\}$
 $= \{f \in C^\infty(X, Y) ; j^q(f)(K) \subset U'\}$, où $U' = J^q(X, Y) - \Delta$ est un ouvert de $J^q(X, Y)$.
 Soit U'' l'ensemble ouvert des points de $J^q(X, Y)$ qui se projettent sur l'ouvert $X - K$. Posons $U = U' \cup U''$. Il est immédiat que $\Omega_K = \{f \in C^\infty(X, Y) ; j^q(f)(X) \subset U\}$, ce qui montre que Ω_K est un ouvert de $C^\infty(X, Y)$.

Lemme 3. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$; V un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$; K un compact de U ; Δ une réunion dénombrable de sous-variétés de codimensions $> n$ de $J^q(U, V)$. Si $f \in C^\infty(U, V)$, $s \in \mathbb{N}$ et si η est un nombre réel > 0 , il existe $g \in C^\infty(U, V)$ telle que $\|f - g\|_K^s < \eta$ et $\underline{g}_q^{-1}(\Delta) \cap K = \emptyset$.

Démonstration. On se ramène au cas $U = \mathbb{R}^n$; $V = \mathbb{R}^p$. En effet, soit ϵ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $\epsilon = 1$ au voisinage de K , $\epsilon = 0$ sur $\mathbb{R}^n - K'$, où K' est un voisinage compact de K , contenu dans U . Soit $\tilde{f}$ l'application C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, égale à $\epsilon \cdot f$ sur U et 0 sur $\mathbb{R}^n - K'$. Si l'on suppose le lemme démontré lorsque $U = \mathbb{R}^n$; $V = \mathbb{R}^p$, il existe $\tilde{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que $\|\tilde{f} - \tilde{g}\|_K^s < \eta$ et $\tilde{g}_q^{-1}(\Delta) \cap K = \emptyset$. En diminuant η si nécessaire, on peut supposer que $\tilde{g}(K') \subset V$; si $0 \in V$, ce que l'on peut toujours supposer, la convexité de V entraîne alors que $g = \epsilon \cdot \tilde{g} \mid U \in C^\infty(U, V)$. Visiblement, $\|f - g\|_K^s = \|\tilde{f} - \tilde{g}\|_K^s < \eta$ et $\underline{g}_q^{-1}(\Delta) \cap K = \tilde{g}_q^{-1}(\Delta) \cap K = \emptyset$.

Supposons donc que $U = \mathbb{R}^n$; $V = \mathbb{R}^p$ et posons $f = (f_1, \dots, f_p)$. Désignons par $\mathbb{A}$ l'espace vectoriel réel admettant comme système de coordonnées les a_j^μ ($\mu \in \mathbb{N}^n$; $0 \leq |\mu| \leq q$; $j \in [1, p]$). Si $a = (a_j^\mu) \in \mathbb{A}$, soit $f^a = (f_1^a, \dots, f_p^a)$ l'application C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que :

$$f_j^a(x) = f_j(x) + \sum_{|\mu|=0}^q a_j^\mu \frac{x^\mu}{\mu!} .$$

Soit Γ l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{A}$ dans $J^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que $\Gamma^*(x_i) = x_i$ et $\Gamma^*(y_j^\omega) = \frac{\partial | \omega |_{f^a}}{\partial x^\omega_j}$.

Visiblement, le jacobien de Γ par rapport aux coordonnées $x_1, \dots, x_n, a_j^\mu$ est égal à 1, ce qui montre que Γ est une submersion. Soit Π la projection canonique : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$. Puisque $\Gamma^{-1}(\Delta)$ est une réunion dénombrable de sous-variétés de codimensions $> n$, $\Pi(\Gamma^{-1}(\Delta))$ est un sous-ensemble de mesure

nulle de $\mathbb{A}$ (par exemple, d'après le théorème de Sard). Si $a \in \mathbb{A} - \Pi(\Gamma^{-1}(\Delta))$

est assez voisin de l'origine, en posant $g = f^a$:

$$\|f - g\|_K^S \leq \|f - g\|_K^Q < \eta \text{ et } g_q^{-1}(\Delta) = \Pi^{-1}(a) \cap \Gamma^{-1}(\Delta) = \emptyset, \text{ c.q.f.d.}$$

Démonstration de la proposition 2.

Posons $\Omega = \{f \in C^\infty(X, Y) ; f_q^{-1}(\Delta) = \emptyset\}$. D'après le lemme 2 (en prenant $K = X$), Ω est ouvert dans $C^\infty(X, Y)$. Il reste à prouver que Ω est partout dense dans $C^\infty(X, Y)$. Soit $f_0 \in C^\infty(X, Y)$. Si $x \in X$, soit U_x un voisinage ouvert relativement compact de x , contenu dans une carte locale de x et tel que $f_0(\bar{U}_x)$ soit contenu dans une carte locale convexe de $f_0(x)$. Soit $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un recouvrement ouvert localement fini de X , plus fin que le recouvrement $\{U_x\}_{x \in X}$. Il existe des compacts $K_i \subset U_i$ tels que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = X$. Enfin, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f_0(\bar{U}_i)$ est contenu dans une carte locale convexe V_i .

Soit $\mathcal{V} = \{f \in C^\infty(X, Y) ; \forall i \in \mathbb{N}, f(\bar{U}_i) \subset V_i\}$: visiblement, $\mathcal{V}$ est un voisinage ouvert de f_0 . Posons $\Omega_{K_i} = \{f \in C^\infty(X, Y) ; f_q^{-1}(\Delta) \cap K_i = \emptyset\}$; d'après le lemme 2, les $\Omega_{K_i} \cap \mathcal{V}$ sont des ouverts de $\mathcal{V}$. S'ils sont partout denses dans $\mathcal{V}$ (qui est un ouvert d'un espace de Baire, donc un espace de Baire), $\Omega \cap \mathcal{V} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (\Omega_{K_i} \cap \mathcal{V})$ sera partout dense dans $\mathcal{V}$. Il suffit donc de montrer que $\Omega_{K_i} \cap \mathcal{V}$ est partout dense dans $\mathcal{V}$.

Posons $U_i = U$; $V_i = V$; $K_i = K$ (on identifie U à un ouvert de $\mathbb{R}^n$; V à un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$). Soit K' un voisinage compact de K , contenu dans U , et désignons par ε une fonction C^∞ sur U , à valeurs dans $[0, 1]$, égale à 1 au voisinage de K et 0 sur $U - K'$.

Si $f \in \mathcal{V}$, désignons par f' la restriction de f à U : $f' \in C^\infty(U, V)$.

D'après le lemme 3, $\forall s \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$, il existe $g' \in C^\infty(U, V)$, telle que :

$\|f' - g'\|_K^s < \eta$ et $g'^{-1}(\Delta) \cap K = \emptyset$. La fonction $g'' = \epsilon g' + (1-\epsilon) f'$ appartient à $C^\infty(U, V)$ (car V est convexe). Soit g l'élément de $C^\infty(X, Y)$ égal à g'' sur U et à f sur $X - K'$. En restriction à U : $f - g = \epsilon(f' - g')$. En choisissant ϵ assez grand et η assez petit, on peut supposer que g est aussi voisin que l'on veut de f . Par construction, $g \in \Omega_K$ (car $g = g'$ au voisinage de K). Ainsi, $\Omega_K \cap \mathcal{V}$ est partout dense dans $\mathcal{V}$, c.q.f.d.

Le théorème suivant est une version algébrique du théorème de transversalité de Thom [2] :

Théorème 1. Soit $\tilde{\pi}$ un faisceau d'idéaux, analytique cohérent sur un ouvert $\tilde{\Omega}$ de $J^q(X, Y)$. Soit Ω un ouvert de $J^q(X, Y)$ tel que $\overline{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$ et posons $\pi = \tilde{\pi}|_{\Omega}$. Si $f \in C^\infty(X, Y)$, génériquement :

$$\overline{f_{-q}^*(J_K(\pi))} = \overline{J_K(f_{-q}^*(\pi))}.$$

Démonstration. Posons $\Sigma = V([\overline{J_K^*(\pi)} : \rho_q^*(J_K(\pi))])$

$$\tilde{\Sigma} = V([\overline{J_K^*(\tilde{\pi})} : \rho_q^*(J_K(\tilde{\pi}))]).$$

L'adhérence Δ de Σ dans $J^{q+1}(X, Y)$ est contenue dans $\tilde{\Sigma}$ et, d'après la proposition 1, $\tilde{\Sigma}$ est une réunion finie de sous-variétés de $J^{q+1}(X, Y)$

de codimensions $> n$. D'après la proposition 2, génériquement :

$f_{-q+1}^{-1}(\Sigma) = \emptyset$. On déduit de là et de l'égalité (1) du paragraphe 2, les inclusions :

$$\overline{J_K(f_{-q}^*(\pi))} = \overline{f_{-q+1}^*(J_K^*(\pi))} \supset \overline{f_{-q+1}^*(J_K^*(\pi))} \supset \overline{f_{-q}^*(J_K(\pi))}.$$

D'autre part, on a toujours l'inclusion : $f_{-q}^*(J_K(\pi)) \supset J_K(f_{-q}^*(\pi))$, ce qui démontre le théorème.

Corollaire 1. En plus des hypothèses du théorème 1, donnons nous un faisceau d'idéaux $\tilde{\pi}'$, analytique cohérent sur $\tilde{\Omega}$ et tel que $(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}')$ soit une k-strate de $\tilde{\Omega}$.

Posons $\pi' = \tilde{\pi}' \mid \Omega$. Si $f \in C^\infty(X, Y)$, génériquement :

$$(f_{-q}^*(\pi), f_{-q}^*(\pi')) \text{ est une k-strate de } f_{-q}^{-1}(\Omega).$$

Démonstration. Par hypothèse : $\pi \subset \pi' \subset \overline{\sigma_k(\pi)} \cap \overline{J_k(\pi)}$.

Pour tout $f \in C^\infty(X, Y)$: $f_{-q}^*(\overline{\sigma_k(\pi)}) \subset \overline{\sigma_k(f_{-q}^*(\pi))}$.

D'après le théorème 1, on a génériquement :

$$\overline{f_{-q}^*(J_k(\pi))} = \overline{J_k(f_{-q}^*(\pi))}$$

d'où :

$$f_{-q}^*(\pi) \subset \overline{f_{-q}^*(\pi')} \subset \overline{\sigma_k(f_{-q}^*(\pi))} \cap \overline{J_k(f_{-q}^*(\pi))}, \text{ c.q.f.d.}$$

Corollaire 2. Avec les hypothèses du théorème 1, génériquement $f_{-q}^*(\pi)$ est un idéal stratifiable.

Démonstration. En effet, soit $(\tilde{\pi}_j)_{j \in [0, s]}$ une stratification de $\tilde{\pi}$ (une telle stratification existe, d'après le paragraphe 1, d) : d'après le corollaire 1, si l'on pose $\pi_j = \tilde{\pi}_j \mid \Omega$, $(f_{-q}^*(\pi_j))_{j \in [0, s]}$ est une stratification de $f_{-q}^*(\pi)$, c.q.f.d.

§ 4 - Propriétés généralement vraies.

a. Soient $\underline{k}$ un corps commutatif ; $\mathcal{F} = \underline{k}[[x_1, \dots, x_n]]$ l'anneau des séries formelles à n indéterminées, à coefficients dans $\underline{k}$; $\underline{n}$ l'idéal maximal de $\mathcal{F}$. Si p et q sont des entiers ($p \geq 1, q \geq 0$), on pose $\mathcal{F}_q^p = \mathcal{F}^p / \underline{n}^{q+1} \cdot \mathcal{F}^p$: $\mathcal{F}_q^p$ est un $\underline{k}$ -espace vectoriel de dimension p. $\binom{n+q}{n}$. Le point générique de $\mathcal{F}^p$

sera noté $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ avec $\varphi_j = \sum_{\omega \in \mathbb{N}^n} a_j^\omega \frac{x^\omega}{\omega!}$ (i.e. $a_j^\omega = \frac{\partial^{|\omega|} \varphi_j(0)}{\partial x^\omega}$),

Soit Π_q la projection canonique : $\mathcal{F}^p \rightarrow \mathcal{F}_q^p$; si $q' \geq q$, notons $\Pi_{q,q'}$ la projection canonique : $\mathcal{F}_q^p \rightarrow \mathcal{F}_{q'}^p$. Donnons nous dans chaque $\mathcal{F}_q^p$ une variété algébrique (au sens ensembliste) V_q , de telle sorte que $\Pi_{q,q+1}(V_{q+1}) \subset V_q$, $\forall q \in \mathbb{N}$. Posons $V = \varprojlim V_q$. La suite $d_q = \text{codim}_{\mathcal{F}_q^p} V_q$ est croissante. Nous dirons que V est une provariété algébrique de codimension égale à $\lim_{q \rightarrow \infty} d_q$. Nous réservons le terme de variété à toute provariété de codimension finie.

Remarque : La provariété V est de codimension infinie si et seulement si, $\forall q \in \mathbb{N}$ et $\forall \xi \in \mathcal{F}_q^p$, $\Pi_q^{-1}(\xi) \not\subset V$. En effet, cette condition est visiblement nécessaire. Réciproquement, soient $V_q^1, \dots, V_q^s$ les composantes irréductibles de V_q et soit $\xi^i \in V_q^i$. Il existe un entier $q' \geq q$ tel que, $\forall i \in [1, s]$, $V_{q'} \not\subset \Pi_{q,q'}^{-1}(\xi^i)$, donc $V_{q'} \not\subset \Pi_{q,q'}^{-1}(V_q)$. Ceci entraîne $\text{codim}_{\mathcal{F}_q^p} V_q < \text{codim}_{\mathcal{F}_{q'}^p} V_{q'}$, d'où $\text{codim } V = \infty$.

Définition 2. Soit $\mathcal{F}_*^p$ une sous-variété algébrique de $\mathcal{F}^p$. Une propriété (P) relative aux éléments de $\mathcal{F}_*^p$ est généralement vraie, s'il existe dans $\mathcal{F}_*^p$ une provariété algébrique de codimension infinie V , telle que tout $\varphi \in \mathcal{F}_*^p - V$ satisfasse à (P).

b.

Lemme 4. Soit I un idéal de $\mathcal{F}$. Si $\dim_{\underline{k}} (\mathcal{F}/I) \leq h$, alors $I \supset \underline{n}^h$.

Démonstration. En effet, supposons que $I \not\supset \underline{n}^h$; la chaîne formée des puissances de l'idéal maximal $\underline{n}/I$ de $\mathcal{F}/I$: $\mathcal{F}/I \supset \underline{n}/I \supset \dots \supset \underline{n}^{h+1}/I \supset 0$ est, d'après le lemme de Nakayama, strictement décroissante. Il en résulte que $\dim_{\underline{k}} (\mathcal{F}/I) > h$.

Posons $\omega(h) = \dim_{\underline{k}} (\mathcal{T}/\underline{n}^{h+1}) = \binom{n+h}{n}$.

Corollaire. Si $\dim_{\underline{k}} (\mathcal{T}/I + \underline{n}^{h+1}) \leq h$ ou de façon équivalente si $\dim_{\underline{k}} (I + \underline{n}^{h+1}/\underline{n}^{h+1}) \geq \omega(h) - h$, alors $I \supset \underline{n}^h$ et $\dim_{\underline{k}} (\mathcal{T}/I) \leq h$.

Démonstration. D'après le lemme 4, $I + \underline{n}^{h+1} \supset \underline{n}^h$; le lemme de Nakayama entraîne que $I \supset \underline{n}^h$. Il résulte alors de l'hypothèse du corollaire, que $\dim_{\underline{k}} (\mathcal{T}/I) \leq h$.

Soient $\psi_1, \dots, \psi_s$ des séries formelles en $x_1, \dots, x_n$ à coefficients polynômes en les a_j^ω ($\omega \in \mathbb{N}^n$ et $j \in [1, p]$). Si $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in \mathcal{T}^p$, on désigne par $\psi_{i, \varphi}$ l'élément de $\mathcal{T}$ obtenu en faisant dans ψ_i :

$$a_j^\omega = \frac{\partial^{|\omega|} \varphi_j(0)}{\partial x^\omega}. \text{ Soit } I_\varphi \text{ l'idéal engendré dans } \mathcal{T} \text{ par les } \psi_{i, \varphi}.$$

Proposition 3. L'ensemble des $\varphi \in \mathcal{T}^p$ tels que $\dim_{\underline{k}} (\mathcal{T}/I_\varphi) < \infty$ est le complémentaire d'une provariété algébrique $\mathcal{W}$.

Démonstration. Posons $\mathcal{W}_h = \{ \varphi \in \mathcal{T}^p ; \dim_{\underline{k}} (\mathcal{T}/I_\varphi) > h \} = \{ \varphi \in \mathcal{T}^p ; \dim_{\underline{k}} (I_\varphi + \underline{n}^{h+1}/\underline{n}^{h+1}) < \omega(h) - h \}$ (d'après le corollaire du lemme 4). Le $\underline{k}$ -espace vectoriel $I_\varphi + \underline{n}^{h+1}/\underline{n}^{h+1}$ est engendré par les éléments $x^\mu \psi_{i, \varphi}$ ($\mu \in \mathbb{N}^n$ et $0 \leq |\mu| \leq h$). Si $\psi_{i, \mu, \varphi}^{\mu'}$ ($\mu' \in \mathbb{N}^n$ et $0 \leq |\mu'| \leq h$) est la composante de $x^\mu \psi_{i, \varphi}$ suivant $x^{\mu'}$, on voit que $\varphi \in \mathcal{W}_h$ si et seulement si le rang de la matrice $|\psi_{i, \mu, \varphi}^{\mu'}|$ (d'indice ligne (i, μ) et d'indice colonne μ') est $< \omega(h) - h$, i.e. si et seulement si les mineurs d'ordre $\omega(h) - h$ de cette matrice sont tous nuls. Ainsi $\mathcal{W}_h$ est une sous-variété algébrique de $\mathcal{T}^p$. Visiblement $\mathcal{W}_h \supset \mathcal{W}_{h+1} \supset \dots$ et $\mathcal{W} = \bigcap_{h=0}^{\infty} \mathcal{W}_h$ est une provariété algébrique.

c. Nous supposons désormais que $\underline{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $\rho_q : J^{q+1}(\underline{k}^n, \underline{k}^p) \longrightarrow J^q(\underline{k}^n, \underline{k}^p)$ la projection canonique.

Soit $\mathcal{Q}^q$ le faisceau sur $J^q(\underline{k}^n, \underline{k}^p)$ des germes de fonctions analytiques à valeurs dans $\underline{k}$.

Soit ξ un point (fixé une fois pour toutes) de $J^{q+1}(\underline{k}^n, \underline{k}^p)$, de coordonnées $x_1 = \dots = x_n = 0$; $y_j^\omega = \xi_j^\omega$. Posons :

$$\mathcal{F}^P(\xi) = \{ \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in \mathcal{F}^P ; \forall j \in [1, p] \text{ et } \forall \omega \in \mathbb{N}^n, \\ 0 \leq |\omega| \leq q+1, \quad \frac{\partial^{|\omega|} \varphi_j(0)}{\partial x^\omega} = \xi_j^\omega \} .$$

Si $\varphi \in \mathcal{F}^P(\xi)$, on désigne par φ_{q+1}^* l'homomorphisme de $\mathcal{Q}_\xi^{q+1}$ dans $\mathcal{F}$ obtenu en faisant les substitutions :

$$x_i \rightsquigarrow x_i \quad ; \quad y_j^\omega = \xi_j^\omega \rightsquigarrow \frac{\partial^{|\omega|} \varphi_j}{\partial x^\omega} = \frac{\partial^{|\omega|} \varphi_j(0)}{\partial x^\omega} .$$

Si π_ξ^* est un idéal de $\mathcal{Q}_\xi^{q+1}$, on désignera simplement par $\varphi_{q+1}^*(\pi_\xi^*)$ l'idéal engendré par $\varphi_{q+1}^*(\pi_\xi^*)$ dans $\mathcal{F}$.

Proposition 4. Soit π_ξ^* un idéal de $\mathcal{Q}_\xi^{q+1}$ tel que $\text{ht}(\pi_\xi^*) \geq n$. En général : $\dim_{\underline{k}} (\mathcal{F} \mid \varphi_{q+1}^*(\pi_\xi^*)) < \infty$, lorsque φ décrit $\mathcal{F}^P(\xi)$.

Démonstration. Le cas réel se ramène, après complexification, au cas complexe. Nous supposons donc, pour la démonstration, que $\underline{k} = \mathbb{C}$.

L'idéal π_ξ^* est engendré par des fonctions $P_1, \dots, P_s$ analytiques sur un voisinage Ω^* de ξ dans $J^{q+1}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$. Soit π^* le faisceau d'idéaux, analytique cohérent sur Ω^* , engendré par les P_i . En diminuant Ω^* si nécessaire on peut supposer que, $\forall \eta \in \Omega^*$:

$$(1) \quad \text{ht}(\pi_n^*) \geq n.$$

Posons $\psi_{1,\varphi} = \varphi_{q+1}^*(P_1), \dots, \psi_{s,\varphi} = \varphi_{q+1}^*(P_s)$: les coeffi-

cients des séries formelles $\psi_{1,\varphi}, \dots, \psi_{s,\varphi}$ sont des polynômes en les

$$a_j^\omega = \frac{\partial^{|\omega|} \varphi_j(0)}{\partial x^\omega}. \text{ D'après la proposition 3, l'ensemble des } \varphi \in \mathcal{F}^p(\xi) \text{ tels}$$

que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F} \mid \varphi_{q+1}^*(\pi_\xi^*)) < \infty$ est le complémentaire d'une provariété algébrique $\mathcal{W}$. Il reste à vérifier que $\mathcal{W}$ est de codimension infinie.

Soit ℓ un entier $\geq q+1$ et donnons nous pour $j \in [1, p]$ et $\mu \in \mathbb{N}^n$, $q+1 < |\mu| \leq \ell$, des nombres complexes arbitraires ξ_j^μ . D'après la remarque du a) de ce paragraphe, il suffit de trouver des b_j^ν ($j \in [1, p]$; $\nu \in \mathbb{N}^n$ et $\ell+1 \leq |\nu| \leq \ell+q+2$) tels que si :

$$\varphi_j^b = \sum_{|\mu|=0}^{\ell} \xi_j^\mu \frac{x^\mu}{\mu!} + \sum_{|\nu|=\ell+1}^{\ell+q+2} b_j^\nu \frac{x^\nu}{\nu!}$$

on ait $\varphi^b = (\varphi_1^b, \dots, \varphi_p^b) \notin \mathcal{W}$.

Soit $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel complexe, admettant comme système de coordonnées les b_j^ν . Si $U_0, \mathcal{B}_0$ sont des voisinages respectifs assez petits de l'origine de $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{B}$, on définit une application polynomiale (cf. lemme 1) :

$$\Gamma_0 : U_0 \times \mathcal{B}_0 \xrightarrow{\sim} \Omega^*$$

$$\text{en posant : } \Gamma_0^*(x_1) = x_1 ; \dots ; \Gamma_0^*(x_n) = x_n \text{ et } \Gamma_0^*(y_j^\omega) = \frac{\partial^{|\omega|} \varphi_j^b}{\partial x^\omega}.$$

D'après le lemme 1, en restriction à $(U_0 - \{0\}) \times \mathcal{B}_0$, l'application Γ_0 est une submersion. Il résulte de là et de (1) qu'en tout point de $(U_0 - \{0\}) \times \mathcal{B}_0$ la codimension de $\Gamma_0^{-1}(V(\pi^*))$ est $\geq n$. Puisque $\{0\} \times \mathcal{B}_0$ est un sous-ensemble analytique de codimension n de $U_0 \times \mathcal{B}_0$, $\Gamma_0^{-1}(V(\pi^*))$ est un sous-ensemble analytique de codimension $\geq n$ de $U_0 \times \mathcal{B}_0$. Distinguons deux cas :

- s'il existe $b \in B_0$ tel que $(0, b) \notin \Gamma_0^{-1}(V(\pi^*))$, $\varphi_{q+1}^{b*}(\pi_\xi^*) = \mathfrak{F}$ et donc $\varphi^b \notin \mathcal{W}$.

- sinon, $\{0\} \times B_0 \subset \Gamma_0^{-1}(V(\pi^*))$. Puisque la codimension de $\{0\} \times B_0$ est n , il existe $b \in B_0$ tel que $\{0\} \times B_0 = \Gamma_0^{-1}(V(\pi^*))$ au voisinage de $(0, b)$. Le germe d'ensemble analytique : $\{\varphi_{q+1}^{b*}(P_1) = \dots = \varphi_{q+1}^{b*}(P_s) = 0\}$ est donc réduit à l'origine de $\mathbb{C}^n$, ce qui entraîne $\varphi^b \notin \mathcal{W}$, c.q.f.d.

§ 5 - Le théorème de quasi-transversalité.

Dans ce paragraphe, $\underline{k} = \mathbb{R}$. Désignons par $\mathcal{G}$ l'anneau des germes de fonctions numériques, C^∞ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$. Soit $T : \mathcal{G}^P \longrightarrow \mathfrak{F}^P$ la surjection qui associe à tout germe sa série formelle à l'origine.

Définition 3. Soit $\mathfrak{F}_*^P$ une sous-variété algébrique de $\mathfrak{F}^P$. Une propriété (P) relative aux éléments de $T^{-1}(\mathfrak{F}_*^P)$ est généralement vraie, s'il existe dans $\mathfrak{F}_*^P$ une provariété algébrique de codimension infinie V , telle que tout $f \in T^{-1}(\mathfrak{F}_*^P - V)$ satisfasse à (P).

Revenons aux notations du § 4, c. Posons $\mathcal{G}^P(\xi) = T^{-1}(\mathfrak{F}^P(\xi))$. Si $f \in \mathcal{G}^P(\xi)$, soit f_{q+1} le germe à l'origine de $\mathbb{R}^n$ de l'application C^∞ $j^{q+1}(\tilde{f})$, où $\tilde{f}$ est une application C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^P$ induisant le germe f à l'origine de $\mathbb{R}^n$. Puisque $f_{q+1}(0) = \xi$, le germe d'application f_{q+1} induit un homomorphisme $f_{q+1}^* : \mathcal{O}_\xi^{q+1} \longrightarrow \mathcal{G}$. Si π_ξ^* est un idéal de $\mathcal{O}_\xi^{q+1}$, on note simplement $f_{q+1}^*(\pi_\xi^*)$ l'idéal engendré par $f_{q+1}^*(\pi_\xi^*)$ dans $\mathcal{G}$. Si $\varphi = T(f)$, $\varphi_{q+1}^* = T \circ f_{q+1}^*$ et donc $\varphi_{q+1}^*(\pi_\xi^*) = T(f_{q+1}^*(\pi_\xi^*))$. La proposition 4 admet le corollaire immédiat :

Corollaire. Avec les hypothèses de la proposition 4, en général :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{G} \mid \underline{f}_{q+1}^*(\pi_{\xi}^*)) < \infty, \text{ lorsque } f \text{ décrit } \mathcal{G}^P(\xi).$$

(En effet, si $\mathcal{Y}$ est un idéal de $\mathcal{G}$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{G} \mid \mathcal{Y}) < \infty$ si et seulement si $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{Y} \mid T(\mathcal{Y})) < \infty$).

Si $f \in \mathcal{G}^P(\xi)$, posons $\underline{f}_q = \rho_q \circ \underline{f}_{q+1}$: $\underline{f}_q$ est un germe d'application C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $J^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ qui envoie l'origine sur le point $\eta = \rho_q(\xi)$. Le germe d'application $\underline{f}_q$ induit un homomorphisme $\underline{f}_q^* : \mathcal{O}_\eta^q \longrightarrow \mathcal{G}$. Si π_η est un idéal de $\mathcal{O}_\eta^q$ on désigne simplement par $\underline{f}_q^*(\pi_\eta)$ l'idéal de $\mathcal{G}$ engendré par $\underline{f}_q^*(\pi_\eta)$.

Le théorème suivant est une version locale du théorème 1 (cf. [3], chapitre I) :

Théorème 2. Soit π_η un idéal de $\mathcal{O}_\eta^q$. Soient $\underline{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{G}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Lorsque f décrit $\mathcal{G}^P(\xi)$, en général :

$$\overline{J_k(\underline{f}_q^*(\pi_\eta))} \supset \underline{m} \cdot \underline{f}_q^*(J_k(\pi_\eta)).$$

Démonstration. Soit Ω un voisinage de η dans $J^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et soit π un faisceau d'idéaux, analytique cohérent sur Ω , tel que π_η soit la fibre de π au point η . Le faisceau d'idéaux $\pi^* = [\overline{J_k^*(\pi)} : \rho_q^*(J_k(\pi))]$ est analytique cohérent sur $\rho_q^{-1}(\Omega)$. L'idéal π_ξ^* vérifie les hypothèses de la proposition 4 (on a $ht(\pi_\xi^*) > n$, d'après la proposition 1).

D'après le corollaire de la proposition 4, en général $\underline{f}_{q+1}^*(\pi_\xi^*)$ contient une puissance de $\underline{m}$. Or :

$$\begin{aligned} \underline{f}_{q+1}^*(\pi_\xi^*) &\subset \left[\overline{\underline{f}_{q+1}^*(J_k^*(\pi))}_\xi : \underline{f}_{q+1}^*(J_k(\pi_\eta)) \right] = \\ &= \left[\overline{J_k(\underline{f}_{q+1}^*(\pi_\eta))} : \underline{f}_{q+1}^*(J_k(\pi_\eta)) \right] \end{aligned}$$

d'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. MALGRANGE Ideals of differentiable functions, Oxford Uni. Press (1966).

- [2] R. THOM Un lemme sur les applications différentiables, Bol. Soc. Mat. Mexicana, (1956), p. 59-71.

- [3] J.Cl. TOUGERON Idéaux de fonctions différentiables, I, Annales de l'Institut Fourier, Tome XVIII, 1968.

- [4] J.Cl. TOUGERON Idéaux de fonctions différentiables, II, polyco-
 et J. MERRIEN pié, Faculté des Sciences de Rennes.