YVES DERRIENNIC

Solution d'une question posée par Cuculescu et Foias relative à la partie conservative d'une suite d'opérateurs

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 2
« Séminaire de probabilités, statistiques et analyse », , exp. n° 4, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969___2_A4_0>

SOLUTION D'UNE QUESTION POSEE PAR CUCULESCU ET FOIAS RELATIVE A LA PARTIE CONSERVATIVE D'UNE SUITE D'OPERATEURS

par

Yves DERRIENNIC

Soit $(X,\mathcal{B},\mu)$ un espace mesuré σ-fini.

Soit $(T_n)_n$ une suite d'opérateurs linéaires positifs sur $L^1(\mu)$, de norme ≤ 1, tels que $T_n f \geq T_{n+1} f$ pour chaque $f \geq o$, $f \in L^1(\mu)$.

Si $f \in L^1(\mu)$, $f \geq o$, la suite $(T_n f)_n$ est décroissante. Posons $T_\infty f = \lim_n T_n f$. Pour g quelconque dans $L^1(\mu)$, la relation $T_\infty(g) = T_\infty(g^+) - T_\infty(g^-)$ définit T_∞ comme un opérateur linéaire positif sur $L^1(\mu)$ de norme ≤ 1.

THEOREME ERGODIQUE DE CUCULESCU ET FOIAS.

Soit $(f_n)_n$ une suite positive dans $L^1(\mu)$ telle que $f_n \leq T_n f_{n-1}$ pour chaque entier n. Soit $(g_n)_n$ une suite de fonctions positives, -mesurables, sur X telle que pour chaque $f \in L^1(\mu)$, $0 \leq f \leq g_n$ implique $T_{n+1} f \leq g_{n+1}$, quel que soit n.

Alors sur l'ensemble $\left\{\sum_{i=o}^{\infty} g_i > o\right\}$, la limite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f_o + \ldots + f_n}{g_o + \ldots + g_n}$ existe et est finie μ.p.p.

DEFINITION DE LA PARTIE CONSERVATIVE C DE LA SUITE T_n.

Soit $g \in L^1(\mu)$ telle que $g > o$ μpp. Soit $C = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} T_n T_{n-1} \ldots T_1 g = +\infty\right\}$

D'après le résultat précédent, cette partie C ne dépend pas du choix de la fonction strictement positive g choisie.

D'autre part, pour tout $n = 1 \ldots +\infty$, on note C_n la partie conservative de T_n, c'est-à-dire, si $g \in L^1(\mu)$, $g > 0$ μp.p., $C_n = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} T_n^i g = +\infty \right\}$; cette partie C_n ne dépend pas du choix de g.

Puisque la suite $(T_n)_n$ est décroissante, on a :

$$T_\infty^{n-1} g \leq T_n T_{n-1} \ldots T_1 g \quad \text{et} \quad T_{n+i} \ldots T_n \ldots T_1 g \leq T_n^i (T_n \ldots T_1 \, g)$$

pour tout n et tout i. Donc $C_\infty \subset C \subset C_n$ pour chaque $n < +\infty$, et la suite $(C_n)_n$ est décroissante. Notons $C_o = \bigcap_{1 \leq n < +\infty} C_n$

Nous avons $C_\infty \subset C \subset C_o$.

Résultat principal.

Les trois parties C_∞ , C, C_o sont égales.

Pour démontrer ceci, il suffit de montrer que T_∞ est conservatif sur C_o. Ceci est la conséquence de la proposition suivante :

Proposition.

Si $\varphi \in L^\infty(\mu)$ et $\varphi \geq 0$ vérifie $\{\varphi > 0\} \subset C_o$ la relation $(I_{C_o} \circ T^*) \varphi \leq \varphi$ implique $I_{C_o} \circ T_\infty^* \varphi = \varphi$.

(I_{C_o} désigne l'opérateur qui à f associe $1_{C_o} f$)

Posons $U_n = T_n \circ I_{C_n}$ et $U_\infty = T_\infty \circ I_{C_o}$. Comme $C_o = \bigcap_{1 \leq n < +\infty} C_n$ on a, pour chaque $f \in L^1(\mu)$, $\lim_{n \to \infty} U_n f = U_\infty f$. La suite des opérateurs $(U_n)_n$ est décroissante, et $\|U_n\| \leq 1$ pour chaque n.

Soit $\varphi \in L_+^\infty(\mu)$. Pour chaque $n=1\dots\infty$, on construit dans $L_+^\infty(\mu)$ la suite croissante $(\phi_n^k)_k$ où $\phi_n^o = \varphi$ et $\phi_n^{k+1} = \varphi \vee U_n^* \phi_n^k$ ($\varphi \vee U_n^* \phi_n^k$ désigne le sup (φ , $U_n^* \phi_n^k$)). Alors $\psi_n = \lim\limits_{k\to\infty} \phi_n^k$ est le potentiel d'équilibre de φ relatif à U_n , c'est-à-dire la plus petite des fonctions ψ , majorant φ , vérifiant $U_n^* \psi \leq \psi$.

Propriété 1.

Pour chaque k, la suite $(\phi_n^k)_n$ est décroissante et majore ϕ_∞^k.

Démonstration :

La propriété est évidente pour k=o.

Supposons $\phi_n^k \geq \phi_{n+1}^k \geq \phi_\infty^k$. Alors $U_n^* \phi_n^k \geq U_{n+1}^* \phi_{n+1}^k \geq U_\infty^* \phi_\infty^k$ et

$$\phi_n^{k+1} = \varphi \vee U_n^* \phi_n^k \geq \phi_{n+1}^{k+1} = \varphi \vee U_{n+1}^* \phi_{n+1}^k \geq \phi_\infty^{k+1} = \varphi \vee U_\infty^* \phi_\infty^k .$$

Donc la propriété est vraie pour tout k.

Propriété 2.

La suite $(\psi_n)_n$ est décroissante et majore ψ_∞ .

Démonstration :

Immédiate d'après la propriété 1 et la définition de ψ_n .

Propriété 3.

Si $(g_n)_n$ est une suite décroissante dans $L_+^\infty(\mu)$ ayant pour limite g_∞ , on a :

$$\lim_{n\to\infty} U_n^* g_n = U_\infty^* g_\infty.$$

Démonstration :

La suite $(U_n^* g_n)_n$ est décroissante donc admet une limite.

De plus, on a :

$$U_\infty^*(g_\infty) = \lim_{n\to\infty} U_\infty^* g_n \leq \lim_{n\to\infty} U_n^* g_n \leq U_i^* (\lim_{n\to\infty} g_n) = U_i^* g_\infty \quad \text{pour chaque } i \geq 1.$$

Ceci donne aussitôt le résultat.

Propriété 4.

Pour chaque k, $\lim\limits_{j\to\infty} \phi_j^k = \phi_\infty^k$.

Démonstration :

Pour k = o c'est évident. Supposons le résultat pour k. La propriété 3 donne : $\lim\limits_{j\to\infty} U_j^* \phi_j^k = U_\infty^* \phi_\infty^k$, d'où :

$$\lim_{j\to\infty} \phi_j^{k+1} = \lim_{j\to\infty} (\varphi \vee U_j^* \phi_j^k) = (\varphi \vee U_\infty^* \phi_\infty^k) = \phi_\infty^{k+1}$$

Propriété 5.

Si pour tout n, $1 \leq n < \infty$, $U_n^* \psi_n = \psi_n$, la suite $(\psi_n - \phi_n^k)$ est décroissante et majore $\psi_\infty - \phi_\infty^k$, pour chaque k.

Démonstration :

Pour k = o, la propriété est une conséquence de la propriété 2).

Supposons $\psi_n - \phi_n^k \geq \psi_{n+1} - \phi_{n+1}^k$.

Alors, d'après l'hypothèse $U_n^* \psi_n = \psi_n$ et $U_n^* \geq U_{n+1}^*$ on a :

$$U_n^* (\psi_n - \phi_n^k) = \psi_n - U_n^* \phi_n^k \geq U_{n+1}^* (\psi_{n+1} - \phi_{n+1}^k) = \psi_{n+1} - U_{n+1}^* \phi_{n+1}^k$$

Sur l'ensemble $\{\varphi \leq U^*_{n+1}\ \phi^k_{n+1}\}$ on a :

$$\psi_n - \phi^{k+1}_n = \psi_n - U^*_n\ \phi^k_n \geq \psi_{n+1} - U^*_{n+1}\ \phi^k_{n+1} = \psi_{n+1} - \phi^{k+1}_{n+1}$$

car d'après 1), $U^*_{n+1}\ \phi^k_{n+1} \leq U^*_n\ \phi^k_n$.

Sur l'ensemble $\{U^*_n\ \phi^k_n \leq \varphi\}$ on a :

$$\psi_n - \phi^{k+1}_n = \psi_n - \varphi \geq \psi_{n+1} - \varphi = \psi_{n+1} - \phi^{k+1}_{n+1}$$

Sur l'ensemble $\{U^*_{n+1}\ \phi^k_{n+1} < \varphi < U^*_n\ \phi^k_n\}$ on a :

$$\psi_n - \phi^{k+1}_n = \psi_n - U^*_n\ \phi^k_n \geq \psi_{n+1} - U^*_{n+1}\ \phi^k_{n+1} \geq \psi_{n+1} - \varphi = \psi_{n+1} - \phi^{k+1}_{n+1}$$

Comme ces trois ensembles recouvrent X, ceci démontre la première propriété.

Enfin $\psi_n - \phi^k_n \geq \psi_{n+j} - \phi^k_{n+j} \geq \psi_\infty - \phi^k_{n+j}$ quel que soit $j \geq 0$.

D'après la propriété 4), on obtient :

$$\psi_n - \phi^k_n \geq \lim_{j\to\infty} (\psi_\infty - \phi^k_{n+j}) = \psi_\infty - \phi^k_\infty .$$

<u>Propriété 6</u>.

Si pour chaque n, $1 \leq n < +\infty$, $U^*_n\ \psi_n = \psi_n$ on a :

$$\lim_{j\to\infty} \psi_j = \psi_\infty \quad \text{et} \quad U^*_\infty\ \psi_\infty = \psi_\infty$$

<u>Démonstration</u> :

D'après la propriété 4), la convergence de ϕ^k_j vers ψ_j , quand $k \longrightarrow +\infty$, est uniforme en $j = 1,\ldots,\infty$ ceci permet d'écrire :

$$\psi_\infty = \lim_{k\to\infty} \phi^k_\infty = \lim_{k\to\infty} (\lim_{j\to\infty} \phi^k_j) = \lim_{j\to\infty} (\lim_{k\to\infty} \phi^k_j) = \lim_{j\to\infty} \psi_j$$

Enfin, d'après la propriété 3), $\lim_{n\to\infty} U_n^* \psi_n = U_\infty^* \psi_\infty = \lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi_\infty$

Démonstration de la proposition.

Pour chaque n, $1 \leq n < +\infty$, $\{\varphi > o\} \subset C_n$ d'où $\{\psi_n > o\} \subset C_n$, d'après l'hypothèse $\{\varphi > o\} \subset C_o$. Puisque C_n est la partie conservative de U_n, $U_n^* \psi_n \leq \psi_n$ implique $U_n^* \psi_n = \psi_n$.

L'hypothèse $U_\infty^* \varphi \leq \varphi$ signifie $\psi_\infty = \varphi$. Puisque les hypothèses de la propriété 6) sont vérifiées, on en tire $U_\infty^* \varphi = \varphi$.

Ceci achève la démonstration de la proposition et du résultat principal.

REFERENCE

I. CUCULESCU et C. FOIAS : An individual ergodic theorem for positive operators. Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquées. Tome XI - N° 5 (1966).