

Y. KERBRAT

G. LE CALVE

Classification des états pour un système aléatoire à liaisons complètes

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 2

« Séminaire de probabilités, statistiques et analyse », , exp. n° 2, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969__2_A2_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CLASSIFICATION DES ETATS POUR UN SYSTEME

ALEATOIRE A LIAISONS COMPLETES

par

Y. KERBRAT et G. LE CALVE

Résumé :

Il s'agit de l'étude de l'extension aux chaines à liaisons complètes des théorèmes de classification des états donnés pour les chaines de Markov par Kai-Lai CHUNG [1] .

§ 0. Données. Notations.

1. On se donne deux ensembles mesurables $(\underline{Z}, \mathcal{Z})$ et $(\underline{X}, \mathcal{X})$, une application mesurable T de $\underline{Z} \times \underline{X}$ dans $\underline{Z}$ et une probabilité de passage, p , de $\underline{Z}$ dans $\underline{X}$.

On définit alors des applications mesurables T_n ($n \geq 1$) de $\underline{Z} \times \underline{X}^{\{1, \dots, n\}}$ dans $\underline{Z}$ en posant $T_1 = T$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} T_{n+1}(z, x_1, \dots, x_{n+1}) &= T(T_n(z, x_1, \dots, x_n), x_{n+1}) \\ &= T_n(T(z, x_1), x_2, \dots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

2. On sait qu'on peut trouver une famille $(\Omega, \mathcal{F}, P_z)_{z \in \underline{Z}}$ d'espaces probabilisés et deux suites $(Z_n)_{n \geq 0}$, $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs respectivement dans $\underline{Z}$ et $\underline{X}$ telles que :

$(\Omega, \mathcal{F}, (P_z)_{z \in \underline{Z}}, (Z_n)_{n \geq 0})$ soit un processus de Markov et telles que :

$\forall z \in \underline{Z} \quad \forall n \geq 1, Z_n = T_n(z, X_1, \dots, X_n)$. $(P_z \text{ ps})$. La probabilité de passage Π de $\underline{Z}$ dans $\underline{Z}$ associée au processus de Markov en question est définie par :

$$\Pi(z, Z) = p(z, T(z, \cdot)^{-1}[Z]). \quad (z \in \underline{Z}, Z \in \underline{Z}).$$

3. On posera, pour $Z \in \underline{Z}$ (resp. $X \in \underline{X}$), τ_Z = temps d'entrée du processus (Z_n) dans Z (et τ_X = temps d'entrée de (X_n) dans X) c'est-à-dire
 $\tau_Z = \inf\{n \geq 1 \mid Z_n \in Z\}$ (avec $\tau_Z = +\infty$ sur l'ensemble $[\forall n \geq 1, Z_n \notin Z]$) et
 $\tau_X = \inf\{n \geq 1 \mid X_n \in X\}$.

Enfin on posera $\eta_Z = \sum_{n \geq 1} 1_Z \circ Z_n$ et $\eta_X = \sum_{n \geq 1} 1_X \circ X_n$ (nombre de visites à Z et X respectivement).

§ 1. Ensembles fermés.

On désignera par $\mathcal{F}$ la classe des $Z \in \underline{Z}$ qui sont fermés (sens habituel) pour le processus de Markov $(Z_n)_{n \geq 0}$, c'est-à-dire tels que $[\Pi(\cdot, Z) = 1] \supseteq Z$ (on dira ici : Π -fermés). On posera en outre :

- 1) $X_a = [p(\cdot, X) = 1]$ et $\mathcal{K}(X) = \{Z \in \underline{Z} \mid Z \subset X_a\}$
- 2) $\mathcal{F}(Z) = \{X \in \underline{X} \mid T(Z \times X) \subseteq X_a\}$ (les Z -fermés)
- 3) $\mathcal{G}(X) = \{Z \in \underline{Z} \mid T(Z \times X) \subseteq Z\}$ (les X -stables)

Quelques remarques.

$$1^\circ) X \in \mathcal{F}(X_a) \iff X_a \in \mathcal{G}(X)$$

$$2^\circ) \mathcal{K}(X) \cap \mathcal{G}(X) \subseteq \mathcal{F} \text{ car si } Z \in \underline{Z} \in \mathcal{K}(X) \cap \mathcal{G}(X) \text{ on a alors}$$

$$\begin{aligned} \Pi(z, Z) &= \int p(z, dx) 1_Z(T(z, x)) \geq \int_X = p(z, X) \text{ car } Z \in \mathcal{G}(X) \\ &= 1 \quad \text{car } Z \subseteq X_a \end{aligned}$$

3°) Supposons que $Z \in \mathcal{G}(X)$ et $X \in \mathcal{F}(Z)$. Alors $\forall u \in T(Z \times X)$, $\forall n \geq 1$ on a $P_u(X_n \in X) = 1$.

En effet pour $n = 1$ on a $P_u(X_1 \in X) = p(u, X) = 1$ car $u \in T(Z \times X) \subseteq X_a$.

La relation $P_u(X_{n+1} \in X) = \int p(u, dy) P_{T(u,y)}[X_n \in X] \geq$

$$p(u, X) \inf_{y \in X} P_{T(u,y)}[X_n \in X]$$

montre avec $p(u, X) = 1$ et $u \in T(Z \times X) \subseteq Z$ que $P_u(X_{n+1} \in X) = 1 \quad \forall u \in T(Z \times X)$ si la relation est vraie à l'ordre n .

Extension de la notion d'ensembles Z-fermés et X-stables.

Posons $\mathcal{F}_w(Z) = \{X \in \mathcal{X} \mid \forall z \in Z, P[z ; X \setminus T(z, \cdot)]^{-1}(X_a) = 0\}$

$\mathcal{G}_w(X) = \{Z \in \mathcal{Z} \mid \forall z \in Z, P(z ; X \setminus T(z, \cdot)]^{-1}(Z) = 0\}$

Les remarques faites précédemment sont encore valables, savoir :

1° $X \in \mathcal{F}_w(X_a) \iff X_a \in \mathcal{G}_w(X)$ puisque ces deux conditions s'expriment par : pour $p(z, \cdot)$ presque tout x de X on a : $T(z, X) \subseteq X_a$ et ce, pour tout $z \in Z$.

2° $\mathcal{A}(X) \cap \mathcal{G}_w(X) \subseteq \mathcal{F}$ car si $z \in Z \in \mathcal{A}(X) \cap \mathcal{G}_w(X)$ on a :

$$\begin{aligned} \Pi(z, Z) &\geq \int_{x \in X} p(z, dx) 1_Z(T(z, x)) = p(z, X) \text{ puisque } Z \in \mathcal{G}_w(X) \\ &= 1 \quad \text{car } Z \subseteq X_a. \end{aligned}$$

3° Si $Z \in \mathcal{G}_w(X)$ et $X \in \mathcal{F}_w(Z)$ alors $\forall z \in Z, P_{T(z,x)}[X_n \in X] = 1$ pour $p(z, \cdot)$ presque tout x de X et ceci pour tout $n \geq 1$.

En effet $P_{T(z,x)}[X_1 \in X] = p(T(z,x), X)$. Mais pour $p(z, \cdot)$ presque tout

$x \in X$ on a $T(z, x) \in Z \cap X_a$ donc $P_{T(z, x)}[X_1 \in X] = 1$ pour $p(z, \cdot)$ presque tout x de X .

Supposons que la relation soit vraie pour n . Soit $z \in Z$ et $x \in X$ tel que $T(z, x) \in Z \cap X_a$. On a alors : ($u = T(z, x)$)

$$P_u[X_{n+1} \in X] \geq \int_{y \in X} p(u, dy) P_{T(u, y)}[X_n \in X] .$$

Comme pour $p(u, \cdot)$ presque tout y de X on a $P_{T(u, y)}[X_n \in X] = 1$ on a alors $P_u[X_{n+1} \in X] \geq p(u, X) = 1$ puisque $u \in X_a$. On a donc $P_{T(z, x)}[X_{n+1} \in X] = 1$ pour tout x tel que $T(z, x) \in Z \cap X_a$ ce qui est le cas pour $p(z, \cdot)$ presque tout x de X .

c.q.f.d.

Lemme 1.

Si $z \in X^0 = [P_{(\cdot)}[\tau_X < \infty] = 0]$ alors $p(z, T_z^{-1}(X^0) \setminus X) = 1$ et par suite X^0 est Π -fermé si non vide.

Preuve. Si $z \in X^0$ on a : $P_z[\tau_X < \infty] = 0 = p(z, X) +$

$$+ \int_{X^c} p(z, dx) P_{T(z, x)}[\tau_X < \infty]$$

donc $p(z, X) = 0$ et $\int_{X^c \cap T_z^{-1}(X^0)} p(z, dx) P_{T(z, x)}[\tau_X < \infty] = 0$. Il en résulte

que $p(z, X \cup T_z^{-1}(X^0)) = 1$ donc, puisque $p(z, X) = 0$, $p(z, T_z^{-1}(X^0) \setminus X) = 1$ et aussi $p(z, T_z^{-1}(X^0)) = \Pi(z, X^0) = 1$.

Lemme 2.

$\forall z \in X^1 = [P_{(\cdot)}\{\tau_X < \infty\} = 1]$. On a : $p(z, X \cup T_z^{-1}(X^1)) = 1$.

Par suite si $X^1 \in \mathcal{G}_w(X)$ alors $X^1 \in \mathcal{G}_1$.

Preuve. Si $z \in X^1$ on a alors :

$$1 = P_z[\tau_X < \infty] = p(z, X) + \int_{x \in X^c} p(z, dx) P_{T(z, x)}[\tau_X < \infty]$$

donc $p(z, X^c) = \int_{x \in X^c} p(z, dx) P_{T(z, x)}[\tau_X < \infty]$ et par suite

$$p(z, \{x \in X^c \mid T(z, x) \notin X^1\}) = 0 \text{ c'est-à-dire } p(z, X \cup T_z^{-1}(X^1)) = 1.$$

Si $X^1 \in \mathcal{G}_w(X)$ alors $X \subseteq T_z^{-1}(X^1)$ ($p(z, \cdot)$ presque sûrement).

$$\text{Donc } 1 = p(z, X \cup T_z^{-1}(X^1)) = p(z, T_z^{-1}(X^1)) = \Pi(z, X^1) \text{ pour tout } z \in X^1.$$

Lemme 3.

Les ensembles $X^f = [z \in \underline{Z} \mid P_z(\eta_X = +\infty) = 0]$ et

$X^\infty = [z \in \underline{Z} \mid P_z(\eta_X = +\infty) = 1]$ sont Π -fermés si non vides.

Preuve. Pour tout $z \in \underline{Z}$ on a $P_z(\eta_X = +\infty) = \int_{x \in X} p(z, dx) P_{T(z, x)}(\eta_X = +\infty)$.

Si $z \in X^f$ ceci est nul donc $p(z, \{x \mid T(z, x) \notin X^f\}) = 0$ c'est-à-dire $p(z, T_z^{-1}(X^f)) = 1 = \Pi(z, X^f)$.

Si $z \in X^\infty$ on a alors $p(z, T_z^{-1}(X^\infty)) = 1 = \Pi(z, X^\infty)$ c.q.f.d.

§ 2. Ensembles essentiels, inessentiels.

Définitions.

On dira que $X \in \mathcal{X}$ est inessentiel si $X^f = \underline{Z}$. Les essentiels seront ceux qui ne sont pas inessentiels et forment une classe $\mathcal{E}(\underline{X})$. Dans $\mathcal{E}(\underline{X})$ on distinguera :

a) les X fortement essentiels (classe $\mathcal{E}_s(\underline{X})$) : ceux pour lesquels on a l'implication suivante :

$$X = \bigcup_n X_n \quad (X_n \in \mathcal{X}) \implies \exists n_0 \text{ tel que } X_{n_0}^\infty \neq \emptyset.$$

b) les X faiblement essentiels (classe $\mathcal{E}_w(\underline{X})$) : ce seront les $X \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_s$ c'est-à-dire les $X \in \mathcal{E}$ qu'on peut écrire $\bigcup_n X_n$ avec, $X_n^\infty = \emptyset$, pour tout n .

Remarques.

1°) La classification précédente porte sur les $X \in \mathcal{X}$ mais on pourrait définir les mêmes notions pour les $Z \in \mathcal{Z}$. Toutefois comme $(Z_n)_{n \geq 0}$ est un processus de Markov, K.L. Chung a déjà proposé la classification suivante :

a) Même définition pour Z essentiel ou inessentiel. Posons alors $\mathcal{E}(\underline{Z}) =$ classe des essentiels de $(\underline{Z}, \mathcal{Z})$.

b) Un $Z \in \mathcal{E}(\underline{Z})$ pourra alors être absolument essentiel (classe $\mathcal{E}_a(\underline{Z})$) ou, sinon, improprement essentiel (classe $\mathcal{E}_1(\underline{Z})$) suivant que la propriété suivante est vérifiée ou non :

$$Z = \bigcup_n Z_n \quad (Z_n \in \mathcal{Z}) \implies \exists n_0 \text{ tel que } X_{n_0} \in \mathcal{E}(\underline{Z})$$

Chung démontre que si $Z \in \mathcal{E}_a(\underline{Z})$ alors $Z^\infty = \{z \in \underline{Z} \mid P_z(n_Z = +\infty) = 1\} \neq \emptyset$.

Il résulte de là que l'on a : $\mathcal{E}_a(\underline{Z}) = \mathcal{E}_s(\underline{Z})$ et $\mathcal{E}_1(\underline{Z}) = \mathcal{E}_w(\underline{Z})$.

En effet si $Z \in \mathcal{E}_1(\underline{Z})$ on peut alors trouver $Z_n \in \mathcal{Z} \ (n \geq 0)$ tels que :

$Z = \bigcup_n Z_n$ et tels que, pour tout n , $Z_n^f = Z$. Alors $Z_n^\infty = \emptyset$ pour tout n donc

$Z \in \mathcal{E}_w(\underline{Z})$. Inversement si $Z \in \mathcal{E}_a(\underline{Z})$ et si $Z = \bigcup_n Z_n$ alors n_0 existe tel que

$Z_{n_0} \in \mathcal{E}_a(\underline{Z})$ et par suite $Z_{n_0}^\infty \neq \emptyset$ ce qui prouve que $Z \in \mathcal{E}_s(\underline{Z})$. Autrement dit

les notions de fortement et de faiblement essentiels coïncident, sur $\underline{Z}$, avec celles d'absolument et faiblement essentiels respectivement.

2°) $\mathcal{E}_s$ est héréditaire à droite (donc $\mathcal{E}_w$ à gauche) en ce sens que :

$$[X_1 \subseteq X_2, X_1 \in \mathcal{X}, X_2 \in \mathcal{X}, X_1 \in \mathcal{E}_s] \implies X_2 \in \mathcal{E}_s.$$

3°) Si $X = \bigcup_n X_n \in \mathcal{G}_s$ alors $\exists n_0$ tel que $X_{n_0} \in \mathcal{G}_s$ car sinon on aurait pour chaque n , $X_n = \bigcup_k X_{n,k}$ avec $X_{n,k}^\infty = \emptyset$ et alors $X = \bigcup_{n,k} X_{n,k}$ ne serait pas fortement essentiel.

Proposition.

Pour $Z \in \mathcal{Z}$ et $X \in \mathcal{X}$ on posera :

$$a(Z, X) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} P_Z(\eta_X = +\infty)$$

$$b(Z, X) = \inf_{Z \in \mathcal{Z}} P_Z[\tau_X < +\infty]$$

On a alors les propriétés suivantes :

$$1) a(Z, X) < 1 \implies \forall Z \in \mathcal{Z}, [\eta_Z = +\infty] \cap [\eta_X = +\infty] = \emptyset \text{ (} P_Z \text{ ps)}$$

$$2) b(Z, X) > 0 \implies \forall Z \in \mathcal{Z}, [\eta_Z = +\infty] \subseteq [\eta_X = +\infty] \text{ (} P_Z \text{ ps)}.$$

Preuve. La démonstration de ces propriétés est la même que celle des propriétés équivalentes qu'on peut trouver dans l'article de Chung. On peut les rappeler :

Soit $\mathcal{F}_n$ la tribu sur Ω engendrée par $Z_0, \dots, Z_n$. Comme $[\eta_X = \eta_Z = +\infty] \in \mathcal{F}$ chaque $(P_{Z_n}(\eta_X = \eta_Z = +\infty), \mathcal{F}_n, P_Z)$ est une martingale positive équi-intégrable qui converge P_Z presque sûrement vers $1_{[\eta_X = \eta_Z = \infty]}$. Par suite, sur l'ensemble $[\eta_Z = +\infty]$ elle ne peut que converger vers 0 puisque $a(Z, X) < 1$, de sorte que $[\eta_Z = +\infty] \cap [\eta_Z = \eta_X = +\infty] = \emptyset$ (P_Z ps) d'où le 1er résultat.

Par ailleurs si $M_n = \bigcup_{k \geq n} [X_k \in X]$ alors $M_n \uparrow [\eta_X = +\infty]$. Pour $k \leq n$ on a donc : $[\eta_B = +\infty] \subseteq M_{n+1} \subseteq M_k$. Il en résulte que $\forall Z \in \mathcal{Z}$ la V. A.

$P_{Z_n}(\tau_X < \infty)$ converge P_Z -ps vers $1_{[n_X = +\infty]}$. Donc sur $[n_Z = +\infty]$ $P_{Z_n}(\tau_X < \infty)$ ne pouvant converger vers 0 si $b(Z, X) > 0$ elle converge vers 1 c'est-à-dire $[n_Z = +\infty] \subseteq [n_X = +\infty]$ P_Z ps).

Conséquences.

1°) $Z \in \mathcal{G}_s(\underline{Z})$ et $b(Z, X) > 0 \implies X \in \mathcal{G}_s(\underline{X})$

Supposons en effet que $X = \bigcup_n X_n$ avec $n \rightarrow X_n$ croissante. On a alors : $[\tau_{X_n} < +\infty] \uparrow [\tau_X < \infty]$. Pour chaque $z \in \underline{Z}$ on a donc $P_z[\tau_{X_n} < \infty] \uparrow P_z[\tau_X < \infty]$

Pour $z \in Z$ on peut donc trouver

$$n(z) \text{ tq } k < n(z) \implies P_z[\tau_{X_k} < \infty] < \frac{b(Z, X)}{2}$$

$$\text{et } P_z[\tau_{X_{n(z)}} < \infty] \geq \frac{b(Z, X)}{2}$$

Si on pose $Z_k = [z \in Z \mid n(z) = k]$ on a alors $Z = \bigcup_k Z_k$. On peut donc trouver k_0 tel que $Z_{k_0}^\infty \neq \emptyset$ et alors $X_{k_0}^\infty \neq \emptyset$ puisque

$$b(Z_{k_0}, X_{k_0}) \geq \frac{b(Z, X)}{2} > 0. \text{ Ceci prouve que } X \in \mathcal{G}_s(\underline{X}).$$

2°) $\underline{Z} \setminus X^\circ \in \mathcal{G}_s(\underline{Z}) \implies X \in \mathcal{G}_s^0(\underline{X})$.

$$\text{En effet } \underline{Z} \setminus X^\circ = \bigcup_{n \geq 1} \{z \mid P_z[\tau_X < \infty] \geq \frac{1}{n}\} = \bigcup_n Z_n.$$

On peut alors trouver n_0 tel que $Z_{n_0} \in \mathcal{G}_s^0(\underline{Z})$ et comme

$$b(Z_{n_0}, X) \geq \frac{1}{n_0} > 0 \text{ on a, d'après la 1ère conséquence, } X \in \mathcal{G}_s(\underline{X}).$$

3°) $a(Z, X) < 1$ et $b(Z, X) > 0 \implies Z \notin \mathcal{G}(\underline{Z})$.

$$\text{On a en effet } [n_Z = +\infty] \subseteq [n_X = +\infty] \text{ et } [n_Z = +\infty] \cap [n_X = +\infty] = \emptyset$$

$$(P_Z \text{ ps}).$$

On a donc $P_Z[n_Z = +\infty] = 0 \quad \forall z \in \underline{Z}$ et donc $Z^f = \underline{Z}$ c'est-à-dire E est inessentiel.

4°) $\underline{Z} \setminus X^\circ \cup X^\infty \notin \mathcal{G}_s(\underline{Z})$ (pour tout $X \in \mathcal{X}$).

On a en effet $\underline{Z} \setminus X^\circ \cup X^\infty = \bigcup_n Z_n$ avec :

$$Z_n = \{z \mid P_z(\tau_X < \infty) \geq \frac{1}{n}, P_z(\eta_X = \infty) \leq 1 - \frac{1}{n}\}$$

Comme $b(Z_n, X) > 0$ et $a(Z_n, X) < 1$ on a $Z_n \notin \mathcal{G}(\underline{Z})$ d'après la 2ème conséquence.

Il en résulte alors que $\forall Z \in \mathcal{G}_s(\underline{Z}), Z \cap (X^\circ \cup X^\infty) \in \mathcal{G}_s(\underline{Z})$.

Remarque. En particulier si $\underline{Z} \in \mathcal{G}_s(\underline{Z})$ $X^\circ \cup X^\infty \in \mathcal{G}_s(\underline{Z})$. Si $X^\circ = \emptyset$ alors $X^\infty \in \mathcal{G}_s(\underline{Z})$ et d'après la 1ère conséquence $X \in \mathcal{G}_s(\underline{X})$.

Proposition.

Si $\underline{Z}$ est indécomposable et si $\underline{Z} \in \mathcal{G}_s(\underline{Z})$, les 4 conditions suivantes sont équivalentes :

- i) $X \in \mathcal{G}_s(\underline{X})$
- ii) $X^\circ = \emptyset$
- iii) $X^\infty \neq \emptyset$
- iiii) $X^f = \emptyset$

$\underline{Z}$ est dit indécomposable s'il ne contient pas deux ensembles π -fermés disjoints. Cette proposition découle immédiatement des 4 conséquences précédentes.

Proposition.

Si $\underline{Z}$ est indécomposable et si $X \in \mathcal{G}_s(\underline{X})$ alors $\forall z \sum_n P^n(z, X) = \infty$.

Si $\underline{Z} \in \mathcal{G}_s(\underline{Z})$ et si $\forall z \sum_n P^n(z, X) > 0$ alors $X \in \mathcal{G}_s(\underline{X})$.

En effet, si $\exists z$ tel que $\sum_n P^n(z, X) < \infty$, $\lim_n P^n(z, X) = 0$ et donc $X^f \neq \emptyset$. Donc $X \notin \mathcal{G}_z(\underline{X})$ d'après la remarque de la quatrième conséquence.

Si maintenant $\forall z \sum_n P^n(z, X) > 0$, alors $X^o = \emptyset$ et $X \in \mathcal{G}_s(\underline{X})$ d'après la même remarque.

BIBLIOGRAPHIE

1. Kai Lai CHUNG : 'The general theory of Markov processes according to Doeblin" Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 2, 230-254 (1964).
 2. LE CALVE G. : "Systèmes aléatoires à liaisons complètes et processus d'adaptation (revue Roumaine Maths Pures et Appl. à paraître début 1970).
 3. IOSIFESCU and THEODORESCU. : "Random Processes and learning (Springer Verlag 1969).
-