

A. BRUNEL

**Chaînes abstraites de Markov vérifiant une condition de Orey
Extension à ce cas d'un théorème de M. Métivier**

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 2

« Séminaire de probabilités, statistiques et analyse », , exp. n° 1, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969__2_A1_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAINES ABSTRAITES DE MARKOV VERIFIANT UNE CONDITION DE OREY

EXTENSION A CE CAS D'UN THEOREME ERGODIQUE DE M. METIVIER

par

A. BRUNEL

(Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes)

INTRODUCTION.

Nous exposons dans ce travail, l'étude de certaines chaînes abstraites de Markov, sur un espace mesuré, σ -fini $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, c'est-à-dire l'étude de contractions positives T de $L^1(\Omega)$, pour lesquelles une condition semblable à celle donnée par S. Orey [1] est satisfaite. Nous démontrons aussi, dans ce cas, des théorèmes du type de ceux d'Ornstein [2] et de Métivier [3], à savoir,

1°) l'existence d'une mesure invariante σ -finie, équivalente à μ , soit $\nu = g \cdot \mu$ avec $g = Tg$ et $\{0 < g < +\infty\} = \Omega$

2°) en notant T^+ l'opérateur transposé de T ,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\| \sum_{j=0}^n T^{*j} f \right\|_{\infty} \leq C \cdot \|f\|_{\infty},$$

si $f \in L^{\infty}$, $\int f d\nu = 0$ et $\text{supp } f$ est borné, un ensemble borné étant un ensemble sur lequel, en gros, le processus induit par (T, Ω) est uniformément récurrent au sens de Orey. La constante C ne dépend que de $\text{Supp } f$.

1. Définitions et notations employées.

Sont donnés, un espace mesuré, σ -fini, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et une contraction positive T de $L^1(\Omega)$, satisfaisant à la condition :

$\mathcal{G}$: le processus (Ω, T) est ergodique et conservatif, c'est-à-dire

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) \quad T^* \varphi \leq \varphi \implies \varphi = c^{te} \quad (1)$$

Les majuscules $A, B, \dots, E, \dots$ désigneront des ensembles non négligeables de $\mathcal{F}$.

Etant donné A , nous posons $T_A = T I_{A^c}$ et $R_A = I + \sum_{n \geq 1} T_A^n$ désigne l'opérateur potentiel "tabou" correspondant.

L'opérateur $A_T = I_A R_A T I_A$,

est la contraction induite par T sur $\mathcal{L}^1(A)$ et nous dirons que (A, A_T) est le processus induit sur A par (Ω, T) . Rappelons dans une proposition quelques propriétés de ces noyaux ou potentiels abstraits.

Proposition 1.

Le processus induit sur A est ergodique et conservatif si (Ω, T) possède lui-même les propriétés. En outre, si $E \subset A$ et si A_{R_E} est l'opérateur potentiel tabou :

$$A_{R_E} = I_A + \sum_{n \geq 1} A_{T_E}^n, \text{ avec } A_{T_E} = A_T I_{A \setminus E}, \text{ on a}$$

$$(1) \quad A_{R_E} = I_A R_E I_A.$$

Cette dernière propriété peut se vérifier directement par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} (I_A - A_{T_E}) R_E I_A &= (I_A - I_A R_A T I_{A \setminus E}) R_E I_A \\ &= I_A (R_E - R_A T I_{A \setminus E} R_E) = I_A R_A I_A = I_A. \end{aligned}$$

(1) Nous ne distinguons pas $\mathcal{L}^1(\Omega)$ (resp. $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$) de $\mathcal{L}^1(\Omega)$ (resp. $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$), ce qui ne présente aucun inconvénient dans le cas présent et les notations s'en trouvent simplifiées.

Rappelons encore que :

$$\forall E \quad R_E^*(1_E) = 1 \text{ (pour un processus conservatif quelconque,}$$

$$R_E^*(1_E) = \psi_E \text{ potentiel d'équilibre de E).}$$

Lemme 1.

Pour tout E et tout A, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad R_E^*(T_E^n 1_A) \leq R_E^*(1_A) + n$$

Démonstration.

Si $\varphi \in \mathbb{L}_+^\infty$,

$$R_E^* T_E^*(\varphi) = R_E^*(T_E^* \varphi + 1_E T_E^* \varphi) \leq R_E^* \varphi + \| \varphi \|_\infty \leq R_E^* \varphi + 1 \text{ si } \varphi$$

est une indicatrice. ■

Nous ferons usage de l'opérateur $S = \exp T$. Plus généralement nous posons, pour $\theta \geq 0$,

$$\exp(\theta^A T) = I_A + \sum_{n \geq 1} \frac{\theta^n}{n!} A_T^n.$$

2. Les ensembles bornés.

Nous envisageons dans ce qui suit les sous-classes de $\mathfrak{F}$, éventuellement vides, définies par les conditions,

$$(i) \quad \mathcal{B} \ni A \text{ si } \forall E \subset A \quad R_E^*(1_A) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega). \text{ Les éléments de } \mathcal{B} \text{ seront dits}$$

bornés.

$$(ii) \quad \mathcal{B}' \ni A \text{ si } (I_A - A_T) \mathbb{L}_0^1(A) = \mathbb{L}_0^1(A), \mathbb{L}_0^1(A) \text{ étant le sous-espace fermé}$$

de $\mathbb{L}^1(A)$ des éléments d'intégrale nulle. (2)

(2) La condition (ii) et l'ergodicité de A_T entraînent aussitôt l'existence de $f_0 \in \mathbb{L}^1(A)$ telle que $f_0 = A_T f_0$, $\{f_0 > 0\} = A$ et f_0 est unique à un facteur près.

(iii) $\mathcal{O} \ni A$ si $\forall E \subset A \quad A_{R_E^*}(1_A) \in L^\infty(A)$. Les éléments de $\mathcal{O}$ seront dits bornés au sens de Orey.

(iv) $\mathcal{M} \in A$ s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$, tels que :

$$\forall E \subset A \quad \sum_{j=0}^p T^{*j} 1_E \geq \alpha \mu(E) \cdot 1_A.$$

Les ensembles de $\mathcal{M}$ sont les bornés au sens de Métivier.

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 1.

On a les relations

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{B}' = \mathcal{B} = \mathcal{O}, \quad (3)$$

La démonstration de ce théorème est assez longue et fera l'objet des paragraphes 3, 4 et 5.

3. Démonstration de $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{O}$.

La relation (1) de la proposition 1 montre que $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$. Il est aussi clair que $A \in \mathcal{B}$ et $A' \subset A \implies A' \in \mathcal{B}$.

Soit maintenant $A \in \mathcal{B}'$. Selon la définition (i1) et la note (2), il existe $f_0 \in L^1(A)$, vérifiant $A_T f_0 = f_0$ et $\{f_0 > 0\} = A$. Si l'on impose la condition supplémentaire $\int f_0 d\mu = 1$, alors f_0 est l'unique élément de $L^1(A)$ qui possède ces propriétés, ce qui est une conséquence de l'ergodicité de A_T . Dans ces conditions, l'application $I_A^{-A} T : L_0^1(A) \rightarrow L_0^1(A)$ est injective. Puisque $L_0^1(A)$ est un espace de Banach, la condition (i1) entraîne que $I_A^{-A} T$ est un isomorphisme de $L_0^1(A)$ sur lui-même.

(3) Nous ne savons pas si $\mathcal{O} \neq \emptyset \implies \mathcal{M} \neq \emptyset$. Le problème reste ouvert.

Posons $\mathcal{H}(A) = \{\varphi \mid \varphi \in \mathbb{L}^\infty(A), \int \varphi d\nu = 0\}$,

où $\nu = f_0 \cdot \mu$ est une probabilité invariante, équivalente à $\mu|_{A \cap \mathcal{F}}$.

$\mathcal{H}(A)$ est un sous-espace fermé de $\mathbb{L}^\infty(A)$, invariant sous A_{T^*} . $\mathcal{H}(A)$ peut s'identifier au dual fort de $\mathbb{L}_0^1(A)$ avec une norme équivalente, pour les raisons suivantes :

$\mathbb{L}^1(A) = \mathbb{L}_0^1(A) \oplus \mathbb{R} \cdot f_0$, aussi tout élément λ de $(\mathbb{L}_0^1(A))'$ peut s'écrire :

$\mathbb{L}_1^0(A) \ni f \longmapsto \langle \lambda, f \rangle = \int \varphi f d\mu$, pour unique $\varphi \in \mathcal{H}(A)$. Si $\|\lambda\|$ désigne la norme de λ dans $(\mathbb{L}_1^0(A))'$, on a :

$$\|\lambda\| = \inf_{y \in \mathbb{R}} \|\varphi + y\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty, \text{ et aussi,}$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad |y| = \left| \int (\varphi + y) d\nu \right| \leq \|\varphi + y\|_\infty, \text{ donc,}$$

$$\|\lambda\| \leq \|\varphi\|_\infty \leq 2 \|\lambda\|$$

Ceci étant, tout $\varphi \in \mathcal{H}(A)$ peut s'écrire :

$$\varphi = (I_A - A_{T^*}) \phi, \text{ pour un } \phi \in \mathcal{H}(A).$$

Or $\phi - A_{T^*} \phi = \phi - 1_A T^* R_A^* \phi = (I - T^*) (R_A^* \phi)$, soit en posant

$$\psi = R_A^* \phi \in \mathbb{L}^\infty(\Omega),$$

$$\varphi = \psi - T^* \psi \quad \text{avec } \psi \in \mathbb{L}^\infty(\Omega).$$

En particulier si $E \subset A$ et $t = \nu(E) > 0$, on a $1_E - t 1_A \in \mathcal{H}(A)$.

Donc il existe $\psi \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$ tel que,

$$1_E - t 1_A = \psi - T^* \psi = \psi - T_E^* \psi - 1_E T^* \psi,$$

d'où l'on tire :

$$t \cdot R_E^*(1_A) = 1 - \psi + R_E^*(1_E T^* \psi) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega),$$

ce qui prouve que $A \in \mathcal{B}$ et que $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.

4. Tout ensemble de $\mathcal{O}$ contient un ensemble de $\mathcal{O}'$.

Soit $D \in \mathcal{O}$, un ensemble borné au sens de Orey et considérons le processus induit $(D, {}^D T)$. Pour simplifier les notations, nous allons remplacer $(D, {}^D T)$ par (Ω, T) ce qui revient à faire l'hypothèse suivante selon la définition (iii),

$$\forall E \quad \exists a > 0 \quad R_E^*(1) \leq a.$$

Puisque $T_E^{*n} 1$ est une suite décroissante, $\|T_E^{*n} 1\|_\infty \leq \frac{a}{n+1} \rightarrow 0$.

Or $1 = R_E^*(1_E) = \sum_{j=0}^n T_E^{*j}(1_E) + T_E^{*n+1}(1_E)$, ce qui entraîne que la suite $\sum_{j \geq n} T_E^{*j}(1_E)$ converge uniformément vers 1 (dans $L^\infty(\Omega)$). C'est donc bien là, une formulation abstraite de la notion de processus μ -uniformément récurrent, introduite par Orey [1].

Dans ces conditions, il existe $b > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\sum_{j=0}^p T_E^{*j}(1_E) \geq b \text{ et, à fortiori, } \sum_{j=0}^p T^{*j}(1_E) \geq b.$$

Cette dernière inégalité prouve l'existence d'un réel $c > 0$, tel que

$$\exp\left(\frac{1}{2} T^*\right)(1_E) \geq c.$$

Elle prouve aussi que E n'est pas faiblement errant, donc qu'il existe $f_0 \in L^1$, satisfaisant aux conditions $f_0 = T f_0$, $\{f_0 > 0\} = \Omega$, et $\int f_0 d\mu = 1$. Puisque T est ergodique et conservative, f_0 est unique. Nous désignerons par $\nu = f_0 \cdot \mu$ la probabilité invariante sur $(\Omega, \mathcal{F})$, équivalente à μ . En fait, n'oublions pas que f_0 est définie relativement au processus induit $(D, {}^D T)$, mais $g_0 = R_D T f_0$ est T -invariante et $\{0 < g_0 < +\infty\} = \Omega$. La mesure σ -finie $g_0 \cdot \mu$ est invariante relativement à (Ω, T) et de plus $f_0 = 1_D \cdot g_0$.

Posant $\exp(\frac{1}{2} T) = S$, ce qui précède nous permet d'énoncer le

Lemme 2.

Si Ω est borné au sens de Orey,

$$\forall E \quad \exists c > 0 \quad S^*(1_E) \geq c.$$

Nous allons en déduire le résultat plus précis donné par la

Proposition 2.

Si $\Omega \in \mathcal{O}$ et $\alpha \in]0, 1[$, il existe $A \subset \Omega$ et $\beta > 0$, tels que :

$$\forall E \subset A \quad v(E) \geq \alpha \cdot v(A) \implies \exp(T^*)(1_E) \geq \beta.$$

Cette proposition découle des deux lemmes suivants :

Lemme 3.

Soit $\Omega' \subset \Omega \in \mathcal{O}$, $v(\Omega') > 0$. Alors,

$$\exists a, b > 0 \quad \forall E \subset \Omega' \quad v(\Omega' \setminus E) \leq a \implies S^*(1_E) \geq b.$$

Sinon il existerait $E_n \subset \Omega'$, $v(\Omega' \setminus E_n) \leq 2^{-n-1} v(\Omega')$ et

$S^*(1_{E_n}) \leq \frac{1}{n}$. Soit $E = \bigcap_n E_n \subset \Omega'$. On aurait $v(\Omega' \setminus E) \leq \frac{1}{2} v(\Omega')$ et

$S^*(1_E) \leq S^*(1_{E_n})$, pour tout n , contredirait le lemme 2. ■

Lemme 4.

Soit $r \in]0, 1[$ et $\Omega' \subset \Omega$, $v(\Omega') > 0$. Alors

$$\exists \beta > 0, \exists A \subset \Omega', \exists B, \forall E \subset A \quad v(E) \geq r v(A) \implies S^*(1_E) \geq \beta 1_B.$$

Démontrons-le par l'absurde. Partant de $\beta_1 = \frac{b}{4}$ (le b du lemme 3),

$A_1 = \Omega'$, $B_1 = \Omega$, il existerait alors $E_1 \subset \Omega'$, $v(E_1) \geq r v(\Omega')$ et $S^*(1_{E_1}) \leq \frac{b}{4}$ sur une partie B_2 de B_1 . Prenant ensuite $A_2 = \Omega' \setminus E_1$, $B = B_2$ et $\beta_2 = \frac{b}{8}$, il existerait $E_2 \subset A_2$, $v(E_2) \geq r v(A_2)$ et $S^*(1_{E_2}) \leq \frac{b}{8}$ sur $B_3 \subset B_2$. On pourrait ainsi construire par récurrence les suites E_n , A_n , B_n satisfaisant aux

conditions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \quad A_n = \bigcap_{j < n} (\Omega' \setminus E_j), \quad E_n \subset A_n, \quad v(E_n) \geq r v(A_n)$$

$$\text{et } S^*(1_{E_n}) \leq b 2^{-n-1} \quad \text{sur } B_{n+1} \subset B_n.$$

Il est clair que $\lim_n v(A_n) = 0$. Choisissons n pour que $v(A_n) \leq a$ (le a du lemme 3), et posant $E = \Omega' \setminus A_n$, on aurait

$$S^*(1_E) \leq \frac{b}{2} \quad \text{sur } B_{n+1} \quad \text{et } v(\Omega' \setminus E) \leq a,$$

ce qui contredirait le lemme 3. □

Observons ensuite que $S^*(1_E) \geq \beta 1_B \implies \exp(T^*)1_E = S^{*2}(1_E) \geq \beta S^*1_{B-\gamma}$, pour un $\gamma > 0$, fourni par lemme 2.

Remarque. Ces divers résultats prouvent la proposition 2 et montrent même que dans toute partie Ω' non négligeable de Ω , il existe un A répondant aux conditions imposées par la proposition 2.

Résumons pour la suite de la démonstration ce qui va nous être utile. Si Ω est borné au sens de Orey, il existe en particulier, $A \subset \Omega$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\forall E \subset A \quad v(E) \geq \frac{1}{2} v(A) \implies \exp(T^*)1_E \geq \beta.$$

Notons que $\exp(T^*)1_E \geq \beta \implies R_E^* \exp T^*(1_E) \geq \beta R_E^*(1)$ et en vertu du lemme 1,

$$R_E^*(1) \leq \frac{1}{\beta} \sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n!},$$

d'où découle le corollaire.

Corollaire 1.

Soit $\Omega \in \mathcal{O}$. Il existe $A \subset \Omega$ et $\rho > 0$ tels que

$$\forall E \subset A \quad v(E) \geq \frac{1}{2} v(A) \implies \|R_E^* 1\|_\infty \leq \rho.$$

Corollaire 2.

Soient $\Omega \in \mathcal{G}$ et $A \subset \Omega$, satisfaisant aux conditions du corollaire 1.

Alors, pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{L}_0^1(A)$, on a

$$(f_n - A_T f_n \xrightarrow{\mathbb{L}_0^1(A)} 0) \implies (f_n \xrightarrow{\mathbb{L}_0^1(A)} 0)$$

Démonstration.

De toute sous-suite de (f_n) , on peut en extraire une autre, soit $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $\nu(\{f_{n_i} \geq 0\}) \geq \frac{1}{2} \nu(A)$ (ou bien avec $\{f_{n_i} \leq 0\}$). Posons $E_1 = \{f_{n_i} \geq 0\}$. On peut écrire : $f_{n_i} - A_T(f_{n_i}) = f_{n_i} - A_T(f_{n_i}|_{E_1}) - A_T(f_{n_i}^+)$, d'où l'on déduit, $A_{E_1}(A_T f_{n_i}^+) = f_{n_i} - A_{E_1}(f_{n_i} - A_T f_{n_i})$, puis $\int f_{n_i}^+ dv \leq \int A_{E_1}(A_T f_{n_i}^+) dv \leq \rho \|f_{n_i} - A_T f_{n_i}\|_{\mathbb{L}_0^1(A)}$, donc $\int f_{n_i}^+ dv \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ et $\int f_{n_i}^- dv = - \int f_{n_i}^+ dv \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$.

Ceci prouve que de toute sous-suite de f_n , on peut en extraire une autre qui converge vers 0 dans $\mathbb{L}_0^1(A)$. ■

Nous venons de montrer que l'hypothèse : $\mathcal{G}$ non vide et $D \in \mathcal{G}$ entraîne l'existence d'un $A \subset D$ tel que

$$I_A - A_T \text{ soit un automorphisme de } \mathbb{L}_0^1(A).$$

En effet $(I_A - A_T) \mathbb{L}_0^1(A)$ est dense dans $\mathbb{L}_0^1(A)$ et le corollaire 2 prouve que l'image de $I_A - A_T$ est fermée. Rappelons aussi que le processus induit (A, A_T) admet une mesure invariante finie $\mu|_{A \cap \mathcal{F}}$. En définitive $D \supset A \in \mathcal{B}'$. ■

5. Inclusion $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}'$ et égalité $\mathcal{B}' = \mathcal{O}$.

a) $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}'$ Démonstration (selon Métivier).

Soit $A \in \mathcal{M}$. Si $E \subset A$, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$ (définition iv)) tels que

$$\sum_{j=0}^n T^{*j}(1_E) \geq \alpha \mu(E) \cdot 1_A,$$

ce qui donne, en appliquant l'opérateur R_E^* et en tenant compte du lemme 1,

$$R_E^*(1_A) \leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\mu(E)} \sum_{j=1}^{n+1} (j) \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2 \alpha \mu(E)},$$

donc on a bien $R_E^*(1_A) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$ quelque soit $E \subset A$.

Les dernières inégalités montrent aussi que :

$\forall E \subset A \in \mathcal{M} \quad \nu(E) \geq \frac{1}{2} \nu(A) \implies \|R_E^*(1_A)\|_\infty \leq \rho$, où ρ est un nombre > 0 , ne dépendant que de A .

Autrement dit, les ensembles bornés au sens de Métivier, vérifient les conditions remplies par les ensembles A du corollaire 1, ce qui achève de prouver l'inclusion $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}'$. ■

b) $\mathcal{B}' = \mathcal{O}$.

Supposons pour simplifier l'écriture $\Omega \in \mathcal{O}$. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Désignons par $\mathcal{Q}_\alpha$ la famille des parties A de Ω , satisfaisant à la condition :

$$\exists \beta > 0 \quad \forall E \subset A \quad \nu(E) \geq \alpha \nu(A) \implies \exp T^*(1_E) \geq \beta.$$

La proposition 2 et la remarque qui suit sa démonstration prouvent que dans toute partie Ω' de Ω , il existe un ensemble de $\mathcal{Q}_\alpha$. D'autre part il est clair que $\mathcal{Q}_\alpha$ est stable pour l'union d'ensembles disjoints. Un principe général de la théorie de la mesure permet alors d'affirmer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{Q}_\alpha$ tel que $\nu(A^c) < \epsilon$. Ceci étant, choisissons dans $\mathcal{Q}_{\frac{\alpha}{2}}$ un A tel que $\nu(A^c) \leq \frac{\alpha}{2}$.

$$\forall E \subset \Omega \quad v(E) \geq \alpha \implies v(E \cap A) \geq v(E) - \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\alpha}{2} v(A), \text{ donc}$$

$\exp T^*(1_E) \geq \exp T^*(1_{E \cap A}) \geq \beta$; β indépendant de E . Ceci prouve que $\Omega \in \mathcal{O}_\alpha$ quelque soit $\alpha > 0$, donc que $\Omega \in \mathcal{O}'$, puisqu'il est possible d'appliquer le corollaire 2 à $L^1_0(\Omega)$.

6. Extension du théorème de Métivier aux ensembles de $\mathcal{O}'$.

On a montré que si $\mathcal{O} \neq \emptyset$, il existe une unique mesure invariante σ -finie v équivalente à μ (unique à un facteur > 0 près). On peut alors énoncer la

Théorème 2.

Soit donnée $f \in L^\infty(\Omega)$, vérifiant les conditions :

- 1) $\text{Supp } f = A \in \mathcal{O}$ (ce qui entraîne $f \in L^1_v(A)$),
- 2) $\int f \, dv = 0$.

Il existe dans ces conditions une constante C ne dépendant que de A , telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\| \sum_{j=0}^n T^{*j} f \right\|_\infty \leq C \|f\|_\infty.$$

Démonstration.

Les résultats du § 3 montrent l'existence de $F \in \mathcal{K}(A)$ telle que

$$f = (I_A - A T^*) F = (I - T^*) (R_A^* F).$$

On a aussi

$$\|R_A^* F\|_\infty \leq \|R_A^*(1_A)\|_\infty \|F\|_\infty = \|F\|_\infty \leq \frac{C}{2} \|f\|_\infty,$$

$$\text{si } \frac{C}{2} = \|(I_A - A T^*)^{-1}\|_{\mathcal{K}(A)}.$$

On tire de là, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \sum_{j=0}^n T^{*j} f \right\|_\infty = \|(-T^*) (R_A^* F)\|_\infty \leq C \|f\|_\infty.$$

□

BIBLIOGRAPHIE

- [1] OREY S. "Limit theorems for Markov chain transition probability functions". Lectures notes. Mimeographed. University of Minnesota.
- [2] ORNSTEIN D.S. "Random Walks II".
- [3] METIVIER M. "Existence of an Invariant measure and an Ornstein's ergodic theorem." Ann. Math. Stat. 1969, vol. 40, n° 1, pages 79-96.
-