

BERNARD HANOZET

**Régularité pour une classe d'opérateurs elliptiques
dégénérés du deuxième ordre**

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 1

« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 9, p. 1-59

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969__1_A9_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REGULARITE POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES
DEGENERES DU DEUXIEME ORDRE

par

Bernard HANOUZET

On étudie un opérateur différentiel elliptique d'ordre deux dégénérant sur le bord d'un ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^n$, suffisamment régulier ; le bord $\partial\Omega$ de Ω est une variété de dimension $n-1$, à bord de dimension $n-2$. On obtient un résultat maximum de régularité quand le second membre est dans $L^2(\Omega)$. Des résultats analogues sont obtenus pour un opérateur différentiel elliptique non dégénéré par M. S. HANNA et K.T. SMITH [4]. Les idées suivent de près celles de M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC [2].

En I on introduit un espace de Sobolev avec poids dans un dièdre. Cet espace permet d'étudier localement l'espace $\mathcal{V}(\Omega)$ défini au II. Le problème est posé sous forme variationnelle dans II où l'on donne aussi le résultat principal de régularité ; ce dernier est énoncé sans démonstration dans [5]. Les III et IV sont consacrés à l'étude de la régularité au voisinage d'un point singulier de la frontière de Ω . Le IV traite aussi de façon indépendante la régularité pour un problème dégénéré dans $\mathbb{R}_{++}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$.

I - Espace $V(\mathbb{R}_{++}^n)$

$\mathbb{R}_{++}^n$ désigne le cône : $\{X \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$.

On note $x = x_1$, $y = x_2$, $x' = (x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-2}$.

On pose aussi : $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ et si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
 $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$.

Définition 1.1.

On désigne par $V(\mathbb{R}_{++}^n)$ l'espace :

$$\{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{++}^n) \mid \sqrt{xy} D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}_{++}^n) ; |\alpha| \leq 1\}.$$

Il est immédiat que :

Propriété 1.1.

$V(\mathbb{R}_{++}^n)$ est un espace de Hilbert pour la norme :

$$|u|_V = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq 1} \|\sqrt{xy} D^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^n)}^2 \right\}^{1/2}$$

Les trois propositions qui suivent donnent des propriétés de $V(\mathbb{R}_{++}^n)$.

Proposition 1.1.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n)$ est dense dans $V(\mathbb{R}_{++}^n)$.

La démonstration s'inspire de [3]. Nous en donnons les grandes lignes.

Première étape :

On se propose de démontrer que $\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n)}$ est dense dans $V(\mathbb{R}_{++}^n)$.

Par tronquature on vérifie d'abord que les éléments de V , à supports compacts dans $\overline{\mathbb{R}_{++}^n}$ sont denses dans V . Pour $u \in V$, à support

compact dans $\overline{\mathbb{R}_{++}^n}$, et $h > 0$ on définit ensuite $u_h \in H^1(\mathbb{R}_{++}^n) \cap V(\mathbb{R}_{++}^n)$ par :

$$u_h(x, y, x') = u(x+h, y+h, x')$$

et on montre que u_h tend vers u dans V quand h tend vers zéro. Pour $u \in H^1(\mathbb{R}_{++}^n)$, à support compact dans $\overline{\mathbb{R}_{++}^n}$, il existe une suite u_p , $u_p \in \overline{\mathbb{R}_{++}^n}$, de limite u dans $H^1(\mathbb{R}_{++}^n)$ avec u_p et u à supports dans un compact fixé. Par suite u_p tend vers u dans $V(\mathbb{R}_{++}^n)$.

Deuxième étape.

Soit u dans $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_{++}^n})$, on va montrer qu'il existe une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n)$ de limite u dans $V(\mathbb{R}_{++}^n)$. On choisit une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_{++}^2)$ vérifiant :

$$\psi = 0 \text{ pour } x \leq 1 \text{ ou } y \leq 1, \psi = 1 \text{ pour } x \geq 2 \text{ et } y \geq 2, 0 \leq \psi \leq 1,$$

et on pose :

$$u_\epsilon = \psi_\epsilon u \text{ avec } \psi_\epsilon(x, y) = \psi\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon}\right).$$

Il est immédiat que, quand ϵ tend vers zéro :

$$\sqrt{xy} u_\epsilon \text{ tend vers } \sqrt{xy} u \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_{++}^2),$$

$$\sqrt{xy} D_1 u_\epsilon \text{ tend vers } \sqrt{xy} D_1 u \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_{++}^2), i = 3, \dots, n.$$

Etudions les termes ; pour $i = 1, 2$:

$$\sqrt{xy} D_1 u_\epsilon = \sqrt{xy} \frac{1}{\epsilon} (D_1 \psi)\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon}\right) u + \sqrt{xy} \psi_\epsilon D_1 u.$$

On a encore

$$\sqrt{xy} \psi_\epsilon D_1 u \text{ tend vers } D_1 u \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_{++}^n).$$

Puisque

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} y |(D_1 \Psi)(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon})|^2 |u|^2 dy dx'$$

est borné pour $x \in [\epsilon, 2\epsilon]$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} xy |(D_1 \Psi)(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon})|^2 |u|^2 dx dy dx' &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^{2\epsilon} x dx \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} y |(D_1 \Psi)(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon})|^2 |u|^2 dy dx' \end{aligned}$$

reste bornée et il existe une suite ϵ_i telle que

$$\sqrt{xy} \frac{1}{\epsilon_i} (D_1 \Psi)(\frac{x}{\epsilon_i}, \frac{y}{\epsilon_i})$$

tend faiblement vers zéro dans $L^2(\mathbb{R}_{++}^n)$ (Il est immédiat que cette même expression tend vers zéro dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_{++}^n)$).

On extrait ensuite une sous-suite telle que :

$$\sqrt{xy} \frac{1}{\epsilon_j} (D_2 \Psi)(\frac{x}{\epsilon_j}, \frac{y}{\epsilon_j}) u$$

tend faiblement vers zéro dans $L^2(\mathbb{R}_{++}^n)$. On déduit que $\mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n)$ est faiblement dense dans V donc fortement dense. ~~ZZZ~~

Nous utilisons maintenant cette proposition pour démontrer deux résultats d'immersion.

Proposition 1.2.

$V(\mathbb{R}_{++}^n)$ est contenu dans $L^2(\mathbb{R}_{++}^n)$, avec injection continue.

On prend u dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n)$ et on montre que :

$$|u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^n)} \leq Cte |u|_V.$$

On utilise en passage en coordonnées polaires ; notons que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_{++}^n} xy(|D_1 u|^2 + |D_2 u|^2) dx dy dx' &= \\ \int_{\mathbb{R}_+ \times [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}^{n-2}} r^3 \sin \theta \cos \theta (|D_r u|^2 + \frac{1}{r^2} |D_\theta u|^2) dr d\theta dx' \end{aligned}$$

et que

$$\int_{\mathbb{R}_{++}^n} |u|^2 dx dy dx' = \int_{\mathbb{R}_+ \times [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}^{n-2}} r |u|^2 dr d\theta dx'.$$

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions de $[0, \frac{\pi}{2}]$ telles que :

$$0 \leq \varphi_1 \leq 1, 0 \leq \varphi_2 \leq 1, \varphi_1 + \varphi_2 = 1.$$

$$\text{supp } \varphi_1 \subset [0, \theta_1] \text{ et } \theta_1 < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{supp } \varphi_2 \subset [\theta_2, \frac{\pi}{2}] \text{ et } \theta_2 > 0.$$

D'après l'inégalité de Hardy (voir [8]) :

$$\int_0^{\pi/2} |\varphi_1 u|^2 d\theta \leq C \int_0^{\pi/2} \theta^2 |D_\theta \varphi_1 u|^2 d\theta \leq C_1 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta |D_\theta \varphi_1 u|^2 d\theta$$

où C_1 est une constante dépendant de φ_1 (car $\varphi_1 = 0$ pour $\theta_1 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$).

De même :

$$\int_0^{\pi/2} |\varphi_2 u|^2 d\theta \leq C_2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta |D_\theta \varphi_2 u|^2 d\theta.$$

On obtient donc en notant $R = \mathbb{R}_+ \times [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}^{n-2}$:

$$\begin{aligned} \int_R r |u|^2 dr d\theta dx' &= \int_R r |\varphi_1 u + \varphi_2 u|^2 dr d\theta dx' \\ &\leq C \int_R r (|\varphi_1 u|^2 + |\varphi_2 u|^2) dr d\theta dx' \\ &\leq C \int_R r \sin\theta \cos\theta (|D_\theta \varphi_1 u|^2 + |D_\theta \varphi_2 u|^2) dr d\theta dx' \\ &\leq C \left\{ \int_R r \sin\theta \cos\theta ((D_\theta \varphi_1)^2 + (D_\theta \varphi_2)^2) |u|^2 dr d\theta dx' \right. \quad (\alpha) \\ &\quad + \int_R r \sin\theta \cos\theta |D_\theta \varphi_1 \varphi_2| |u D_\theta u| dr d\theta dx' \quad (\beta) \\ &\quad \left. + \int_R r \sin\theta \cos\theta (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) |D_\theta u|^2 dr d\theta dx' \right\} \quad (\gamma) \end{aligned}$$

Le terme (β) se majore par l'inégalité de Schwarz :

$$\begin{aligned} (\beta) &\leq C \left(\int_R r \sin\theta \cos\theta |u|^2 dr d\theta dx' \right)^{1/2} \left(\int_R r \sin\theta \cos\theta |D_\theta u|^2 dr d\theta dx' \right)^{1/2} \\ &\leq C \left\{ \int_R r \sin\theta \cos\theta |u|^2 dr d\theta dx' + \int_R r \sin\theta \cos\theta |D_\theta u|^2 dr d\theta dx' \right\}. \end{aligned}$$

ce qui donne deux termes analogues à (α) et (γ) .

Le terme (γ) donne de façon immédiate :

$$(\gamma) \leq C \int_R r \sin \theta \cos \theta |D_\theta u|^2 dr d\theta dx' \quad (\gamma').$$

Reste le terme (α) . Par l'inégalité de Hardy, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} r |u|^2 dr \leq C \int_0^{+\infty} r^3 |D_r u|^2 dr$$

et par suite

$$\int_R r \sin \theta \cos \theta |u|^2 dr d\theta dx' \leq C \int_R r^3 \sin \theta \cos \theta |D_r u|^2 dr d\theta dx'. \quad (\alpha')$$

Les majorations (α') et (γ') donnent alors :

$$\begin{aligned} \int_R r |u|^2 dr d\theta dx' &\leq C \left\{ \int_R r^3 \sin \theta \cos \theta |D_r u|^2 dr d\theta dx' \right. \\ &\quad \left. + \int_R r \sin \theta \cos \theta |D_\theta u|^2 dr d\theta dx' \right\}. \end{aligned}$$

ce qui d'après les remarques faites au début donne bien :

$$|u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^n)} \leq C |u|_{V(\mathbb{R}_{++}^n)}$$

pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n)$, la proposition 1.1 permet ensuite de conclure.

Nous précisons le résultat de la proposition précédente :

Proposition 1.3.

$V(\mathbb{R}_{++}^n)$ s'injecte continûment dans l'espace :

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}_{++}^n) / (x^2 + y^2)^{1/4} u \in L^2(\mathbb{R}_{++}^2), H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-2})\} \quad (1)$$

Nous reprenons la démonstration précédente en choisissant φ_1 et φ_2 telles que $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1$.

Partant de :

$$\begin{aligned} |\varphi_1 u|^2 &= - \int_0^{\pi/2} D_\theta |\varphi_1 u(r, t, x')|^2 dt \\ &\leq 2 \int_0^{\pi/2} |\varphi_1 u(r, t, x')| |D_\theta \varphi_1 u(r, t, x')| dt, \end{aligned}$$

on obtient, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} |\varphi_1 u|^2 d\theta &\leq 2 \int_0^{\pi/2} \theta |\varphi_1 u(r, t, x')| |D_\theta \varphi_1 u(r, t, x')| d\theta \\ &\leq C_1 \left(\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta |\varphi_1 u|^2 d\theta \right)^{1/2} \left(\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta |D_\theta \varphi_1 u|^2 d\theta \right)^{1/2} \end{aligned}$$

(cette dernière inégalité est obtenue grâce au choix du support de φ_1 , puis par l'inégalité de Schwarz).

Partant de $|\varphi_2 u|^2 = \int_0^\theta D_\theta |\varphi_2 u|^2 dt$, on obtient une inégalité analogue, c'est-à-dire que l'on a pour $i = 1, 2$:

$$\int_0^{\pi/2} |\varphi_i u|^2 d\theta \leq C_i \left(\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta |\varphi_i u|^2 d\theta \right)^{1/2} \times \left(\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta |D_\theta \varphi_i u|^2 d\theta \right)^{1/2}.$$

(1)

H^s désigne l'espace de Sobolev habituel, voir [6] par exemple.

Nous notons $\hat{u}(x, y, \xi)$ la transformée de Fourier de u suivant les variables $(x_3, \dots, x_n)$; $(\xi_3, \dots, \xi_n) = \xi$ désigne la variable duale. La dernière inégalité se conserve en remplaçant u par $\hat{u}$.

Nous avons d'autre part :

$$\begin{aligned} |(x^2 + y^2)^{1/4} u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2, H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-2}))} &= \int_{\mathbb{R}_{++}^n} (x^2 + y^2)^{1/2} (1 + |\xi|^2)^{1/2} |\hat{u}(x, y, \xi)|^2 dx dy d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} r^2 (1 + |\xi|^2)^{1/2} |\hat{u}(r, \theta, \xi)|^2 dr d\theta d\xi. \end{aligned}$$

Des inégalités :

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} r^2 (1 + |\xi|^2)^{1/2} |\varphi_1 \hat{u}|^2 d\theta \\ &\leq C_1 \left(\int_0^{\pi/2} r^3 \sin\theta \cos\theta (1 + |\xi|^2) |\varphi_1 \hat{u}|^2 d\theta \right)^{1/2} \left(\int_0^{\pi/2} r \sin\theta \cos\theta |D_\theta \varphi_1 \hat{u}|^2 d\theta \right)^{1/2} \\ &\leq C_1 \left\{ \int_0^{\pi/2} r^3 \sin\theta \cos\theta (1 + |\xi|^2) |\varphi_1 \hat{u}|^2 d\theta + \int_0^{\pi/2} r \sin\theta \cos\theta |D_\theta \varphi_1 \hat{u}|^2 d\theta \right\}, \end{aligned}$$

on tire ensuite :

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} r^2 (1 + |\xi|^2)^{1/2} |\hat{u}|^2 d\theta \\ &\leq C \left\{ \int_0^{\pi/2} r^3 \sin\theta \cos\theta (1 + |\xi|^2) |\hat{u}|^2 d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\pi/2} r \sin\theta \cos\theta |D_\theta \varphi_1 \hat{u}|^2 d\theta + \int_0^{\pi/2} r \sin\theta \cos\theta |D_\theta \varphi_2 u|^2 d\theta \right\}. \end{aligned}$$

Après intégration sur $\mathbb{R}$ les deux derniers termes se majorent comme à la

proposition 1.2 et on obtient en définitive :

$$\int_{\mathbb{R}} r^2 (1+|\xi|^2)^{1/2} |\hat{u}|^2 dr d\theta d\xi \leq C \left\{ \int_{\mathbb{R}} r^3 \sin\theta \cos\theta (1+|\xi|^2) |\hat{u}|^2 dr d\theta d\xi \right. \\ \left. + \int_{\mathbb{R}} r^3 \sin\theta \cos\theta |D_r \hat{u}|^2 dr d\theta d\xi + \int_{\mathbb{R}} r \sin\theta \cos\theta |D_\theta \hat{u}|^2 dr d\theta d\xi \right\}.$$

En revenant aux variables : (x, y, ξ) cette dernière inégalité s'écrit :

$$\int_{\mathbb{R}_{++}^n} (x^2+y^2)^{1/2} (1+|\xi|^2)^{1/2} |\hat{u}|^2 dx dy d\xi \\ \leq C \left\{ \int_{\mathbb{R}_{++}^n} xy (1+|\xi|^2) |\hat{u}|^2 dx dy d\xi + \int_{\mathbb{R}_{++}^n} xy (|D_1 \hat{u}|^2 + |D_2 \hat{u}|^2) dx dy d\xi \right\}.$$

donc on a bien :

$$|(x^2+y^2)^{1/4} u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2, H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-2}))} \leq C \|u\|_V. \quad \square$$

Nous préparons maintenant l'étude de la régularité en démontrant deux lemmes de commutation voisins de ceux donnés dans [2]. On introduit l'opérateur T_r : si $u(x, y, x') \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{++}^n)$ et est tempérée en x' , on note $\hat{u}(x, y, \xi)$ la transformée de Fourier en x' et on définit T_r par :

$$\widehat{T_r u}(x, y, \xi) = (1+|\xi|^2)^{r/2} \hat{u}(x, y, \xi).$$

On démontre (voir [7]) les :

Propriétés 1.2.

- i) $u \longrightarrow T_r u$ est linéaire continue de $L^2(\mathbb{R}_{++}^2, H^s(\mathbb{R}^{n-2}))$ dans $L^2(\mathbb{R}_{++}^2, H^{s-r}(\mathbb{R}^{n-2}))$
- ii) si $a \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n)$ alors $u \longrightarrow [a, T_r] u$ ⁽²⁾ est linéaire continue de $L^2(\mathbb{R}_{++}^2, H^s(\mathbb{R}^{n-2}))$ dans $L^2(\mathbb{R}_{++}^2, H^{s-r+1}(\mathbb{R}^{n-2}))$.

Soient maintenant deux fonctions $\zeta, \beta \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_{++}^n})$, ζ et β à valeurs réelles, et on pose :

$$M = (x^2 + y^2)^{1/4} \beta T_{1/2} \zeta$$

Alors l'adjoint formel M^* de M est :

$$M^* = (x^2 + y^2)^{1/4} \zeta T_{1/2} \beta$$

On donne ensuite $a \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_{++}^n})$ et P, Q deux opérateurs différentiels en toutes les variables d'ordre inférieur ou égal à 1 et à coefficients $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_{++}^n})$ tels que :

$$\forall r : [Q, T_r] = [A, T_r] = 0.$$

Nous noterons dans la suite :

$(\cdot, \cdot)_s$ et $|\cdot|_s$ le produit scalaire et la norme dans $H^s(\mathbb{R}_{++}^n)$. On démontre alors le :

Lemme 1.1.

Pour tout v dans $H_0^1 \cap H^2(\mathbb{R}_{++}^n)$ il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|(aP Mv, Q M v)_0 - (a P v, Q M^* M v)_0| \leq C |v|_1 |Mv|_1.$$

(2) $[a, T_r]$ désigne le commutateur de a et T_r .

Le calcul est identique pour le troisième terme ; pour le quatrième, en utilisant la propriété 1.2,ii, on obtient :

$$\begin{aligned} |(x^2+y^2)^{1/4} [a, T_{1/2}] \zeta P|_0 &\leq C |[a, T_{1/2}] \zeta P v|_0 \\ &\leq C |\zeta P v|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2, H^{-1/2}(\mathbb{R}^{n-2}))} \leq C |P v|_0 \leq C |v|_1. \end{aligned}$$

Le premier terme, en posant $P = \sum_{i=0}^n p_i D_i$, se présente sous la forme :

$$a \beta p_1 \frac{1}{2} x(x^2+y^2)^{-3/4} T_{1/2} \zeta + a \beta p_2 \frac{1}{2} y(x^2+y^2)^{-3/4} T_{1/2} \zeta$$

et on a alors la majoration :

$$|a \beta [P, (x^2+y^2)^{1/4}] T_{1/2} \zeta v|_0 \leq C |(x^2+y^2)^{-1/4} T_{1/2} \zeta v|_0$$

car
$$x(x^2+y^2)^{-3/4} \leq (x^2+y^2)^{-1/4}.$$

L'utilisation de la propriété :

Propriété 1.3.

Il existe une constante $C > 0$ telle que , $\forall v \in H_0^1(\mathbb{R}_{++}^n)$, on a :

$$|(x^2+y^2)^{-1/4} T_{1/2} v|_0 \leq C |v|_1$$

permet alors de conclure à :

$$|[a P, M] v|_0 \leq C |v|_1.$$

On traite ensuite de la même manière :

$$(a P v, [Q, M^*] M v)_0$$

En remplaçant Q par $a P$, M^* par M on montre que $[Q, M^*]$ est linéaire continu de $H^1(\mathbb{R}_{++}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}_{++}^n)$ donc

$$|(a P v, [Q, M^*] M v)_0| \leq C |v|_1 |M v|_1 .$$

ce qui termine la démonstration du lemme 1.1. $\square$

Reste à vérifier la propriété 1.3 :

Pour $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n)$, on a, après un passage en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |\hat{v}|^2 dr &\leq C \int_0^{+\infty} r |\hat{v}| \frac{1}{r} |\hat{v}| dr \\ &\leq C \left(\int_0^{+\infty} r |D_r \hat{v}|^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} r |\hat{v}|^2 dr \right)^{1/2} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_{++}^n} (x^2 + y^2)^{-1/2} |T_{1/2} v|^2 dx &= \\ \int_{\mathbb{R}_{++}^n} (x^2 + y^2)^{-1/2} (1 + |\xi|^2)^{1/2} |\hat{v}(x, y, \xi)|^2 dx dy d\xi &= \\ \int_{\mathbb{R}^{n-2}} (1 + |\xi|^2)^{1/2} d\xi \int_{\mathbb{R}_+ \times [0, \frac{\pi}{2}]} |\hat{v}(x, y, \xi)|^2 dr d\theta &\leq \\ C \int_{\mathbb{R}^{n-2}} d\xi \left(\int_{\mathbb{R}_+ \times [0, \frac{\pi}{2}]} r |D_r \hat{v}|^2 dr d\theta \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}_+ \times [0, \frac{\pi}{2}]} r (1 + |\xi|^2) |\hat{v}|^2 dr d\theta \right)^{1/2} &\leq \\ C \left\{ \int_{\mathbb{R}} r |D_r \hat{v}|^2 dr d\theta d\xi + \int_{\mathbb{R}} r (1 + |\xi|^2) |\hat{v}|^2 dr d\theta \right\} &\leq \\ C |v|_1 \end{aligned}$$

ce qui fournit la conclusion en tenant compte de la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n)$ dans $H_0'(\mathbb{R}_{++}^n)$. 

Lemme 1.2.

Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in H_0' \cap H^2(\mathbb{R}_{++}^n)$ à support dans un compact fixe de $\overline{\mathbb{R}_{++}^n}$, on ait :

$$|(a \, xy \, P \, M \, v, Q \, M \, v)_0 - (a \, xy \, P \, v, Q \, M^* \, M \, v)_0| \leq C |v|_V |M \, v|_V .$$

Remarquons que les expressions intervenant dans le premier membre de l'inégalité ne changent pas quand on remplace v par $\beta_1 v$ avec $\beta_1 \zeta = \zeta$, β_1 dans $\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n)}$. Il est utile de supposer v à support compact pour assurer que $v \in H_0' \cap H^2(\mathbb{R}_{++}^n)$ entraîne $v \in V(\mathbb{R}_{++}^n)$.

Nous procédons comme au lemme 1.1 ; il est aussi utile de noter que $[xy, M] = 0$.

Partant de :

$$\begin{aligned} (a \, xy \, P \, M \, v, Q \, M \, v)_0 &= (axy \, P \, v, Q \, M^* \, M \, v)_0 = \\ &= (\sqrt{xy} \, [a \, P, M] \, v, \sqrt{xy} \, Q \, M \, v)_0 - (a \, \sqrt{xy} \, P \, v, \sqrt{xy} \, [Q, M^*] \, M \, v)_0 \end{aligned}$$

on obtient le lemme en majorant séparément les deux derniers termes. Nous n'étudions que le premier ; il suffit de montrer que :

$$|\sqrt{xy} [a \, P, M] \, v|_0 \leq C |v|_V .$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} [a, P, \bar{M}] &= \sqrt{xy} [P, (x^2+y^2)^{1/4}] T_{1/2} \zeta \\ &+ \sqrt{xy} a(x^2+y^2)^{1/4} [P, \beta] T_{1/2} \zeta + \sqrt{xy} a(x^2+y^2)^{1/4} \beta T_{1/2} [P, \zeta] \\ &+ \sqrt{xy} (x^2+y^2)^{1/4} \beta [a, T_{1/2}] \zeta P. \end{aligned}$$

La proposition 1.3 permet de majorer les 3 premiers termes :

Pour le premier :

$$\begin{aligned} |a \beta P_1 \frac{1}{2} \sqrt{xy} x(x^2+y^2)^{-3/4} T_{1/2} \zeta v|_0 \\ \leq C (x^2+y^2)^{1/4} T_{1/2} \zeta v|_0 \\ \leq C |\zeta v|_V \leq C |v|_V. \end{aligned}$$

Le deuxième et troisième sont immédiats. Reste :

$$\begin{aligned} &|\sqrt{xy} (x^2+y^2)^{1/4} \beta [a, T_{1/2}] \zeta P v|_0 \\ &= |\beta [a, T_{1/2}] (x^2+y^2)^{1/4} \sqrt{xy} \zeta P v|_0 \\ &\leq C |\sqrt{xy} \zeta P v|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2, H^{-1/2}(\mathbb{R}^{n-2}))} \end{aligned}$$

(d'après la propriété 1.2, ii)

$$\leq C |\sqrt{xy} P v|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^n)} \leq C |v|_V.$$

On termine ensuite la démonstration comme au lemme précédent. 

Nous rappelons maintenant quelques propriétés d'espaces utiles pour la suite.

Désignons par $\mathbb{R}_+^n$ le demi-espace :

$$\{X \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0\}.$$

Nous introduisons comme dans [2] l'espace :

$$U(\mathbb{R}_+^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n) \mid \sqrt{x_1} D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}_+^n), |\alpha| \leq 1\}.$$

$U(\mathbb{R}_+^n)$ est un espace de Hilbert quand on le munit de la norme :

$$|u|_U = \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \|\sqrt{x_1} D^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \right)^{1/2}$$

et on a les propriétés :

Propriété 1.1'.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$ est dense dans $U(\mathbb{R}_+^n)$.

Propriétés 1.2'.

On a l'inclusion topologique :

$$\mathcal{D} \subset L^2(\mathbb{R}_+, H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}))$$

II - Espace $\mathcal{V}(\Omega)$. Problème variationnel.

On donne p fonctions réelles $\varphi_1, \dots, \varphi_p$, $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^n$ et on suppose qu'un ouvert borné Ω est défini par :

$$\Omega = \{X \in \mathbb{R}^n / \varphi_i(X) > 0, i = 1, \dots, p\}.$$

On pose $\phi = \prod_{i=1}^p \varphi_i$ et on suppose que :

i) Pour tout point régulier X de $\partial\Omega$, il existe un indice i tel que :

$$\varphi_i(X) = 0 \text{ et } \varphi_j \neq 0, j \neq i, j = 1, \dots, p \quad (2.1)$$

et $d\phi(X) \neq 0$.

(cette dernière condition équivaut à $d\varphi_i(X) \neq 0$).

ii) Pour tout point singulier A de $\partial\Omega$ il existe un couple d'indices (i, j) tel que :

$$\begin{cases} \varphi_i(A) = \varphi_j(A) = 0 \\ \varphi_k(A) \neq 0, k \neq i, k \neq j, k = 1, \dots, p \\ \text{grad } \varphi_i(A) \wedge \text{grad } \varphi_j(A) \neq 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Nous introduisons l'espace $\mathcal{V}(\Omega)$ par :

Définition 2.1.

$$(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) / \phi^{1/2} D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 1\}.$$

et on a immédiatement :

$\mathcal{V}(\Omega)$ est un espace de Hilbert quand on le munit de la norme :

$$|u| = \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} |\phi^{1/2} D^\alpha u|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Nous utiliserons dans la suite les :

Propriétés 2.1.

1°) $\mathcal{V}(\Omega)$ est contenu dans $H_{loc}^1(\Omega)$ algébriquement et topologiquement.

2°) Si ψ est une fonction de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ l'application :

$$u \longrightarrow \psi u$$

est continue de $\mathcal{V}(\Omega)$ dans lui-même .

3°) Pour que u appartienne à $\mathcal{V}$ il faut et il suffit que les trois propriétés suivantes soient réalisées :

i) $u \in H_{loc}^1(\Omega)$.

ii) pour X point régulier de $\partial\Omega$, il existe un ouvert O voisinage de X et un difféomorphisme θ de O sur O' (O' boule ouverte de $\mathbb{R}^n$, centrée à l'origine) vérifiant :

$$\theta(O \cap \bar{\Omega}) = O' \cap \mathbb{R}_+^n$$

$$\theta(O \cap \partial\Omega) = O' \cap \partial\mathbb{R}_+^n$$

et tels que, pour tout $\zeta \in \mathcal{D}(O \cap \bar{\Omega})$, on ait :

$$\zeta u \circ \theta^{-1} \in U(\mathbb{R}_+^n).$$

iii) Pour X point singulier de $\partial\Omega$, il existe un ouvert O voisinage de X et un difféomorphisme de O sur O' vérifiant :

$$\begin{aligned}\theta(O \cap \overline{\Omega}) &= O' \cap \mathbb{R}_{++}^n \\ \theta(O \cap \partial\Omega) &= O' \cap \partial \mathbb{R}_{++}^n\end{aligned}$$

et tels que, pour toute $\zeta \in \mathcal{D}(O \cap \overline{\Omega})$ on ait :

$$\zeta u \circ \theta^{-1} \in V(\mathbb{R}_{++}^n).$$

4°) $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{V}(\Omega)$.

5°) $\mathcal{V}(\Omega)$ est contenu algébriquement et topologiquement dans $L^2(\Omega)$.

Tirons deux conséquences avant de démontrer ces propriétés :

Conséquences 2.1.

1°) Le dual $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ est un espace de distributions.

2°) Puisque Ω est un ouvert borné, la norme :

$$|u| = \left(|u|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha| \leq 1} |\phi^{1/2} D^\alpha u|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

est équivalente à la norme $\mathcal{V}$.

Démonstration.

1° et 2° sont immédiats ; remarquons que, pour 2°, il suffirait de prendre $\Psi \in C^1(\overline{\Omega})$.

Le 3° se démontre par partition de l'unité.

Soit X point régulier de $\partial\Omega$, tel que $\varphi_1(X) = 0$; on peut prendre

dans un voisinage :

$$\theta \begin{cases} x'_1 = \varphi_1(x) \\ x'_i = \theta_i(x) \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

et on a $\zeta u \circ \theta^{-1} \in U(\mathbb{R}_+^n)$ pour $\zeta \in \mathcal{Q}(0 \cap \bar{\Omega})$.

Pour A point singulier de $\partial\Omega$, tel que $\varphi_1(A) = \varphi_2(A) = 0$ on peut prendre

$$\theta \begin{cases} x'_1 = \varphi_1(x) \\ x'_2 = \varphi_2(x) \\ x'_i = \theta_i(x) \quad i = 3, \dots, n. \end{cases}$$

et on a $\zeta u \circ \theta^{-1} \in V(\mathbb{R}_{++}^n)$ pour $\zeta \in \mathcal{Q}(0 \cap \bar{\Omega})$.

Les hypothèses (2.1) et (2.2) permettent en effet ce choix. Le 4° s'obtient ensuite à partir des propriétés 1.1, et 1.1' et le 5° à partir des propriétés 1.2 et 1.2'. 

Problème variationnel.

On considère la forme intégrale-différentielle a définie par :

$$a(u, v) = \sum_{\substack{0 \leq |\alpha| \leq 1 \\ 0 \leq |\beta| \leq 1}} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(X) \phi(X) D^{\alpha} u \overline{D^{\beta} v} dX$$

avec $a_{\alpha\beta}$ dans $C^{\infty}(\bar{\Omega})$.

La forme a est donc continue sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$. On suppose de plus que a est $\mathcal{V}$ -coercitive, c'est-à-dire :

$$\exists \gamma > 0 \text{ tel que } \forall u \in \mathcal{V} \quad \operatorname{Re} a(u, u) \geq \gamma |u|^2$$

On associe à a l'opérateur différentiel $A = A(X, D)$:

$$A = \sum_{\substack{0 \leq |\alpha| \leq 1 \\ 0 \leq |\beta| \leq 1}} D^\beta a_{\alpha\beta}(X) \phi(X) D^\alpha$$

L'application du lemme de Lax Milgram donne alors la :

Proposition 2.1.

Pour tout $f \in \mathcal{V}'(\Omega)$, il existe u dans $\mathcal{V}(\Omega)$ unique, tel que :

$$a(u, v) = (f, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \text{ pour tout } v \in \mathcal{V} \quad (2.3)$$

ou encore

A est un isomorphisme de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$.

Donc pour tout f dans $\mathcal{V}'(\Omega)$ il existe u dans $\mathcal{V}(\Omega)$, unique, telle que $Au = f$. On suppose maintenant que u est dans un espace "plus petit" que $\mathcal{V}'(\Omega)$, on cherche alors dans quel espace se trouve la solution u .

On obtient le résultat maximal quand f est dans $L^2(\Omega)$.

Régularité avec second membre dans $L^2(\Omega)$.

On suppose que a possède la propriété d'ellipticité :

$\exists \delta > 0$ tel que $\forall \xi \in \mathbb{C}^n$ et $\forall x \in \overline{\Omega}$:

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(X) \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta \geq \delta |\xi|^2 \quad (2.4)$$

et on pose :

$\Psi = \Pi(\varphi_1^2 + \varphi_j^2)^{1/2}$, le produit Π étant étendu aux couples (i, j) définis

en (2.2). On introduit ensuite :

Définition 2.2.

$$D = \{u \in L^2(\Omega) \mid \Psi u \in H^1(\Omega) ; \Phi u \in H^2(\Omega)\}.$$

D est un espace de Hilbert pour la norme :

$$|u|_D = (|u|_{L^2(\Omega)}^2 + |\Psi u|_{H^1(\Omega)}^2 + |\Phi u|_{H^2(\Omega)}^2)^{1/2}$$

Pour la commodité des démonstrations nous donnons une définition équivalente de l'espace D.

Définition 2.2'.

$$D = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \begin{array}{l} \Psi D^\alpha u \in L^2(\Omega) , \quad |\alpha| = 1 \\ \Phi D^\alpha u \in L^2(\Omega) , \quad |\alpha| = 2 \end{array} \right\}$$

Notons pour l'instant :

$$\Delta = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \begin{array}{l} \Psi D^\alpha u \in L^2(\Omega) , \quad |\alpha| = 1 \\ \Phi D^\alpha u \in L^2(\Omega) , \quad |\alpha| = 2 \end{array} \right\}$$

et posons I l'ensemble des couples (i,j) de finis par (2.2).

1°) Montrons tout d'abord que $\Delta \hookrightarrow D$.

Puisque Ψ et Φ sont bornées sur Ω , on a tout d'abord :

$$|\Psi u|_{L^2(\Omega)} \leq C |u|_{L^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad |\Phi u|_{L^2(\Omega)} \leq C |u|_{L^2(\Omega)} \quad (\alpha)$$

Majorons ensuite $|D_1 \Psi u|_{L^2(\Omega)}$; on a :

$$D_1(\Psi u) = (D_1 \Psi) u + \Psi D_1 u$$

et

$$|D_1 \Psi| = \left| \sum_{(i,j) \in I} \frac{\Psi}{(\varphi_i^2 + \varphi_j^2)^{1/2}} \times \frac{\varphi_i D_1 \varphi_i + \varphi_j D_1 \varphi_j}{(\varphi_i^2 + \varphi_j^2)^{1/2}} \right|$$

Puisque

$$\frac{|\varphi_i D_1 \varphi_i + \varphi_j D_1 \varphi_j|}{(\varphi_i^2 + \varphi_j^2)^{1/2}} \leq C \frac{|\varphi_i| + |\varphi_j|}{(\varphi_i^2 + \varphi_j^2)^{1/2}} \leq C \sqrt{2}$$

on déduit que $|D_1 \Psi|$ est borné sur Ω donc que :

$$|D_1 \Psi u|_{L^2(\Omega)} \leq C |u|_{L^2(\Omega)} + |\Psi D_1 u|_{L^2(\Omega)} \quad (\beta)$$

On étudie ensuite les termes de $|\Phi u|_{H^2(\Omega)}$:

$$D_1(\Phi u) = (D_1 \Phi) u + \Phi D_1 u$$

donc :

$$|D_1(\Phi u)|_{L^2(\Omega)} \leq C |u|_{L^2(\Omega)} + \left| \frac{\Phi}{\Psi} \Psi D_1 u \right|_{L^2(\Omega)}$$

D'autre part : $\frac{\Phi}{\Psi}$ reste borné sur Ω , en effet Ψ ne s'annule que pour les points singuliers de la frontière de Ω , soit A un de ces points défini par $\varphi_i(A) = \varphi_j(A) = 0$, alors

$$\frac{\varphi_i \varphi_j}{(\varphi_i^2 + \varphi_j^2)^{1/2}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\varphi_i^2 + \varphi_j^2} \text{ est borné.}$$

On obtient donc :

$$|D_1(\Phi u)|_{L^2(\Omega)} \leq C(|u|_{L^2(\Omega)} + |\Psi D_1 u|_{L^2(\Omega)}) \quad (\gamma)$$

Il suffit maintenant de majorer le terme :

$$\begin{aligned} |D_1^2(\phi u)|_{L^2(\Omega)} &\leq |(D_1^2\phi)u|_{L^2(\Omega)} + |2 D_1\phi D_1u|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + |\phi D_1^2 u|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C(|u|_{L^2(\Omega)} + |\frac{D_1\phi}{\Psi} \cdot \Psi D_1u|_{L^2(\Omega)} + |\phi D_1^2 u|_{L^2(\Omega)}) \end{aligned}$$

Puisque $\frac{D_1\phi}{\Psi}$ ne contient que des termes de la forme :

$$\prod_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} \varphi_k \cdot \frac{\varphi_i D_1 \varphi_j + \varphi_j D_1 \varphi_i}{(\varphi_i^2 + \varphi_j^2)^{1/2}} \times \frac{(\varphi_i^2 + \varphi_j^2)^{1/2}}{\Psi}$$

$\frac{|D_1\phi|}{\Psi}$ est borné sur Ω donc :

$$|D_1^2(\phi u)|_{L^2(\Omega)} \leq C(|u|_{L^2(\Omega)} + |\Psi D_1 u|_{L^2(\Omega)} + |\phi D_1^2 u|_{L^2(\Omega)}) \quad (\gamma)$$

Les inégalités (α) , (β) , (γ) , (δ) donnent alors :

$$|u|_D \leq C|u|_\Delta$$

2°) Nous montrons maintenant que $D \hookrightarrow \Delta$. On a immédiatement :

$$\begin{aligned} |\Psi D_1 u|_{L^2(\Omega)} &\leq |D_1(\Psi u)|_{L^2(\Omega)} + |(D_1\Psi) u|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C(|\Psi u|_{H^1(\Omega)} + |u|_{L^2(\Omega)}) \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} |\phi D_1^2 u|_{L^2(\Omega)} &\leq |D_1^2(\phi u)|_{L^2(\Omega)} + 2|D_1 \phi \cdot D_1 u|_{L^2(\Omega)} + |(D_1^2 \phi) u|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C (|\phi u|_{H^2(\Omega)} + |\psi D_1 u|_{L^2(\Omega)} + |u|_{L^2(\Omega)}) \end{aligned}$$

Les deux dernières inégalités fournissent :

$$|u|_{\Delta} \leq C |u|_D \quad \text{□}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal :

THEOREME 1.

Si f est dans $L^2(\Omega)$, la solution u du problème :

$$a(u, v) = (f, v)_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}} \text{ pour tout } v \in \mathcal{V} \quad (2.3)$$

est dans D .

ou encore :

L'opérateur A est un isomorphisme topologique de D sur $L^2(\Omega)$

Démonstration.

1°) A est un opérateur linéaire continu de D dans $L^2(\Omega)$. En effet :

$$\begin{aligned} |D^\beta (a_{\alpha\beta} \phi D^\alpha u)|_{L^2(\Omega)} &\leq |(D^\beta a_{\alpha\beta}) \cdot \phi D^\alpha u|_{L^2(\Omega)} + \\ &|a_{\alpha\beta} (D^\beta \phi) D^\alpha u|_{L^2(\Omega)} + |a_{\alpha\beta} \phi D^{\alpha+\beta} u|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C |u|_D \end{aligned}$$

(Il suffit d'utiliser les propriétés qui ont permis de démontrer l'équivalence des définitions 2.2 et 2.2').

2°) Réciproquement nous allons démontrer que si $u \in \mathcal{V}$ et $A(X, D) u \in L^2(\Omega)$ alors u est dans $D(A)$.

Le théorème sera alors une conséquence du théorème de Banach. Nous faisons une étude locale en distinguant les points intérieurs, les points réguliers et les points singuliers du bord.

a) Régularité intérieure :

Soit Ω' un ouvert contenu ainsi que son adhérence dans Ω . Puisque A est elliptique sur Ω' , on a :

pour toute fonction $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega')$, $\zeta u \in H^2(\Omega)$.

b) Régularité au bord - cas d'un point régulier.

Soit par exemple X un point régulier de la portion de $\partial\Omega$ défini par $\varphi_1(X) = 0$. Si D est un ouvert convenable voisinage du point X , on a, pour toute fonction $\zeta \in \mathcal{D}(D \cap \overline{\Omega})$:

$$\begin{cases} \zeta u \in H^1(D \cap \overline{\Omega}) \\ \varphi_1 \zeta u \in H^2(D \cap \overline{\Omega}). \end{cases}$$

La démonstration de ce résultat est donnée dans [2].

c) Régularité au bord - cas d'un point singulier.

Soient $(i, j) \in I$ et X un point de $\partial\Omega$ défini par $\varphi_i(X) = \varphi_j(X) = 0$. Pour D ouvert convenable voisinage de X , on a, pour toute fonction $\zeta \in \mathcal{D}(D \cap \overline{\Omega})$:

$$(\varphi_1^2 + \varphi_j^2)^{1/2} D^\alpha \zeta u \in L^2(O \cap \overline{\Omega}) ; |\alpha| = 1$$

$$\varphi_1 \varphi_j D^\alpha \zeta u \in L^2(O \cap \overline{\Omega}) ; |\alpha| = 2$$

Ce résultat sera démontré par la suite (voir les propositions 3.3 et 4.6)

Ecrivons de nouveau les résultats a - b - c en introduisant les fonctions Ψ et Φ .

$$a) \quad \zeta u \in L^2(\Omega')$$

$$|\alpha| = 1 \quad \Psi D^\alpha \zeta u \in L^2(\Omega') \quad \text{car } C_1 \leq \Psi \leq C_2 \text{ sur } \Omega'$$

$$|\alpha| = 2 \quad \Phi D^\alpha \zeta u \in L^2(\Omega') \quad \text{car } C_1 \leq \Phi \leq C_2 \text{ sur } \Omega'$$

$$b) \quad \zeta u \in L^2(O \cap \Omega)$$

$$|\alpha| = 1 \quad \Psi D^\alpha \zeta u \in L^2(O \cap \Omega) \quad \text{car } C_1 \leq \Psi \leq C_2 \text{ sur } O \cap \Omega$$

$$|\alpha| = 2 \quad \Phi D^\alpha \zeta u \in L^2(O \cap \Omega) \quad \text{car } C_1 \leq \frac{\Phi}{\varphi_1} \leq C_2 \text{ sur } O \cap \Omega$$

$$c) \quad \zeta u \in L^2(O \cap \Omega)$$

$$|\alpha| = 1 \quad \Psi D^\alpha \zeta u \in L^2(O \cap \Omega) \quad \text{car } C_1 \leq \frac{\Psi}{(\varphi_1^2 + \varphi_j^2)^{1/2}} \leq C_2 \text{ sur } O \cap \Omega$$

$$|\alpha| = 2 \quad \Phi D^\alpha \zeta u \in L^2(O \cap \Omega) \quad \text{car } C_1 \leq \frac{\Phi}{\varphi_1 \varphi_j} \leq C_2 \text{ sur } O \cap \Omega$$

A l'aide d'une partition de l'unité convenable, on obtient donc :

$$u \in L^2(\Omega) ; \Psi D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| = 1 ;$$

$$\Phi D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| = 2$$

ce qui montre que $u \in D$ et termine la démonstration. ~~QED~~

III - Régularité - Cas des variables tangentielles.

Supposons qu'un point singulier A de $\partial\Omega$ est tel que :

$$\varphi_1(A) = \varphi_2(A) = 0 \text{ (donc } \varphi_i(A) \neq 0, i \geq 3).$$

Si O est un ouvert convenable voisinage de A, on peut définir un difféomorphisme θ de $O \cap \Omega$ sur $O' \cap \mathbb{R}_{++}^n$ par :

$$\begin{cases} x = \varphi_1(X) \\ y = \varphi_2(X) \\ x'_i = \theta_i(X) \quad i = 3, \dots, n \end{cases}$$

et, si $u \in \mathcal{V}(\Omega)$, pour toute fonction $\zeta \in \mathcal{D}(O \cap \overline{\Omega})$ on a : $\zeta u \circ \theta^{-1} \in V(\mathbb{R}_{++}^n)$.

Pour simplifier nous notons aussi ζu la fonction $\zeta u \circ \theta^{-1}$ ainsi que son prolongement par 0 dans $\mathbb{R}_{++}^n$ dans tous les cas où il n'y a pas ambiguïté.

On démontre maintenant la :

Proposition 3.1.

Si $f \in L^2(\Omega)$, la solution du problème (2.3) vérifie :

$$(x^2 + y^2)^{1/4} T_{1/2} \zeta u \in V(\mathbb{R}_{++}^n)$$

Nous tirons immédiatement la conséquence

$$(x^2 + y^2)^{1/2} D \zeta u \in L^2(\mathbb{R}_{++}^n)$$

avec $D = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x'_i}$, dérivée tangentielle quelconque

On utilise comme dans [1] une régularisation elliptique. On a l'inclusion

algébrique et topologique :

$$H_0^1(\Omega) \subset \mathcal{V}(\Omega)$$

et $H_0^1(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{V}(\Omega)$, donc $\mathcal{V}(\Omega) = H_0^{-1}(\Omega)$. Soit ε_j une suite de nombres positifs d' limite 0 ; on définit la forme intégrale différentielle régularisée a_j par :

$$a_j(u,v) = a(u,v) + \varepsilon_j(u,v)_1$$

Les formes a_j sont continues sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ -coercitives. Si $f \in L^2(\Omega)$, la solution u_j du problème variationnel régularisé :

$$a_j(u,v) = (f,v)_0 \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathcal{V}(\Omega)$$

appartient à $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ (voir [4])

et les deux expressions :

$$\sqrt{\varepsilon_j} \|u_j\|_{H^1(\Omega)} \text{ , } \|u_j\|_{\mathcal{V}(\Omega)} \quad (3.1)$$

restent bornées quand j varie.

Nous savons aussi que :

la solution u est limite faible dans $\mathcal{V}$ d'une sous-suite extraite de la suite (u_j) .

On se donne ζ et β dans $\mathcal{D}(0 \cap \overline{\Omega})$ et à valeurs réelles telles que $\beta \zeta = \zeta$ et on pose comme au I :

$$M = (x^2 + y^2)^{1/4} \beta T_{1/2} \zeta.$$

$M u_j$ se lit dans l'ouvert Ω :

$$(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^{1/4} \beta \leq \tau_{1/2} (\zeta u_j \circ \theta^{-1}) \circ \theta$$

ce qui donne un sens aux expressions :

$$\begin{aligned} A_j &= a_j(M u_j, M u_j) \\ B_j &= a_j(u_j, M^* M u_j) \end{aligned}$$

Nous démontrons le :

Lemme 3.1.

$|M u_j|_V$ reste borné quand j varie.

Puisque la forme a est V^* -coercitive nous tirons :

$$|A_j| \geq \gamma |M u_j|_V^2 + \epsilon_j |M u_j|_1^2$$

Nous obtenons une majoration de $|B_j|$ en écrivant que u_j est solution du problème régularisé :

$$|B_j| \leq \|f\|_0 |M^* M u_j|_0$$

et d'autre part ,

$$\begin{aligned} |M^* M u_j|_0 &\leq C |(x^2 + y^2)^{1/4} M u_j|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^n, H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-2}))} \\ &\leq C |M u_j|_{V(\mathbb{R}_{++}^n)} \end{aligned}$$

L'utilisation des lemmes 1.1 et 1.2 fournit une majoration de $|A_j - B_j|$:

$$|A_j - B_j| \leq C(\epsilon_j |u_j|_1 |M u_j|_1 + |u_j|_V |M u_j|_V)$$

et par (3.1) :

$$|A_j - B_j| \leq C(\sqrt{\epsilon_j} |M u_j|_1 + |M u_j|_V)$$

En rassemblant les trois inégalités précédentes, l'inégalité :

$$|A_j| \leq |B_j| + |A_j - B_j|$$

fournit :

$$\epsilon_j |M u_j|_1^2 + \gamma |M u_j|_V^2 \leq C(\sqrt{\epsilon_j} |M u_j|_1 + |M u_j|_V)$$

qui montre que les deux expressions :

$$\sqrt{\epsilon_j} |M u_j|_1 \text{ et } |M u_j|_V$$

restent bornées quand j varie. ~~□~~

Terminons maintenant la démonstration de la proposition 3.1.

Puisque la boule unité de V est faiblement compacte, on peut extraire de la suite u_j une suite telle que :

$M u_j$ converge faiblement vers v quand j tend vers l'infini.

Mais, d'autre part, u_j converge faiblement vers u dans V , donc $M u_j$ converge faiblement vers $M u$ dans L^2 . On en déduit alors que :

$$M u = v \in V.$$

D'après le choix de β on a ensuite :

$$(x^2 + y^2)^{1/4} T_{1/2} \zeta u = (x^2 + y^2)^{1/4} \beta T_{1/2} \zeta u + (x^2 + y^2)^{1/4} [\beta, T_{1/2}] \zeta u.$$

Il suffit donc de vérifier que le dernier terme est aussi dans V , soit encore que :

$$(x^2+y^2)^{1/4} T_{-1/2} \zeta u \in V$$

puisque $[\beta, T_{1/2}]$ est tangential d'ordre $-\frac{1}{2}$.

La dernière propriété tient au fait que, pour les variables tangentielles :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_{++}^n} xy(x^2+y^2)^{1/4} (1+|\xi|^2)^{1/2} |\widehat{\zeta u}|^2 dx dy d\xi \\ & \leq C \int_{\mathbb{R}_{++}^n} xy(1+|\xi|^2) |\widehat{\zeta u}|^2 dx dy d\xi \leq C |\zeta u|_V \end{aligned}$$

et pour les variables normales :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_{++}^n} xy(1+|\xi|^2)^{-1/2} |D_x(x^2+y^2)^{+1/4} \widehat{\zeta u}|^2 dx dy d\xi \\ = & \int_{\mathbb{R}_{++}^n} xy \frac{x^2}{4(x^2+y^2)^{-3/2}} (1+|\xi|^2)^{-1/2} |\widehat{\zeta u}|^2 dx dy d\xi \\ & + \int_{\mathbb{R}_{++}^n} xy(x^2+y^2)^{1/4} (1+|\xi|^2)^{-1/2} |D_x \widehat{\zeta u}|^2 dx dy d\xi \\ & \leq C |\zeta u|_V \end{aligned}$$

Notons que les constantes intervenant ici ne dépendent pas de u mais dépendent du support de ζ . ~~■~~

Nous utilisons maintenant une méthode de différences finies pour gagner un "cran" de régularité (voir par exemple [9] pour la même méthode appliquée à un problème elliptique).

Proposition 3.2.

Si $f \in L^2(\Omega)$, la solution du problème (2.3) vérifie :

$\sqrt{xy} \quad D \zeta u \in V(\mathbb{R}_{++}^n)$ avec D dérivée tangentielle.

Remarquons tout d'abord que u dans $\mathcal{V}(\Omega)$ et $A u$ dans $L^2(\Omega)$ entraînent $A(\zeta u) \in L^2(\Omega)$; en effet :

$$A(\zeta u) = \zeta A u + [A, \zeta] u \text{ et :}$$

$$\begin{aligned} [A, \zeta] u &= \sum_{\substack{|\alpha| \leq 1 \\ |\beta| \leq 1}} (D^\beta a_{\alpha\beta} \phi D^\alpha \zeta u - \zeta D^\beta a_{\alpha\beta} \phi D^\alpha u) \\ &= \sum_{\substack{|\alpha| \leq 1 \\ |\beta| \leq 1}} (D^\beta a_{\alpha\beta} \phi (D^\alpha \zeta) u + (D^\beta \zeta) a_{\alpha\beta} \phi D^\alpha u) \end{aligned}$$

appartient à $L^2(\Omega)$ puisque u est dans $\mathcal{V}(\Omega)$.

Dans la suite, nous posons, pour simplifier les notations :

$$\zeta u = v$$

$$g = \zeta A u + [A, \zeta] u$$

Nous avons donc :

$$A v = g \text{ avec } v \in \mathcal{V}(\Omega)$$

$$g \in L^2(\Omega) ; \text{ supp } g \subset \text{ supp } \zeta .$$

Soit τ_h un opérateur de translation tangentielle, c'est-à-dire suivant l'une des variables $x'_3, \dots, x'_n$ de $\mathbb{R}_{++}^n$:

- si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n)$ on a :

$$(\tau_h \varphi)(X) = \varphi(x, y, x'_3, \dots, x'_1 + h, \dots, x'_n)$$

- si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{++}^n)$ on définit $\tau_h T$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n), \langle \tau_h T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle T, \tau_h \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

Nous choisissons h_0 tel que, pour $|h| < h_0$, les fonctions intervenant dans la suite garde leur support dans $O' \cap \overline{\mathbb{R}_{++}^n}$ et nous montrons le :

Lemme 3.2.

Pour $h \neq 0$, $|h| < h_0$, $\sqrt{xy} \frac{\tau_h v - v}{h}$ est dans $V(\mathbb{R}_{++}^n)$

Puisque $v = \widetilde{\zeta u \circ \theta^{-1}}$ est à support compact dans $\mathbb{R}_{++}^n$, on a :

$$\sqrt{xy} (\sqrt{xy} v) \in L^2(\mathbb{R}_{++}^n)$$

$$\sqrt{xy} D(\sqrt{xy} v) = xy D v \in L^2(\mathbb{R}_{++}^n) \text{ pour } D \text{ dérivée tangentielle}$$

$$\sqrt{xy} D_x (\sqrt{xy} v) = xy D_x v + \frac{y}{2} v \in L^2(\mathbb{R}_{++}^n)$$

et d'après le choix de h_0 on a les mêmes propriétés pour $\tau_h v$, d'où le lemme. ~~ex~~

Dans $\overline{\Omega} \cap O$, $\tau_h v$ désigne le prolongement par zéro hors de $\overline{\Omega} \cap O$ de $(\tau_h \widetilde{v \circ \theta^{-1}}) \circ \theta$, on a alors :

$\sqrt{xy} \frac{\tau_h v - v}{h}$ est dans $\mathcal{V}(\Omega)$, et puisque A est un isomorphisme de (Ω) sur $\mathcal{V}(\Omega)$:

$$\left| \sqrt{xy} \frac{\tau_h v - v}{h} \right|_{\mathcal{V}(\Omega)} \leq C \left| A \left(\sqrt{xy} \frac{\tau_h v - v}{h} \right) \right|_{\mathcal{V}(\Omega)}$$

ce qui donne dans $\overline{\mathbb{R}_{++}^n} \cap O'$:

$$\left| \sqrt{xy} \frac{\tau_h^{v-v}}{h} \right|_{V(\mathbb{R}_{++}^n)} \leq C \left| A'(\sqrt{xy} \frac{\tau_h^{v-v}}{h}) \right|_{V'(\mathbb{R}_{++}^n)}$$

avec :

$$A' = \sum_{\substack{|i| \leq 1 \\ |j| \leq 1}} D^j a'_{ij}(x, y, x') xy D^i$$

(pour définir les coefficients a'_{ij} on remplace $a_{\alpha\beta}$ par $\chi a_{\alpha\beta}$ avec $\text{supp } \chi \subset 0$ et $\chi \zeta = \zeta$).

Supposons démontré pour l'instant que :

$$\left| A'(\sqrt{xy} \frac{\tau_h^{v-v}}{h}) \right|_{V'(\mathbb{R}_{++}^n)} \text{ reste borné pour } h \neq 0, |h| \leq h_0.$$

Puisque $V(\mathbb{R}_{++}^n)$ est un espace de Hilbert, la boule unité de $V(\mathbb{R}_{++}^n)$ est faiblement compacte et il existe donc une suite h_n de limite zéro, $|h_n| \leq h_0$, telle que :

$$xy \frac{\tau_{h_n}^{v-v}}{h_n} \text{ converge faiblement vers } w \in V(\mathbb{R}_{++}^n).$$

Mais, d'autre part, $\sqrt{xy} \frac{\tau_h^{v-v}}{h}$ tend vers $\sqrt{xy} D v$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_{++}^n)$ quand h tend vers zéro. On déduit donc :

$$\sqrt{xy} D(\zeta u) \in V(\mathbb{R}_{++}^n) \text{ donc la proposition 3.2.}$$

Il reste à démontrer que :

$$\left| A'(\sqrt{xy} \frac{\tau_h^{v-v}}{h}) \right|_{V'(\mathbb{R}_{++}^n)} \text{ reste borné pour } h \neq 0, |h| < h_0.$$

Nous introduisons :

$$\tau_h A' = \sum_{\substack{|i| \leq 1 \\ |j| \leq 1}} D^j (\tau_h a'_{ij}) xy D^i$$

et on a :

$$\begin{aligned} A'(\sqrt{xy} \frac{\tau_h^{v-v}}{h}) &= h^{-1} (A' - \tau_h A') (\sqrt{xy} \tau_h v) + \\ &+ h^{-1} \sqrt{xy} (\tau_h A' \tau_h v - A' v) + h^{-1} [\tau_h A', \sqrt{xy}] (\tau_h v - v) \\ &+ h^{-1} [\tau_h A' - A', \sqrt{xy}] v \end{aligned}$$

Nous majorons séparément chacun des termes de cette expression dans les quatre lemmes qui suivent.

Lemme 3.3.

$$\left| \frac{A' - \tau_h A'}{h} \sqrt{xy} \tau_h v \right|_{V'(\mathbb{R}_{++}^n)} \text{ reste borné pour } h \neq 0, |h| < h_0.$$

Puisque $\sqrt{xy} \tau_h v$ est dans $V(\mathbb{R}_{++}^n)$, on a bien :

$$h^{-1} (A' - \tau_h A') \sqrt{xy} \tau_h v \in V'(\mathbb{R}_{++}^n).$$

On majore la norme de $V'(\mathbb{R}_{++}^n)$ par une somme de termes de la forme :

$$\begin{aligned} &|D^j xy \frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h} D^i (\sqrt{xy} \tau_h v)|_{V'(\mathbb{R}_{++}^n)} \\ &= \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n) \\ |\varphi|_{\sqrt{\cdot}} \leq 1}} \left| \langle D^j xy \frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h} D^i \sqrt{xy} \tau_h v, \varphi \rangle_{V' \times V} \right| \\ &= \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n) \\ |\varphi|_{\sqrt{\cdot}} \leq 1}} \left| \langle \sqrt{xy} D^i \sqrt{xy} \tau_h v, \sqrt{xy} \frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h} D^j \varphi \rangle_{L^2} \right| \\ &\leq C |\sqrt{xy} \tau_h v|_V \leq C |v|_V. \quad \square \end{aligned}$$

Lemme 3.4.

$$\left| \sqrt{xy} \frac{\tau_h A' \tau_h v - A' v}{h} \right|_{V'} = \left| \sqrt{xy} \frac{\tau_h g - g}{h} \right|_{V'}, \text{ reste borné pour}$$

$h \neq 0, |h| < h_0.$

En effet :

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{xy} \frac{\tau_h g - g}{h} \right|_{V'} &= \sup_{\substack{\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n) \\ |\psi|_{V'} \leq 1}} \left| \left\langle \sqrt{xy} \frac{\tau_h g - g}{h}, \psi \right\rangle_{V' \times V'} \right| \\ &= \sup_{\substack{\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n) \\ |\psi|_{V'} \leq 1}} \left| \left\langle g, \sqrt{xy} \frac{\tau_h \psi - \psi}{h} \right\rangle_{L^2} \right| \\ &\leq \|g\|_{L^2} \sup_{\substack{\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n) \\ |\psi|_{V'} \leq 1}} \left| \sqrt{xy} \frac{\tau_h \psi - \psi}{h} \right|_{L^2} \leq C \|g\|_{L^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Lemme 3.5.

$$|h^{-1} [\tau_h A', \sqrt{xy}] (\tau_h v - v)|_{V'}, \text{ reste borné pour } h \neq 0, |h| < h_0.$$

Exprimons $[A', \sqrt{xy}]$ en posant $A' = \sum D^j a'_{ij} xy D^i = A^{ij}$. Si D^i et D^j sont distincts de $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{1}{j} \frac{\partial}{\partial y}$ alors :

$$[A^{ij}, \sqrt{xy}] = 0$$

Etudions le cas où D^i et D^j sont deux dérivées normales, prenons par exemple $D^i = D^j = D_x$:

$$[A^{ij}, \sqrt{xy}] = + D_x a'_{ij} xy \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} a'_{ij} xy D_x$$

et nous majorons séparément les deux termes :

$$\begin{aligned}
 1^\circ) & \left| h^{-1} D_x (\tau_h a'_{ij}) xy \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} (\tau_h^{V-V}) \right|_{V'} = \\
 & \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n) \\ |\varphi|_{V'} \leq 1}} \left| \langle D_x (\tau_h a'_{ij}) \sqrt{xy} \frac{\sqrt{y}}{2} \frac{\tau_h^{V-V}}{h}, \varphi \rangle_{V' \times V} \right| \leq \\
 & C \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n) \\ |\varphi|_{V'} \leq 1}} \left| \langle y \frac{\tau_h^{V-V}}{h}, \sqrt{xy} D_x \varphi \rangle_{L^2} \right| \leq \\
 & C \left| y \frac{\tau_h^{V-V}}{h} \right|_{L^2} \leq C |(x^2 + y^2)^{1/2} D \varphi|_{L^2}
 \end{aligned}$$

La dernière expression est bornée d'après la proposition 3.1.

$$\begin{aligned}
 2^\circ) & \left| \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} (\tau_h a'_{ij}) xy D_x \frac{\tau_h^{V-V}}{h} \right|_{V'} \\
 & = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n) \\ |\varphi|_{V'} \leq 1}} \left| \langle \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} (\tau_h a'_{ij}) xy D_x \frac{\tau_h^{V-V}}{h}, \varphi \rangle_{V' \times V} \right| \\
 & \leq C \sup \left| \langle \sqrt{xy} \sqrt{y} D_x \frac{\tau_h^{V-V}}{h}, \sqrt{y} \tau_h a'_{ij} \varphi \rangle_{L^2} \right| \\
 & = C \sup \left| \langle \sqrt{xy} \sqrt{y} T_{-1/2} D_x \frac{\tau_h^{V-V}}{h}, \sqrt{y} T_{1/2} \tau_h a'_{ij} \varphi \rangle_{L^2} \right| \\
 & \leq C \sup \left| \sqrt{xy} (x^2 + y^2)^{1/4} T_{-1/2} D_x \frac{h^{V-V}}{h} \right|_0 \left| (x^2 + y^2)^{1/4} T_{1/2} (\tau_h a'_{ij}) \varphi \right|_0
 \end{aligned}$$

Par la proposition 1.3 :

$$|(x^2+y^2)^{1/2} T_{-1/2} (\tau_h a'_{ij}) \varphi|_0 \leq C |(\tau_h a_{ij})|_V \leq C |\varphi|_V \quad \text{donc :}$$

$$\left| \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} (\tau_h a'_{ij}) xy D_x \frac{\tau_h^{V-V}}{h} \right|_V,$$

$$C |\sqrt{xy} (x^2+y^2)^{1/4} T_{-1/2} D_x \frac{\tau_h^{V-V}}{h}|_0$$

Reste à montrer que cette dernière quantité est bornée indépendamment de h :

$$|\sqrt{xy} (x^2+y^2)^{1/4} T_{-1/2} D_x \frac{\tau_h^{V-V}}{h}|_0 \leq$$

$$\underbrace{|\sqrt{xy} T_{-1/2} D_x (x^2+y^2)^{1/4} \frac{\tau_h^{V-V}}{h}|_0}_L + \underbrace{|\sqrt{xy} \frac{x}{2(x^2+y^2)^{3/4}} T_{-1/2} \frac{\tau_h^{V-V}}{h}|_0}_M$$

Majorons L :

$$L^2 = \int_{\mathbb{R}_{++}^n} xy (1+|\xi|^2)^{-1/2} \frac{|e^{ih\xi_1-1}|^2}{h} |D_x (x^2+y^2)^{1/4} \hat{\varphi}|^2 dx dy d\xi$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}_{++}^n} xy (1+|\xi|^2)^{1/2} |D_x (x^2+y^2)^{1/4} \hat{\varphi}|^2 dx dy d\xi$$

$$= C |\sqrt{xy} D_x (x^2+y^2)^{1/4} T_{1/2} \varphi|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^n)}^2 \quad \text{donc :}$$

$$L \leq C |(x^2+y^2)^{1/4} T_{1/2} \varphi|_V$$

quantité bornée d'après la proposition 3.1.

Pour M on a immédiatement :

$$M \leq C |(x^2 + y^2)^{1/4} \tau_{1/2} v|_0 \quad \text{donc}$$

$$M \leq C |v|_V \quad \text{par la proposition 1.3.}$$

Les autres termes intervenant dans

$$h^{-1} [\tau_h A', \sqrt{xy}] (\tau_h v - v)$$

contiennent une dérivée normale, ou une dérivée normale et une dérivée tangentielle, et se majorent de façon plus simple. Le lemme 3.5 apparaît donc comme une conséquence de la proposition 3.1. ~~□~~

Lemme 3.6.

$$|h^{-1} [\tau_h A' - A', \sqrt{xy}] v|_V, \text{ reste borné pour } h \neq 0, |h| < h_0.$$

Etudions un terme dans lequel interviennent deux dérivées normales, par exemple :

$$\begin{aligned} & h^{-1} [D_x \{ (\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}) xy D_x \}, \sqrt{xy}] v = \\ & D_x \frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h} xy \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} v + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h} xy D_x v \end{aligned}$$

Nous majorons séparément les deux termes de droite :

$$1^\circ) |D_x \frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h} \sqrt{xy} \frac{y}{2} v|_V \leq$$

$$C \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n) \\ |\varphi|_V \leq 1}} \left| \left\langle \frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h} y v, \sqrt{xy} D_x \varphi \right\rangle_{L^2} \right|$$

$$\leq C |v|_{L^2}$$

$$\begin{aligned}
 2^o) & \left| \frac{\tau_{h^{a'_{ij}} - a'_{ij}}}{h} \sqrt{xy} \frac{\sqrt{y}}{2} D_x v \right|_V \leq \\
 & \leq C \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^n) \\ |\varphi|_V \leq 1}} \left| \langle y \frac{\tau_{h^{a'_{ij}} - a'_{ij}}}{h} \sqrt{xy} D_x v, \varphi \rangle_{L^2} \right| \\
 & \leq C \left| \sqrt{xy} D_x v \right|_{L^2} \leq C \|v\|_V
 \end{aligned}$$

les autres termes se majorant de façon analogue. $\square$

Tirons les conséquences des propositions 3.1 et 3.2 :

Proposition 3.3.

Si $f \in L^2(\Omega)$, la solution u du problème (2.3) vérifie :

1°) $(x^2 + y^2)^{1/2} D \zeta u \in L^2(\mathbb{R}_{++}^n)$ où D est une dérivée tangentielle quelconque.

2°) $xy D^\alpha \zeta u \in L^2(\mathbb{R}_{++}^n)$ avec $|\alpha| = 2$ et D^α contient au plus une dérivée normale.

Le 1° est conséquence de la proposition 3.1.

Pour le 2°, si D_1 et D_2 sont deux dérivées tangentielles :

$$xy D_1 D_2 \zeta u = \sqrt{xy} D_1 (\sqrt{xy} D_2 \zeta u) \in L^2(\mathbb{R}_{++}^n)$$

Si D est une dérivée tangentielle :

$$xy D_x D(\zeta u) = \sqrt{xy} D_x (\sqrt{xy} D \zeta u) - \frac{y}{2} D \zeta u \in L^2(\mathbb{R}_{++}^n)$$

d'après les propositions 3.1 et 3.2.

En conclusion, par $\zeta u \circ \theta^{-1} \in V(\mathbb{R}_{++}^n)$ et la proposition 3.3, on

obtient :

$$\sum_{\substack{|i|=1 \\ |j|=1}} D^j a'_{ij}(x,y,x') \quad xy \quad D^1 \zeta \quad u \circ \theta^{-1} \in L^2(\mathbb{R}_{++}^n)$$

où D^j et D^1 désignent seulement les dérivées normales. On est donc ramené à une équation aux dérivées partielles d'ordre 2, en deux variables (x,y) . Nous étudions dans IV un problème dégénéré dans $\mathbb{R}_{++}^2$ qui nous permettra d'obtenir la régularité pour les variables normales.

IV - Régularité - Cas des variables normales.

Nous commençons par étudier un problème elliptique dégénéré dans l'ouvert non borné $\mathbb{R}_{++}^2$:

$$\mathbb{R}_{++}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 ; y > 0 \}.$$

On notera aussi :

$$\mathcal{D} = \{(s,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$$

$$D_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad ; \quad D_y = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\delta_s = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial s} \quad ; \quad \delta_\theta = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Le schéma de l'étude est le même qu'au II ; on ramènera le problème dans $\mathbb{R}_{++}^2$ à un problème dans $\mathcal{D}$ par un changement de variables du type :

$$x = e^{-s} \cos \theta, \quad y = e^{-s} \sin \theta.$$

Introduisons les espaces :

Définition 4.1.

$$V_1(\mathbb{R}_{++}^2) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}_{++}^2) \mid \begin{aligned} & \sqrt{xy} D_x u \in L^2(\mathbb{R}_{++}^2) ; \\ & \sqrt{xy} D_y u \in L^2(\mathbb{R}_{++}^2) \end{aligned} \right\}$$

$$W(\mathbb{D}) = \left\{ v \in L^2(\mathbb{D}) \mid \begin{aligned} & \sqrt{\sin\theta \cos\theta} \delta_s v \in L^2(\mathbb{D}) ; \\ & \sqrt{\sin\theta \cos\theta} \delta_\theta v \in L^2(\mathbb{D}) \end{aligned} \right\}$$

et on a immédiatement :

les espaces V_1 et W sont des espaces de Hilbert pour les normes respectives :

$$|u|_{V_1} = (|u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)}^2 + |\sqrt{xy} D_x u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)}^2 + |\sqrt{xy} D_y u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)}^2)^{1/2}$$

$$|v|_W = (|v|_{L^2(\mathbb{D})}^2 + |\sqrt{\sin\theta \cos\theta} \delta_s v|_{L^2(\mathbb{D})}^2 + |\sqrt{\sin\theta \cos\theta} \delta_\theta v|_{L^2(\mathbb{D})}^2)^{1/2}$$

Par une démonstration analogue à celle de la proposition 1.1, on obtient :

Proposition 4.1.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}_{++}^2)$ est dense dans V_1 .

$\mathcal{D}(\mathbb{D})$ est dense dans W .

Les espaces V_1 et W sont liés par :

Proposition 4.2.

$$\text{Si on pose : } \begin{cases} x = e^{-s} \cos\theta & ; y = e^{-s} \sin\theta \\ u(x,y) = e^s v(s,\theta) \end{cases}$$

alors u est dans V_1 si et seulement si v est dans W .

Ce résultat s'obtient par des calculs élémentaires dont nous donnons les grandes lignes. Des formules :

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -e^{-s} \cos \theta \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -e^{-s} \sin \theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = -e^{-s} \sin \theta \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = e^s \cos \theta$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -e^s \cos \theta \quad \frac{\partial s}{\partial y} = -e^s \sin \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -e^s \sin \theta \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = e^s \cos \theta$$

on tire immédiatement :

$$|D_x u|^2 + |D_y u|^2 = e^{4s} (|v + \delta_s v|^2 + |\delta_\theta v|^2)$$

$$|\delta_s v|^2 + |\delta_\theta v|^2 = e^{-2s} |u|^2 + e^{-4s} (|D_x u|^2 + |D_y u|^2) +$$

$$+ 2 e^{-3s} \operatorname{Re}(u D_x u \cos \theta + u D_y u \sin \theta).$$

Remarquons que, si $f \in L^2(\mathbb{R}_{++}^2)$ alors $e^{-2s} f \in L^2(\mathfrak{B})$ et

$$\int_{\mathbb{R}_{++}^2} f(x,y) dx dy = \int_{\mathfrak{B}} e^{-2s} f(s,\theta) ds d\theta.$$

Ceci montre que :

$$\int_{\mathbb{R}_{++}^2} u^2 dx dy = \int_{\mathfrak{B}} |v|^2 ds d\theta$$

donc $u \in L^2(\mathbb{R}_{++}^2)$ si et seulement si $v \in L^2(\mathfrak{B})$.

Nous avons ensuite :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_{++}^2} xy (|D_x u|^2 + |D_y u|^2) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{S}} \sin \theta \cos \theta (|v|^2 + |\delta_s v|^2 + |\delta_\theta v|^2 + 2 \operatorname{Re} v \delta_s v) ds d\theta \\ &\leq C |v|_W^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}} \sin \theta \cos \theta (|\delta_s v|^2 + |\delta_\theta v|^2) ds d\theta = \\ & \int_{\mathbb{R}_{++}^2} \sin \theta \cos \theta |u|^2 dx dy + \int_{\mathbb{R}_{++}^2} xy (|D_x u|^2 + |D_y u|^2) dx dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}_{++}^2} 2 \operatorname{Re} e^{-s} \sin \theta \cos \theta u ((D_x u) \cos \theta + (D_y u) \sin \theta) dx dy \\ &\leq C |u|_{V_1}^2. \end{aligned}$$

Introduisons maintenant le :

Problème variationnel.

Pour u_1 et u_2 dans V_1 on considère la forme intégral-différentiel-
le :

$$\begin{aligned} a(u_1, u_2) = & \int_{\mathbb{R}_{++}^2} \sum_{|i|=|j|=1} a_{ij}(x,y) xy D^i u_1 \overline{D^j u_2} dx dy + \\ & + \int_{\mathbb{R}_{++}^2} a_0 u_1 \overline{u_2} dx dy \end{aligned}$$

avec $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}_{++}^2) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_{++}^2)$, ce qui assure la continuité de a sur $V_1 \times V_1$.

On suppose que a est V_1 -coercitive, c'est-à-dire :

$\exists \alpha > 0$ tel que, $\forall u \in V_1$ on ait $\operatorname{Re} a(u, u) \geq \alpha |u|_{V_1}^2$

et on désigne par A l'opérateur différentiel associé à a :

$$A = \sum_{|i|=|j|=1} D^j a_{ij}(x, y) x y D^i + a_0 I \quad (4.1)$$

Le lemme de Lax Milgram fournit la :

Proposition 4.3.

Pour tout f dans V_1' , il existe une unique u dans V_1 tel que :

$$a(u, v) = (f, v)_{V_1' \times V_1} \text{ pour tout } v \text{ dans } V_1. \quad (4.2)$$

Nous nous intéressons à la régularité sur la solution u quand f est dans $L^2(\mathbb{R}_{++}^2)$. On suppose que :

$$\begin{cases} a_0 \text{ est une constante positive} \\ a_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}_{++}^2}) \text{ vérifie } a_{ij}(x, y) = a_{ij}(0, 0) \text{ pour } x^2 + y^2 \geq R^2, \end{cases}$$

En d'autres termes, les coefficients de A sont "variables au voisinage de $(0, 0)$ ". Nous transformons le problème dans $\mathbb{R}_{++}^2$ en un nouveau problème dans $\mathcal{B}$, ce dernier sera voisin de celui étudié dans [2]. L'intérêt de la transformation est de permettre l'utilisation de transformations de Fourier suivant la variable tangentielle s .

Proposition 4.4.

La transformation utilisée à la proposition 4.2 transforme

$$a(u_1, u_2) = (f, u_2)_{L^2} ; u_1 \in V_1 ; f \in L^2(\mathbb{R}_{++}^2) \text{ en :}$$

$$b(v_1, v_2) = (g, v_2)_{L^2(\mathcal{B})} ; v_1 = e^{-s} u_1 \in W ;$$

$$g = e^{-s} f \in L^2(\mathcal{B}) \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} b(v_1, v_2) &= \int_{\mathcal{B}} \sum_{\substack{|i| \leq 1 \\ |j| \leq 1}} b_{ij}(s, \theta) \sin \theta \cos \theta \delta^i v_1 \overline{\delta^j v_2} ds d\theta \\ &+ \int_{\mathcal{B}} a_0 v_1 \overline{v_2} ds d\theta. \end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned} a(u_1, u_2) &= \int_{\mathbb{R}_{++}^2} \sum_{|i|=|j|=1} a_{ij}(x, y)_{xy} D^i u_1 \overline{D^j u_2} dx dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}_{++}^2} a_0 u_1 \overline{u_2} dx dy \\ &= \int_{\mathcal{B}} \sum_{\substack{|i| \leq 1 \\ |j| \leq 1}} b_{ij}(s, \theta) \sin \theta \cos \theta \delta^i v_1 \overline{\delta^j v_2} ds d\theta \\ &+ a_0 \int_{\mathcal{B}} v_1 \overline{v_2} dx d\theta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (f, u_2)_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)} &= \int_{\mathbb{R}_{++}^2} f \overline{u_2} dx dy = \int_{\mathcal{B}} e^{-s} f \overline{v_2} ds d\theta \\ &= (g, v_2)_{L^2(\mathcal{B})} \cdot \boxed{} \end{aligned}$$

Précisons les propriétés de b :

Propriétés 4.

1°) Pour chaque couple d'indices (i,j) il existe une fonction $\beta_{ij}(\theta) \in C^\infty(0, \frac{\pi}{2})$ telle que :

$$b_{ij} - \beta_{ij} \in C^\infty(0, \frac{\pi}{2} ; \mathcal{Y}(R_s))$$

2°) La forme b est W-coercitive.

1°) Puisque a ne contient que des termes d'ordre 0 ou des termes d'ordre 2, $b_{ij}(s, \theta)$ se présente comme une combinaison linéaire des $a_{ij}(s, \theta)$ à coefficients des polynômes en $\sin \theta$, $\cos \theta$ donc :

$$b_{ij}(s, \theta) \longrightarrow \beta_{ij}(\theta) \text{ quand } s \longrightarrow \pm \infty \text{ puisque}$$

$$a_{ij}(x, y) = a_{ij}(0, 0) \text{ pour } x^2 + y^2 \geq R^2.$$

Il est évident que $\beta_{ij} \in C^\infty(0, \frac{\pi}{2})$; reste à vérifier que

$$b_{ij} - \beta_{ij} \in C^\infty(0, \frac{\pi}{2} ; \mathcal{Y}(\mathbb{R}_s)).$$

$$\text{Pour } s \leq -\log R, \quad b_{ij}(s, \theta) - \beta_{ij}(\theta) = 0$$

Pour s tendant vers $+\infty$, pour tout couple m, n

$$s^m \delta_s^n (b_{ij}(s, \theta) - \beta_{ij}(\theta)) \text{ tend vers zéro.}$$

En effet pour $n = 0$

$$s^m (a_{ij}(e^{-s} \cos \theta, e^{-s} \sin \theta) - a_{ij}(0, 0)) \text{ se comporte}$$

comme $(-\text{Log } r)^m \times r$ avec r tendant vers 0 et pour $n = 1$

$$\begin{aligned} s^m \delta_s(a_{ij}(e^{-s} \cos \theta, e^{-s} \sin \theta) - a_{ij}(0,0)) = \\ = -s^m e^{-s} (D_x a_{ij} \cos \theta + D_y a_{ij} \sin \theta) \text{ tend vers zéro} \end{aligned}$$

quand s tend vers $+\infty$. Il en est de même pour $n \geq 1$.

2°) A la proposition 4.2, on a montré que :

$$|v|_W \leq C |u|_{V_1}.$$

Pour tout v dans W on a donc :

$$\text{Re } b(v,v) = \text{Re } a(u,u) \geq \alpha |u|_{V_1}^2 \geq \frac{\alpha}{C} |v|_W^2.$$

Pour le problème dans $\mathcal{B}$ nous avons alors :

Proposition 4.5.

Pour tout g dans W' il existe un élément unique v dans W tel que :

$$b(v,w) = (g,w)_{W',W} \text{ pour tout } g \in W' \quad (4.3)$$

Si de plus g est dans $L^2(\mathcal{B})$ alors :

$$v \in H^1(\mathcal{B}) \text{ et } \sin \theta \cos \theta v \in H^2(\mathcal{B})$$

Comme au III nous utilisons une régularisation elliptique. La démonstration, à quelques détails près, est la même que dans [2]. Nous avons les inclusions d'espaces :

$$H_0^1(\mathcal{B}) \hookrightarrow W(\mathcal{B}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{B})$$

avec densité

Soit ϵ_j une suite de nombres positifs de limite zéro, on pose :

$$b_j(v, w) = b(v, w) + \epsilon_j(v, w)_1$$

alors $b_j(v, w)$ est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ coercitive. Soit ensuite g_j une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ de limite g dans $L^2(\Omega)$, alors la solution v_j du problème variationnel :

$$b_j(v, w) = (g_j, w) \text{ pour tout } w \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega)$$

appartient à $\bigcap_{k \geq 0} H^k(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ et de plus :

$$\sqrt{\epsilon_j} \|v_j\|_1 \text{ et } \|v_j\|_w \text{ sont bornées quand } j \text{ varie.}$$

On sait aussi que la solution v du problème (4.3) est limite faible dans W d'une sous-suite extraite de v_j .

Donnons le schéma de la démonstration de la régularité :

1°) Pour $v(s, \theta)$ distribution dans $\mathcal{D}$, tempérée en s , on note $\hat{v}(\xi, \theta)$ la transformée de Fourier partielle en s , et on introduit l'opérateur T_r ($r \in \mathbb{R}$) par :

$$\widehat{T_r v}(\xi, \theta) = (1 + |\xi|^2)^{r/2} \hat{v}(\xi, \theta)$$

Alors si $b(s, \theta)$ est une fonction $C^\infty(\mathbb{R} \times [0, \frac{\pi}{2}])$ telle qu'il existe $\beta(\theta) \in C^\infty[0, \frac{\pi}{2}]$ qui assure :

$$s \longrightarrow b(s, \theta) - \beta(\theta) \text{ est une fonction de } \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

on a :

l'application $v \longrightarrow [b, T_{1/2}]v$ est continue de :

$$L^2(0, \frac{\pi}{2} ; H^s(\mathbb{R})) \text{ dans } L^2(0, \frac{\pi}{2} ; H^{s-1/2+1}(\mathbb{R})) \quad (\text{voir [7]})$$

Ces remarques conduisent au premier résultat :

$$T_{1/2} v \in W$$

puis, comme $W \hookrightarrow L^2(0, \frac{\pi}{2} ; H^{1/2}(\mathbb{R}_s))$ (voir [2] et le rappel donné au I)

$$\delta_s v \in L^2(\mathbb{B})$$

2°) on démontre que : $\sqrt{\sin \theta \cos \theta} \delta_s v \in W$ qui fournit

$$\sin \theta \cos \theta \delta_s^2 v \in L^2(\mathbb{B})$$

$$\sin \theta \cos \theta \delta_\theta \delta_s v \in L^2(\mathbb{B})$$

3°) En reportant ces résultats dans l'équation $B v = g$ (B opérateur associé à b) et en tenant compte de $v \in W$ on obtient

$$\delta_\theta (\sin \theta \cos \theta \delta_\theta v) \in L^2(\mathbb{B})$$

L'application du théorème de Hardy donne alors :

$$\delta_\theta v \in L^2(\mathbb{B}) \text{ puis}$$

$$\sin \theta \cos \theta \delta_\theta^2 v \in L^2(\mathbb{B}).$$

L'expression $\sin \theta \cos \theta$ restant bornée sur l'ouvert (non borné) $\mathbb{B}$, on obtient bien en définitive :

$$v \in H^1(\mathbb{B}) \text{ et } \sin \theta \cos \theta v \in H^2(\mathbb{B}). \quad \square$$

Tirons les conséquences de ce résultat pour le problème dans $\mathbb{R}_{++}^2$:

Proposition 4.5:

Si $f \in L^2(\mathbb{R}_{++}^2)$, la solution $u \in V_1$ du problème (4.2) vérifie :

$$\sqrt{x^2+y^2} D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}_{++}^2) ; |\alpha| = 1 \quad (i)$$

$$xy D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}_{++}^2) ; |\alpha| = 2 \quad (ii)$$

En effet, pour (i) nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_{++}^2} (x^2+y^2) (|D_x u|^2 + |D_y u|^2) dx dy = \\ \int_{\mathcal{B}} (|v + \delta_s v|^2 + |\delta_\theta v|^2) ds d\theta \leq C |v|_{H^1(\mathcal{B})}^2 \end{aligned}$$

Pour (ii), pour $|\alpha| = 2$, on a :

$$D^\alpha u = \left(\sum_{|\beta| \leq 2} a_\beta \delta^\beta v \right) e^{3s} \text{ avec } a_\beta \text{ fonctions } C^\infty \text{ bornées dans } \mathcal{B},$$

qui donne :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_{++}^2} x^2 y^2 |D^\alpha u|^2 dx dy = \\ \int_{\mathcal{B}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left| \sum_{|\beta| \leq 2} a_\beta \delta^\beta v \right|^2 ds d\theta \leq C |\sin \theta \cos \theta v|_{H^2(\mathcal{B})}^2 \quad \square \end{aligned}$$

Pour conclure cette étude, introduisons :

Définition 4.2.

$$\begin{aligned} S(\mathbb{R}_{++}^2) = \{ u \in L^2(\mathbb{R}_{++}^2) \mid \sqrt{x^2+y^2} D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}_{++}^2) ; |\alpha| = 1 - \\ xy D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}_{++}^2) ; |\alpha| = 2 \quad . \end{aligned}$$

S est un espace de Hilbert pour la norme :

$$|u|_S = \left(|u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)}^2 + \sum_{|\alpha| \leq 1} |\sqrt{x^2+y^2} D^\alpha u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)}^2 + \sum_{|\alpha| \geq 2} |xy D^\alpha u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)}^2 \right)^{1/2}$$

et nous avons :

THEOREME 2.

L'opérateur A défini par (4.1) est un isomorphisme topologique de S sur $L^2(\mathbb{R}_{++}^2)$.

Vérifions que A est linéaire continu de S dans $L^2(\mathbb{R}_{++}^2)$. En effet, pour u dans S, on a :

$$|Au|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)} \leq a_0 |u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)} + \sum_{|i|=|j|=1} |D^j a_{ij} xy D^i u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)}$$

Considérons un terme de la somme ci-dessus, par exemple,

$$\begin{aligned} |D_x a_{ij} xy D_x u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)} &\leq |(D_x a_{ij}) xy D_x u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)} + \\ &+ |a_{ij} y D_x u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)} + |a_{ij} xy D_x^2 u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)} \end{aligned}$$

Puisque $D_x a_{ij} = 0$ pour $x^2+y^2 \geq R^2$ on a :

$$|D_x a_{ij} xy D_x u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)} \leq C |u|_S.$$

La proposition 4.5' montre que A est **surjectif** et le théorème est alors une conséquence du théorème de Banach.

Application à la régularité pour les variables normales.

Au III, nous avons vu que, dans la carte locale $(0, \theta)$ on a :

$$\zeta u \circ \theta^{-1} \in V(\mathbb{R}_{++}^n)$$

$$\sum_{\substack{|i|=1 \\ |j|=1}} D^j a'_{ij}(x, y, x') xy D^i \zeta u \circ \theta^{-1} \in L^2(\mathbb{R}_{++}^n)$$

où D^j et D^i désignent les dérivées normales.

De plus l'hypothèse (2.4) entraîne que :

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } , \forall (x, y, x') \in O' \cap \overline{\mathbb{R}_{++}^n}, \forall \xi \in \mathbb{C}^2 : \quad (4.4)$$

$$\operatorname{Re} \sum_{|i|=|j|=1} a'_{ij}(x, y, x') \xi^i \bar{\xi}^j \geq \delta |\xi|^2$$

Lemme 4.1.

Il existe un "prolongement" des a'_{ij} à $\mathbb{R}_{++}^n$ tel que l'hypothèse (4.4) soit conservée.

Soient O'_1 et O'_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^{n-2}$ respectivement, tels que

$$O'_1 \times O'_2 \subset \subset O'$$

et supposons que :

$$\operatorname{supp} \zeta u \circ \theta^{-1} \subset O'_1 \times O'_2 .$$

On choisit d'abord deux fonctions φ_1 et ψ_1 dans $C(\overline{\mathbb{R}_{++}^2})$ telles que :

$$0 \leq \varphi_1 \leq 1 ; 0 \leq \psi_1 \leq 1 ; \varphi_1 + \psi_1 = 1 ; \operatorname{supp} \varphi_1 \subset O'_1 ;$$

$$\operatorname{supp} \zeta u \circ \theta^{-1} \subset (\operatorname{supp} \varphi_1) \times O'_2 ; \varphi_1 = 1 \text{ sur } \operatorname{supp} \zeta u \circ \theta^{-1} .$$

Nous définissons alors a''_{ij} sur $\mathbb{R}_{++}^2 \times O'_2$ par :

$$a''_{ij}(x, y, x') = \varphi_1(x, y) a'_{ij}(x, y, x') + \Psi_1(x, y) a'_{ij}(0, 0, x')$$

On choisit ensuite deux fonctions φ_2 et Ψ_2 dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-2})$ telles que :

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi_2 \leq 1 ; 0 \leq \Psi_2 \leq 1 ; \varphi_2 + \Psi_2 &= 1 ; \text{supp } \varphi_2 \subset O'_2 ; \\ \text{supp } \zeta \cup \theta^{-1} &\subset O'_1 \times (\text{supp } \varphi_2) ; \varphi_2 = 1 \text{ sur } \text{supp } \zeta \cup \theta^{-1}. \end{aligned}$$

On pose alors :

$$\widetilde{a}_{ij}(x, y, x') = \varphi_2(x') a''(x, y, x') + \Psi_2(x') a''(x, y, 0).$$

On vérifie immédiatement que, pour tout $(x, y, x') \in \overline{\mathbb{R}_{++}^n}$ et $\xi \in \mathbb{C}^2$:

$$\text{Re} \sum_{|i|=|j|=1} (x, y, x') \xi^i \overline{\xi^j} \geq |\xi|^2$$

Tirons les conséquences de ce lemme ; on pose :

$$\begin{aligned} a'_{x'}(u, v) &= \int_{\mathbb{R}_{++}^2} \sum_{|i|=|j|=1} \widetilde{a}_{ij}(x, y, x') xy D^i u \overline{D^j v} dx dy + \\ &+ a_0 \int_{\mathbb{R}_{++}^2} u \overline{v} dx dy \text{ avec } a_0 > 0 \end{aligned}$$

alors $a'_{x'}$ est continue sur $V_1(\mathbb{R}_{++}^2) \times V_1(\mathbb{R}_{++}^2)$ et le lemme 4.1 montre que $q'_{x'}$ est V_1 -coercitive. La continuité et la coercivité sont d'ailleurs uniformes en $x' \in \mathbb{R}^{n-2}$.

Nous terminons maintenant la démonstration de la régularité par :

Proposition 4.6.

Si $f \in L^2(\Omega)$, la solution u du problème (2.3) vérifie :

1°) $(x^2+y^2)^{1/2} D \zeta u \in L^2(\mathbb{R}_{++}^n)$ avec D dérivée normale.

2°) $xy D^\alpha \zeta u \in L^2(\mathbb{R}_{++}^n)$ avec $|\alpha| = 2$ et D^α formée de deux dérivées normales.

Désignons par A'_x , l'opérateur :

$$A'_x = A'_{x'}(x, y, D) = \sum_{|i|=|j|=1} D^j \widetilde{a'_{ij}}(x, y, x') D^i + a_0 I$$

Par le théorème 2, A'_x est un isomorphisme de S sur $L^2(\mathbb{R}_{++}^2)$, donc, il existe une constante $C(x')$ telle que, pour tout u dans S :

$$|u|_S \leq C(x') |A'_x, u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)}$$

Montrons que les constantes $C(x')$ sont bornées quand $x' \in \mathbb{R}^{n-2}$. Pour $u \in S$, $x'_0 \in \mathbb{R}^{n-2}$ on a

$$|A'_{x'_0}, u|_{L^2} \leq |(A'_{x'_0} - A'_{x'})u|_{L^2} + |A'_{x'}, u|_{L^2}$$

et, puisque les coefficients a'_{ij} sont de classe C^1 on a :

$$|(A'_{x'_0} - A'_{x'})u|_{L^2} \leq \varepsilon(|x' - x'_0|) |u|_S$$

avec $\varepsilon(|x' - x'_0|)$ tend vers zéro avec $|x - x'_0|$.

On a alors :

$$|u|_S \leq C(x'_0) \{ \varepsilon(|x' - x'_0|) |u|_S + |A'_{x'}, u|_{L^2} \}$$

et en choisissant $|x' - x_0|$ suffisamment petit pour que

$$\varepsilon(|x' - x_0|) \leq \frac{1}{2 C(x_0')} \quad \text{on obtient :}$$

$$|u|_S \leq 2 C(x_0') |A_{x'} u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)}.$$

En tenant compte du fait que $\widetilde{a_{ij}'}_{ij}$ est constant en dehors d'un compact, il vient :

il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout u dans S :

$$|u|_S \leq C |A_{x'} u|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)}$$

Pour la solution du problème (2.3) nous avons : pour presque tout $x' \in \mathbb{R}^{n-2}$:

$$\begin{cases} A_{x'}'(\zeta u \circ \theta^{-1}) \in L^2(\mathbb{R}_{++}^2) \\ \zeta u \circ \theta^{-1} \in V_1(\mathbb{R}_{++}^2) \end{cases}$$

ce qui montre donc que :

$$|\zeta u \circ \theta^{-1}|_{S(\mathbb{R}_{++}^2)} \leq C |A_{x'}'(\zeta u \circ \theta^{-1})|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)}$$

La proposition 4.6 s'obtient ensuite en élevant au carré et en intégrant sur $\mathbb{R}^{n-2}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.S. BAOUENDI - Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés.
Bull. Soc. Math. France. 95 (1967) 45-87.
- [2] M.S. BAOUENDI et C. GOULAQUIC - Etude de la régularité et du spectre
d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. C.R.A.S. Paris,
266(1968) 336-338.
- [3] P. GRISVARD - Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec
poids. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa - Série 3, 17 (1963) 255-296.
- [4] M. S. HANNA et K. T. SMITH - Some Remarks on the Dirichlet Problem
in Piecewise smooth domains . Com. on pure and App. Math.
20 (1967) 575-593.
- [5] B. HANOUZET - Régularité pour une classe d'opérateurs elliptiques
dégénérés du deuxième ordre. C.R.A.S.Paris, 268 (1969) 1177-1179.
- [6] J. L. LIONS et E. MAGENES - Problèmes aux limites non homogènes.
Dunod - Paris (1968).
- [7] J. J. KOHN et L. NIRENBERG - An Algebra of pseudo-differential opera-
tors. Comm. on pure and app. Math. 18 (1965) 269-305.
- [8] G. H. HARDY , J. E. LITTLEWOOD , G. POLYA - Inequalities.
Cambridge 1952.
- [9] J. CEA et C. GOULAQUIC - Cours d'Analyse fonctionnelle et numérique -
Faculté des Sciences de Rennes (1967-1968).