

J. F. NOURRIGAT

Un théorème de trace (par transformation de Fourier)

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 1

« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 8, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969__1_A8_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN THEOREME DE TRACE (par Transformation de Fourier)

par

J.F. NOURRIGAT

Soit X et Y deux espaces de Hilbert tels que $X \subset Y$, l'inclusion étant continue et X dense dans Y .

On se propose de démontrer que si l'on a :

$$(1) \begin{cases} u \in L^2(\mathbb{R}^+, X) \\ u^{(m)} \in \sum_{k=0}^{m-1} H^{-k} \left(\mathbb{R}^+, [X, Y]_{\frac{m-k}{m}} \right) \end{cases}$$

alors u a une trace dans $[X, Y]_{\frac{1}{2m}}$.

Ce résultat est une généralisation des théorèmes de trace de [1] ; il sert pour l'étude des traces de distributions de domaines d'opérateurs différentiels maximaux, dans le cas Hilbertien (cf. [2] où sont donnés un exemple d'application et une méthode de démonstration apparemment plus compliquée, mais valable dans "un cadre non hilbertien").

On désigne par $W(\mathbb{R}^+)$ l'espace des distributions à valeurs dans Y telles que les relations (1) soient vérifiées, muni de la norme :

$$\|u\|_{W(\mathbb{R}^+)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^+, X)} + \inf_{u^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} f_k} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|f_k\|_{H^{-k} \left(\mathbb{R}^+, [X, Y]_{\frac{m-k}{m}} \right)} \right).$$

On définit de même $W(\mathbb{R})$.

Proposition 1.

$\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}^+, X)$ est dense dans W .

Soit T une forme linéaire continue sur W telle que $T(u) = 0$ pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}^+, X)$. T peut s'écrire :

$$T(u) = \langle f, u \rangle_{L^2(X') \times L^2(X)} + \langle g, u^{(m)} \rangle_{F'_m \times F_m}, \text{ avec}$$

$$F_m = \sum_{k=0}^{m-1} H^{-k} \left(\mathbb{R}^+, [X, Y]_{\frac{m-k}{m}} \right)$$

$$F'_m = \bigcap_{k=0}^{m-1} H^k \left(\mathbb{R}^+, [X, Y]_{\frac{m-k}{m}} \right)$$

En prenant $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+, X)$ on voit que :

$$(-1)^m g^{(m)} + f = 0.$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} g \in L^2(Y') \\ g^{(k)} \in L^2\left([X, Y]_{\frac{m-k}{m}}\right) \text{ pour } 1 \leq k \leq m-1 \\ g^{(m)} \in L^2(X'). \end{cases}$$

En prenant u dans $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}^+, X)$ on voit que les traces de g jusqu'à l'ordre $m-1$ sont nulles. Il existe donc une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}^+, Y)$ telle que

$$\begin{aligned} \varphi_n &\rightarrow g \text{ dans } L^2(Y') \\ \varphi_n^{(k)} &\rightarrow g^{(k)} \text{ dans } L^2\left([X, Y]_{\frac{m-k}{m}}\right) \\ \varphi_n^{(m)} &\rightarrow g^{(m)} \text{ dans } L^2(X'). \end{aligned}$$

D'où $\varphi_n \rightarrow g$ dans F_m et $\varphi_n^{(m)} \rightarrow (-1)^m f$ dans $L^2(X')$.

Pour tout $u \in W$, on a

$$\begin{aligned} T(u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (-1)^m \varphi_n^{(m)}, u \rangle_{L^2(X') \times L^2(X)} + \langle \varphi_n, u^{(m)} \rangle_{F'_m \times F_m} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Théorème 1.

L'application $u \mapsto u(0)$, définie pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+, X)$, se prolonge par densité en une application linéaire continue de $W(\mathbb{R}^+)$ dans $[X, Y]_{\frac{1}{2m}}$.

Pour démontrer ce théorème, on a d'abord besoin du résultat :

Lemme 1.

Il existe un opérateur linéaire continu P de $W(\mathbb{R}^+)$ dans $W(\mathbb{R})$ tel que $Pu|_{\mathbb{R}^+} = u$.

Définissons Pu pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+, X)$ par

$$Pu(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t > 0 \\ \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k u(x, -\alpha_k t) & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

où les α_k sont des réels strictement positifs et les λ_j vérifient :

$$\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k (-\alpha_k)^j = 1 \quad \text{pour } 0 \leq j \leq m-1.$$

L'opérateur P est linéaire continu de $L^2(\mathbb{R}^+, X)$ dans $L^2(\mathbb{R}, X)$.

On a :

$$(Pu)^{(m)}(t) = \begin{cases} u^{(m)}(t) & \text{si } t > 0 \\ \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k (-\alpha_k)^m u^{(m)}(-\alpha_k t) & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Notons Q l'opérateur de prolongement défini par

$$Qv(t) = \begin{cases} v(t) & \text{si } t > 0 \\ \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k (-\alpha_k)^m v(-\alpha_k t) & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Les conditions sur les λ_k entraînent que Q est continu pour les topologies induites par $H^{-k}\left(\mathbb{R}^+, [X, Y]_{\frac{m-k}{m}}\right)$ et $H^k\left(\mathbb{R}, [X, Y]_{\frac{m-k}{m}}\right)$, quel que soit k vérifiant $0 \leq k \leq m-1$.

On a donc, pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+, X)$

$$\|Pu\|_{W(\mathbb{R})} \leq \text{cte} \|u\|_{W(\mathbb{R}^+)}.$$

L'opérateur P se prolonge donc par densité en un opérateur linéaire continu de $W(\mathbb{R}^+)$ dans $W(\mathbb{R})$.

Démonstration du théorème 1.

Si $u \in W(\mathbb{R})$, il existe des fonctions $f_k \in L^2\left(\mathbb{R}, [X, Y]_{\frac{m-k}{m}}\right)$, $0 \leq k \leq m-1$ telles que

$$u^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{d^k}{dt^k} f_k.$$

La norme de W est équivalente à la norme :

$$\|u\| = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}, X)} + \inf_{u^{(m)} = \sum \frac{d^k}{dt^k} f_k} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|f_k\|_{L^2\left(\mathbb{R}, [X, Y]_{\frac{m-k}{m}}\right)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après [1], il existe une somme mesurable hilbertienne

$$\mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{H}_\lambda d\mu(\lambda), \quad d\mu(\lambda) \text{ étant une mesure de Radon sur } [\lambda_0, +\infty], \quad \lambda_0 > 0,$$

et un isomorphisme T de Y sur $\mathcal{H}$ qui applique X sur $\mathcal{H}^1$ et $[X, Y]_0$ sur $\mathcal{H}^{1-\theta}$, où

$$\mathcal{H}^{1-\theta} = \{v \in \mathcal{H}; \lambda^{1-\theta} v \in \mathcal{H}\}.$$

On a de plus :

$$\|x\|_X = \|Tx\|_{\mathcal{H}^1} = \left(\int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^2 \|v(\lambda)\|_{\mathcal{H}_\lambda}^2 d\mu(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_{[X,Y]_\theta} = \|Tx\|_{\mathcal{H}^{1-\theta}} = \left(\int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{2(1-\theta)} \|v(\lambda)\|_{\mathcal{H}_\lambda}^2 d\mu(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Posons

$$v(\xi, \lambda) = T\hat{u}(\xi)$$

$$g_k(\xi, \lambda) = T\hat{f}_k(\xi)$$

($\hat{u}$ désigne la transformée de Fourier de u).

On a :

$$(2) \quad v(\xi, \lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} (i\xi)^{k-m} g_k(\xi, \lambda).$$

La norme de u dans W est équivalente à

$$\|u\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^2 \|v(\xi, \lambda)\|_{\mathcal{H}_\lambda}^2 d\mu(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} + \inf_{k=0}^{m-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{\frac{2k}{m}} \|g_k(\xi, \lambda)\|_{\mathcal{H}_\lambda}^2 d\mu(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}}$$

l'inf portant sur toutes les fonctions g_k pour laquelle la relation précédente (2) est vérifiée.

$$\text{Posons } \varphi(\xi, \lambda) = \lambda \left[1 + \inf_{1 \leq k \leq m} \frac{|\xi|^k}{\lambda^{k/m}} \right].$$

On a pour tout λ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \|v(\xi, \lambda)\|_{\mathcal{H}_{\lambda}}^2 d\xi &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi, \lambda)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \lambda)^2 \|v(\xi, \lambda)\|_{\mathcal{H}_{\lambda}}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \text{cte } \lambda^{\frac{1}{2m}-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \|v(\xi, \lambda)\|_{\mathcal{H}_{\lambda}}^2 d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{\frac{k}{m}} \|g_k(\xi, \lambda)\|_{\mathcal{H}_{\lambda}} \right) d\xi \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Si $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}, X)$, en intégrant pour la mesure $d\mu(\lambda)$, on obtient pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{2-\frac{1}{m}} \|u(t, \lambda)\|_{\mathcal{H}_{\lambda}}^2 d\mu(\lambda) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^2 \|v(\xi, \lambda)\|_{\mathcal{H}_{\lambda}}^2 d\mu(\lambda) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{\frac{2k}{m}} \|g_k(\xi, \lambda)\|_{\mathcal{H}_{\lambda}}^2 d\mu(\lambda). \end{aligned}$$

En passant à l'inf sur toutes les fonctions g_k pour lesquelles (2) a lieu, on obtient :

$$\|u(t)\|_{[X, Y]_1, \frac{1}{2m}} \leq \text{cte } \|u\|_W.$$

L'application $u \mapsto u(t)$, $t \geq 0$, définie pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}^+, X)$, se prolonge en une application linéaire continue de W dans $[X, Y]_1, \frac{1}{2m}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LIONS et MAGENES : "Problèmes aux limites non homogènes", Paris 1968.
- [2] Ch. GOULAOUIC et P. GRISVARD : C.R. Acad. Sc. Paris, t. 268 (1969).