PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

R. PAVEC

Isomorphisme entre $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et (s), d'après une note de M. Zerner

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. nº 6, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969___1_A6_0>

ISOMORPHISME ENTRE $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ ET (s)

D'après une note de M. ZERNER

Par M.R. PAVEC

Cet exposé est le développement d'une note de M. Martin ZERNER [6]. Dans cette note M. ZERNER démontre l'isomorphisme entre :

- $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ espaces des fonctions C^∞ sur $\bar{\Omega}$, Ω étant un ouvert borné possédant la propriété du cône.
- et (s) espace des suites à décroissance rapide.

Ce résultat avait déjà été obtenu comme corollaire par BAOUENDI-GOULAOUIC [1] et TRIEBEL [4] dans le cas où l'ouvert est borné et à frontière C^∞.

Notations.

Toutes les fonctions sont à valeurs réelles.

Ω : ouvert borné de R^n possédant la propriété du cône : il existe une parallélépipède P_o de sommet o tel que quel que soit $x \in \Omega$ il existe un parallépipède P_x déduit de P_o par translation et transformation orthogonale et contenu dans Ω.

C : parallélépipède rectangle fermé de R^n tel que $\bar{\Omega} \subset \overset{\circ}{C}$

$\mathcal{D}(\bar{\Omega})$: espace des fonctions f définies sur Ω, qui sont restriction d'une fonction $\tilde{f}$ de classe C^∞ sur R^n et à support dans C muni de la topologie d'espace de Fréchet habituelle.

(s) : espace des suites à décroissance rapide muni de la topologie d'espace de Fréchet définie par les semi-normes :

$$p_k(u_n) = \sup_n |n^k u_n| , k \in N$$

$\mathcal{P}$: espace des polynômes à n variables

$\mathcal{P}_k$: espace des polynômes à n variables de degré total $\leq k$.

On a le théorème :

Théorème : $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est isomorphe à (s) algébriquement et topologiquement.

Démonstration:

$\mathcal{P}$ étant dense dans $L^2(\Omega)$, on peut construire une base de polynômes orthonormaux P_i, de degré croissant. L'application I qui à $f \in L^2(\Omega)$ fait correspondre la suite de ses coefficients sur la base P_i est un isomorphisme entre $L^2(\Omega)$ et ℓ^2. On va montrer que la restriction de I à $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est isomorphisme entre $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et (s). Il suffit pour cela de montrer que $I(\mathcal{D}(\bar{\Omega})) = (s)$, la continuité résultant du théorème du graphe fermé puisque $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et (s) s'injectent continûment dans $L^2(\Omega)$ et ℓ^2.

1°) $I(\mathcal{D}(\bar{\Omega})) \subset (s)$.

Soit $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et $\tilde{f}$ un prolongement de f à c.

$\tilde{c}_k$ = distance de $\tilde{f}$ à $\mathcal{P}_k$ dans $L^\infty(c)$

c_k = distance de f à $\mathcal{P}_k$ dans $L^\infty(\Omega)$

α_k = distance de f à $\mathcal{P}_k$ dans $L^2(\Omega)$.

$I(f) = (u_k)$.

On a :

$$o \leq \alpha_k \leq (\text{mes } \Omega)^{1/2} \; c_k \leq (\text{mes } \Omega)^{1/2} \; \tilde{c}_k.$$

Or $(c_k) \in (s)$ (d'après Lorentz [3], donc $(\alpha_k) \in (s)$.

La suite P_i étant orthonormale :

$$\alpha_k^2 = \sum_{p>d(k)} |u_p|^2$$

où $d(k) = \binom{n+k}{n}$ est la dimension de $\mathcal{P}_k$.

La suite $v_i^2 = \sum_{\rho>i} |u_\rho|^2$ appartient à (s). En effet :

$$i^m \; v_i^2 \leq i^m \; \alpha_k^2 \quad \text{où k est tel que } d(k) \leq i < d(k+1)$$

$$\leq (k+1)^{mn} \;\; \alpha_k^2$$

donc pour tout m :

$$\sup |i^m v_i^2| < +\infty$$

et donc $(v_i^2) \in (s)$.

On en déduit $I(f) \in (s)$.

2°) $I(\mathcal{D}(\bar{\Omega})) \supset (s)$.

a) Inégalité de Markov pour la norme de $L^2(\Omega)$: il existe $c(\Omega)>0$:

$$\|P'\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega)\, k^{n+2}\, \|P\|_{L^2(\Omega)}\ , \quad P \in \mathcal{P}_k.$$

Pour une norme quelconque, on note :

$$\|f'\| = \|(\Sigma|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)|^2)^{1/2}\|$$

Pour un parallélépipède P_o, on a l'inégalité :

$$\|P'\|_{L^\infty(P_o)} \leq c(P_o)\, k^2\, \|P\|_{L^\infty(P_o)}\ , \quad P \in \mathcal{P}_k$$

où $c(P_o)$ ne dépend que de P_o et est invariant si on fait une transformation orthogonale sur P_o (Coatmélec [2]).

Pour $x \in \Omega$:

$$|P'(x)| \leq \|P'\|_{L^\infty(P_x)} \leq c(P_x) k^2\, \|P\|_{L^\infty(P_x)}$$
$$\leq c(P_o) k^2\, \|P\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

D'où :

$$\|P'\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(P_o)\, k^2\, \|P\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

On a donc :

$$\|P'\|_{L^2(\Omega)} \leq (\mathrm{mes}\Omega)^{1/2}\, \|P'\|_{L^\infty(\Omega)}$$
$$\leq c_1(\Omega)\, k^2\, \|P\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Démontrons l'inégalité

$$\|P\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_2(\Omega)k^n \|P\|_{L^2(\Omega)} \quad , \ P\in \mathcal{P}_k.$$

Soit $P\in\mathcal{P}_k$ et $x_o \in \Omega$ tel que $|P(x_o)| = \|P\|_{L^\infty(\Omega)}$. Supposons :

$$\bullet\ P(x_o)>o.$$

$$\bullet\ x_o = o \ , \ P_{x_o} = P_o.$$

Pour tout $x \in P_o$:

$$P(x) \geq P(o) - \|P'\|_{L^\infty(P_o)} \ |x|$$

$$\geq \|P\|_{L^\infty(\Omega)} \ (1 - \frac{\|P'\|_{L^\infty(\Omega)}}{\|P\|_{L^\infty(\Omega)}} \ |x|).$$

Soient $e_1,e_2,\dots,e_n$ les arètes de P_o :

$$P_o = \{x\in R^n \ : \ x=\Sigma\, t_i e_i \ \ o\leq t_i\leq 1\}$$

$$K = \{x\in R^n \ : \ x = \Sigma\, t_i e_i \ \ o\leq t_i\}$$

Il existe $\rho_o>o$ tel que :

$$P_o \cap B(o,\rho_o) = K \cap B(o,\rho_o).$$

Posons

$$\alpha = \frac{\|P\|_{L^\infty(\Omega)}}{\|P'\|_{L^\infty(\Omega)}} \quad \text{et } \rho = \inf\,(\alpha,\rho_o)$$

$$x \in P_o \Longrightarrow P(x) \geq \|P\|_{L^\infty(\Omega)} \ (1-\frac{|x|}{\alpha}).$$

$$\geq \|P\|_{L^\infty(\Omega)} \ (1-\frac{|x|}{\rho}).$$

si $x\in K_\rho = K \cap B(o,\rho)$, on a :

$$x \in P_o \text{ et } 1-\frac{|x|}{\rho} \geq o.$$

Donc :

$$\|P\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \int_{K_\rho} \|P\|^2_{L^\infty(\Omega)} \left(1-\frac{|x|}{\rho}\right)^2 dx$$

$$\geq \|P\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{K_\rho} \left(1-\frac{|x|}{\rho}\right)^2 dx$$

$$\int_{K_\rho} \left(1-\frac{|x|}{\rho}\right)^2 dx = \int_0^\rho \left(1-\frac{r}{\rho}\right)^2 dr \int_{S_r} d\sigma \ , \ S_r = \{x \in K \ |x| = r\}$$

or $\displaystyle\int_{S_r} d\sigma = r^{n-1} \int_{S_1} d\sigma = c_1 \ r^{n-1}$

$$\int_{K_\rho} \left(1-\frac{|x|}{\rho}\right)^2 dx = c_1 \int_0^\rho r^{n-1} \left(1-\frac{r}{\rho}\right)^2 dr$$

$$= c_1 \ \rho^n \int_0^1 u^{n-1} \ (1-u)^2 \ du = c_2 \ \rho^n$$

On obtient donc :

$$\|P\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_3 \ \rho^{-n/2} \ \|P\|_{L^2(\Omega)}$$

si $\rho = \rho_0$: $\|P\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_4 \ \|P\|_{L^2(\Omega)}$

$\rho = \alpha$

$$\alpha = \frac{\|P\|_{L^\infty(\Omega)}}{\|P'\|_{L^\infty(\Omega)}} \geq \frac{1}{c(P_0)k^2}$$

d'où :

$$\|P\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_5 \ k^n \ \|P\|_{L^2(\Omega)}$$

Donc dans les deux cas :

$$\|P\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_6 \ k^n \ \|P\|_{L^2(\Omega)}$$

b) Soit $f \in L^2(\Omega)$ telle que $I(f) \in (s)$.

$$I(f) = (\alpha_i)$$

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i P_i \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. La série

$$g_\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \frac{\partial^\alpha P_i}{\partial x^\alpha}$$

est convergente dans $L^2(\Omega)$: en effet d'après l'inégalité de Markov comme $P_i \in \mathcal{P}_i$:

$$\left\| \frac{\partial^\alpha P_i}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c'(\Omega)\ i^{(n+2)|\alpha|} \quad \|P_i\|_{L^2(\Omega)} \leq c'(\Omega)\ i^{(n+2)|\alpha|}$$

comme (α_i) est à décroissance rapide la série :

$$\Sigma\, |\alpha_i| \left\| \frac{\partial^\alpha P_i}{\partial x^\alpha} \right\|$$

converge, d'où le résultat. La dérivation étant fermée dans $L^2(\Omega)$, on en déduit $D^\alpha f = g_\alpha$, d'où $D^\alpha f \in L^2(\Omega)$.

On a donc $f \in \bigcap_{m \geq 0} H^m(\Omega)$.

Ω possédant la propriété du cône, en utilisant le prolongement de Sobolev, on en déduit que pour tout $m \in N$, f admet un prolongement $\tilde{f}_m$ à R^n, de classe c^m. Mais alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, f est de classe c^m sur $\bar{\Omega}$ au sens donné dans :

- Whitney : [5]

et d'après le théorème I de ce même article, f admet un prolongement $\tilde{f}$ à R^n de classe c^∞. Donc $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAOUENDI-GOULAOUIC : Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés.
CRAS. Tome 266. 5-2-1968

[2] COATMELEC : Thèse Rennes 1966.

[3] LORENTZ : Approximation of functions.

[4] TRIEBEL : Math. Annalen. 177 - 1968 p.247-264.

[5] WHITNEY : Extensions of differentiables functions.
Am. Math. Soc. Volume 36 1934 p.64-65.

[6] ZERNER : Développement en série de polynômes orthonormaux des fonctions indéfiniment différentiables.
CRAS t.268 (27-1-1969).