PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

C. GOULAOUIC

Un théorème de Sobolev dans des « espaces avec poids »

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 5, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969___1_A5_0>

UN THEOREME DE SOBOLEV DANS DES "ESPACES AVEC POIDS"

par

C. GOULAOUIC

On montre l'inclusion topologique de certains espaces de distributions dans un espace de fonctions continues et bornées par un poids. Le résultat ci-dessous sert dans l'étude de problèmes elliptiques dégénérés (cf [1]) et la méthode utilisée ici peut s'adapter à des situations bien plus générales.

On démontre le résultat :

Théorème 1.

Soient : Ω *un ouvert régulier borné de* $\mathbb{R}^n$ *;* m *un entier* $> \frac{n}{4}$ *;* φ *une fonction de* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *vérifiant :*

$$\begin{cases} \varphi(x) > 0 & \text{dans } \Omega \\ \varphi(x) = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \\ d\varphi(x) \neq 0 & \text{pour tout } x \in \Gamma. \end{cases}$$

Alors il existe une constante $c > 0$ *telle que :*

$$t^{1-n/4m}\, \varphi(x)^{n/2}\, |u(x)|^2 \leq c\,(\|\varphi^m u\|^2_{2m} + \|u\|^2_m + t\,\|u\|^2_0)$$

pour tous $x \in \Omega$, $t > 0$, $u \in H^m(\Omega)$ *et tel que* $\varphi^m u \in H^{2m}(\Omega)$.

- Remarquons que l'hypothèse $\varphi^m u \in H^{2m}(\Omega)$ entraîne déjà que $\varphi^m u$ est borné, mais on obtient ici un résultat meilleur en tenant compte aussi de l'hypothèse $u \in H^m(\Omega)$.

<u>Démonstration</u> : On peut se ramener au problème dans un demi-espace $\mathbb{R}^n_+ = \{ x,y) \ ; \ x \in \mathbb{R}^{n-1}, \ y > o\}$ et on veut démontrer :

$$(1) \quad t^{1-n/4m} \ y^{n/2} \ |u(x,y)|^2 \leq c(\|y^m u\|^2_{2m} + \|u\|^2_m + t\,\|u\|^2_o).$$

- Remarquons que pour des raisons d'homogénéité, cette inégalité est la meilleure possible quant à la puissance de y au premier membre et qu'il suffit de la démontrer pour t = 1.

Nous allons utiliser pour cela des résultats sur les espaces de traces.

En utilisant l'inégalité de Hardy, on déduit des hypothèses sur u que :

$$(2) \quad y \longmapsto y^p \ u^{(m+p)} \ (.,y) \text{ est dans } L^2(o, \infty \ ; \ L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$$

pour $p = o,1,\ldots,m$; $u^{(k)}$ désigne $\dfrac{\partial^k u}{\partial y^k}$.

On a aussi :

$$(3) \quad y \longmapsto y^m \ u(.,y) \text{ est dans } L^2(o, \infty \ ; \ H^{2m}(\mathbb{R}^{n-1})).$$

- Considérons la fonction v définie par :

$$v(x,y) = y^{n/4} \ u(x,y).$$

On déduit de (3) que :

$$(4) \quad y \longmapsto y^{m-n/4} \ v(.,y) \text{ est dans } L^2(o,\infty \ ; \ H^{2m}(\mathbb{R}^{n-1})).$$

On a aussi :

$$y^{m-n/4} \ v^{(2m)} \ (x,y) = y^{m-n/4} \sum_{i=o}^{2m} \binom{2m}{i} \ (y^{n/4})^{(i)} \ u^{(2m-i)} \ (x,y).$$

Donc, pour $n/4$ entier, il résulte de (2) que :

(5) $y \longmapsto y^{m-n/4}\ v^{(2m)}\ (x,y)$ est dans $L^2(o,\infty\ ;\ L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$.

Lorsque n/4 n'est pas entier, $y^{m-n/4}\ v^{(2m)}\ (x,y)$ est somme de termes qui sont dans $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ et de :

$$\sum_{i=m+1}^{2m} \binom{2m}{i} \left(\frac{n}{4}\right) \ldots \left(\frac{n}{4} - i+1\right) y^{m-i}\ u^{(2m-i)}\ (x,y)\ ;$$

et cette somme est dans $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ également lorsque $u \in H^m_o\ (\mathbb{R}^n_+)$ (on utilise encore l'inégalité de Hardy).

Nous allons donc terminer la démonstration du théorème en deux temps :

a) Montrer que l'on peut se ramener au cas $u \in H^m_o$.

b) Montrer que (4) et (5) impliquent que v est continue bornée.

a) <u>Etude d'un relèvement.</u>

On connaît le résultat suivant (cf [2] [3]) :

<u>Lemme 1.</u> *Les hypothèses :*

$$\begin{cases} y^m\ u(.,y) \in L^2(o,\infty\ ;\ H^{2m}(\mathbb{R}^{n-1})) \\ y^m\ u^{(2m)}\ (.,y) \in L^2(o,\infty\ ;\ H^o(\mathbb{R}^{n-1})) \quad \text{ou } u^{(m)}(.,y) \in L^2(o,\infty\ ;\ H^o(\mathbb{R}^{n-1})) \end{cases}$$

impliquent que pour $o \leq i \leq m-1$,

$\gamma_i u = \dfrac{\partial^i u}{\partial y^i}\ (.,o)$ *existe dans* $H^{m-i-\frac{1}{2}}\ (\mathbb{R}^{n-1})$.

On démontre un lemme de relèvement (avec une condition de plus que dans la situation "classique".

<u>Lemme 2.</u> Etant donné $(f_o,\ldots,f_{m-1}) \in \prod_{i=o}^{m-1} H^{m-i-\frac{1}{2}}\ (\mathbb{R}^{n-1})$, on peut construire $w \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$ tel que

$$y^m\ w \in H^{2m}(\mathbb{R}^n_+)$$

et de plus : $y^{n/4}\ w(x,y)$ est borné sur $\mathbb{R}^n_+$.

On utilise pour cela le relèvement habituel des traces dans le cas hilbertien (cf [4] p. 26) et on se ramène au problème de relever une seule trace :

Soit f_j donné dans $H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$; on note a la transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^{n-1}$ de f_j. Par hypothèse, on a :

$$(6) \quad \int_{R^{n-1}} \left|a^2(\xi)\right| \lambda^{2m-2j-1}\, d\xi < \infty \qquad \text{avec } (\xi^2+1)^{1/2} = \lambda .$$

On choisit une fonction $\varphi \in \mathcal{D}([o,\infty[)$ et telle que $\varphi^{(j)}(o) = 1$ et $\varphi^{(k)}(o) = o$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $k \neq j$.

On pose :

$$(7) \qquad \begin{cases} \bar{w}(x,y) = \bar{\mathcal{F}}\,(\hat{w}(\xi,y)) \text{ avec} \\ \hat{w}(\xi,y) = \lambda^{-j}\, a(\xi)\, \varphi(\lambda y). \end{cases}$$

(en fait on cherche $\hat{w}$ sous une forme plus générale et on détermine les divers paramètres pour obtenir le lemme 2).

On doit vérifier :

1°) $\hat{w}^{(j)}(\xi,o) = a(\xi)$, ce qui est évident.

2°) $\hat{w} \in L^2(o,\infty\, ;\, L^2_{\lambda^m}(\mathbb{R}^{n-1}))$, c'est-à-dire :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|a^2(\xi)\right| \lambda^{2m-2j} \int_0^\infty \varphi^2(\lambda y)\, dy < \infty .$$

3°) $\dfrac{\partial^m \hat{w}}{\partial y^m} \in L^2(o,\infty\, ;\, L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$, c'est-à-dire :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|a^2(\xi)\right| \lambda^{-2j+2m} \int_0^\infty \left[\varphi^{(m)}(\lambda y)\right]^2 dy < \infty .$$

4°) $y^m \hat{w} \in L^2(o,\infty\ ;\ L^2_{\lambda^{2m}}(\mathbb{R}^{n-1}))$, c'est-à-dire :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |a^2(\xi)|\ \lambda^{-2j+4m} \int_o^\infty y^{2m}\ \varphi^2(\lambda y)\ dy < \infty$$

5°) $y^m\ \hat{w}^{(2m)} \in L^2(o,\infty\ ;\ L^2(\mathbb{R}^n))$, c'est-à-dire :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |a^2(\xi)| \lambda^{-2j+4m} \int_o^\infty y^{2m}\ [\varphi^{(2m)}(\lambda y)]^2\ dy < \infty.$$

Toutes les propriétés 2°)...5°) sont évidentes d'après l'hypothèse (6) sur a. Elles impliquent :

$$w \in H^m(\mathbb{R}^n_+)\ ;\ y^m\ w \in H^{2m}(\mathbb{R}^n_+) \text{ et } \gamma_j\ w = f_j.$$

6°) Il reste à vérifier que $y^{n/4}\ w(x,y)$ est borné.

Posons :

$$g(y) = \| y^{n/4}\ w(.,y)\|_{H^{m+\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$g(y) = \| y^{n/4}\ \hat{w}(.,y)\|_{L^2_{\lambda^{m+\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}}}.$$

On a : $$g(y) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |a^2(\xi)|\ \lambda^{2m-2j-1}\ [(\lambda y)^{n/2}\ \varphi^2(\lambda y)]\ \ d\xi\ ,$$

et comme $\sup\limits_{u>o} (u^{n/2}\ \varphi^2(u)) < \infty$, on obtient :

$$\sup_{y\in]o,\infty[} (\| y^{n/4}\ w(.,y)\|_{H^{m+\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}) < \infty$$

et comme $m > \frac{n}{4}$ entraîne $m + \frac{n}{4} - \frac{1}{2} > \frac{n-1}{2}$, le théorème de Sobolev dans $\mathbb{R}^{n-1}$ permet de terminer la démonstration du lemme 2.

Si maintenant, on pose $z = u-w$, on vérifie que :

$$z \in H_0^m(\mathbb{R}_+^n) \ ; \ y^m z \in H^{2m}(\mathbb{R}_+^n)$$

et pour vérifier que $y^{n/4}$ $u(x,y)$ est borné, il suffit de vérifier que $y^{n/4} z(x,y)$ est borné. On peut donc supposer que (4) et (5) sont vérifiées.

b) Les propriétés (4) et (5) impliquent que $y^{n/4}$ $u(x,y)$ est borné.

En effet, ces propriétés entraînent que $y \longmapsto v(.,y)$ est continue bornée de $[0,\infty[$ dans l'espace (cf [2]).

$$T_0^{2m}\left(2,\ m-\frac{n}{4}\ ,\ H^{2m}(\mathbb{R}^{n-1}),\ 2,\ m-\frac{n}{4}\ ,\ H^0(\mathbb{R}^{n-1})\right)$$

et on sait que cet espace est aussi :

$$H^{(1-\theta)}(\mathbb{R}^{n-1}) \quad \text{avec } 2m(1-\theta) = m + \frac{n}{4} - \frac{1}{2} > \frac{n-1}{2}\ .$$

Et on termine encore en utilisant le théorème de Sobolev dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

Généralisations possibles.

1°) On peut étendre le théorème 1 aux cas des espaces $W^{m,p}$ avec $p \neq 2$.

Il suffit d'étudier le relèvement habituel dans ces cas.

2°) On considère l'espace E des distributions u sur Ω qui vérifient :

φ^{α} $u \in H^m(\Omega)$ et φ^{β} $u \in H^p(\Omega)$

avec $\sup(m,p) > \frac{n}{2}$, α et β réels.

On peut encore montrer des résultats analogues à ceux du théorème 1, 1, meilleurs donc que l'application brutale du théorème de Sobolev.

Il y a ici toutefois quelques nouvelles difficultés techniques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. BAOUENDI et G. GOULAOUIC : "Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés."

[2] P. GRISVARD : "Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications". J. Math. Pures et Appl. 45 (1966) p. 143-206.

[3] J.L. LIONS : "Théorèmes de trace et d'interpolation I". Ann. Scuola norm. Sup. Pisa, série 3, t. 13 - 1959 - p. 389-403.

[4] J.L. LIONS et E. MAGENES : "Problèmes aux limites non homogènes I". Dunod - Paris 1968.