

GAPAILLARD

Théorème maximal de Ionescu - Tulcea

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1966-1967
« Séminaires de probabilités et statistiques », , exp. n° 4, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1966-1967____A4_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THEOREME MAXIMAL DE IONESCU - TULCEA

par

Monsieur GAPPAILLARD

1°) Lemme 1.

Soit (X, T, μ) un espace mesuré, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$: suite de parties de X

$$\left. \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ x \in A_n \end{array} \right| \xrightarrow{\quad} \left| \begin{array}{l} U(n, x) \in T \\ U^*(n, x) \end{array} \right. \quad \text{avec}$$

$$1) \quad \mu^*\left(\bigcup_{x \in A_n} U(n, x)\right) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2) \quad \inf_{x \in A_n} \mu(U(n, x)) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ tel que } A_n \neq \emptyset$$

$$3) \quad \left. \begin{array}{l} p, q \in \mathbb{N}, p \leq q \\ x \in A_p \\ y \in A_q \cap \bigcap U^*(p, x) \end{array} \right| \Rightarrow U(p, x) \cap U(q, y) = \emptyset$$

Alors, il existe une suite $(U(u(j), x(j)))_{j \in I}$ ($I \subset \mathbb{N}$, $u : I \rightarrow \mathbb{N}$) disjointe telle que

$$4) \quad A_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{j \in I} U^*(u(j), x(j))$$

Remarque.

Si dans 3) on fait $p = q = n$, on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} x \in A_n \\ x \in A_n \cap \bigcap U^*(n, x) \end{array} \right| \Rightarrow U(n, x) \cap U(n, x) = \emptyset$$

impossible d'après 2). Donc :

$$x \in A_n \implies x \in U^*(n, x)$$

Démonstration.

α : le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A_n \neq \emptyset$

$\mathcal{U}$: ensemble des suites $(U(u(j), x(j)))_{j \in I}$

avec : I : intervalle de $\mathbb{N}$

$u : I \rightarrow \mathbb{N}$ application croissante vérifiant :

$$i) 0 \in I, u(0) = \alpha, x(0) \in A_{u(0)}$$

$$ii) j \in \mathbb{N}, j+1 \in I$$

$$\implies x(j+1) \in A_{u(j+1)} - \bigcup_{0 \leq s \leq j} U^*(u(s), x(s))$$

$$iii) j \in \mathbb{N}, j+1 \in I$$

$$\implies A_n - \bigcup_{0 \leq s \leq j} U^*(u(s), x(s)) = \emptyset$$

$$\forall h, 0 \leq h < u(j+1) \quad (\text{si un tel } h \text{ existe}).$$

$\mathcal{U} \neq \emptyset$ car $(U(u(0), x(0))) \in \mathcal{U}$ si $I = \{0\}$, $u(0) = \alpha$ et $x(0) \in A_\alpha$.

Soit $(U(u(j), x(j)))_{j \in I} \in \mathcal{U}$.

Alors : - $x(j) \in A_{u(j)}$ (définition des $U(n, x)$)

- les ensembles de cette suite sont disjoints. En effet :

soient $i, j \in I$, $i < j$ donc $p = u(i) \leq u(j) = q$.

$$\text{Alors : } x(i) \in A_p \quad (1),$$

$$\text{et } x(j) \in A_q - \bigcup_{0 \leq s \leq j-1} U^*(u(s), x(s)) \quad ii)$$

$$\implies x(j) \in A_q \cap \bigcup U^*(u(i), x(i)) \quad (2)$$

$$1), 2), (3) \implies U(u(i), x(i)) \cap U(u(j), x(j)) = \emptyset.$$

Il reste à trouver dans $\mathcal{U}$ une suite vérifiant (4).

1ère partie.

S'il existe dans $\mathcal{U}$ une suite infinie $\{U(u(j), x(j))\}_{j \in \mathbb{N}}$, cette suite satisfait à (4).

$$1) \lim_{j \in \mathbb{N}} u(j) = \infty.$$

Autrement : $\exists q \in \mathbb{N}$ tel que $u(j) \leq q, \forall j \in \mathbb{N}$.

Alors, par définition des $U(n, x)$:

$$x(j) \in A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_q, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, d'après (1), $\exists B \subset X$ tel que

$$\mu^*(B) < \infty \quad \text{et} \quad \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U(u(j), x(j)) \subset B$$

(il suffit de prendre $B = \bigcup_{\substack{0 \leq n \leq q \\ x \in A_n}} U(n, x)$).

Alors

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} U(u(j), x(j))\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(U(u(j), x(j))) \leq \mu^*(B) < \infty$$

D'où $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(U(u(j), x(j))) = 0$

mais $u(j)$ est constant à partir d'un certain rang, soit $u(j) = n$. Alors la limite ci-dessus montre que

$$\inf_{x \in A_n} \mu(U(n, x)) = 0, \quad \text{contraire à (2).}$$

2) Soit alors $h \in \mathbb{N}$. D'après (1), $\exists j \in \mathbb{N}$ tel que $h < u(j+1)$.

$$\text{Alors iii)} \Rightarrow A_n \subset \bigcup_{0 \leq s \leq j} U^*(u(s), x(s)) \subset \bigcup_{s \in \mathbb{N}} U^*(u(s), x(s))$$

et h arbitraire $\Rightarrow$ (4).

2ème partie.

1) S'il existe dans $\mathcal{U}$ une suite finie vérifiant (4), c'est terminé.

2) Dans le cas contraire, soit $\{U(u(j), x(j))\}_{j \in I}$ une suite finie de

Elle ne vérifie pas (4) donc : $A_\infty = \bigcup_{j \in I} U^*(u(j), x(j)) \neq \emptyset$.

Soit $p = \sup I$ et $I' = I \cup \{p+1\}$

Soit q le plus petit entier tel que $A_q = \bigcup_{j \in I} U^*(u(j), x(j)) \neq \emptyset$

Soit enfin $u(p+1) = q$ par définition.

Par définition de α et puisque $A_q \neq \emptyset$, on a $q \geq \alpha$ donc $u(p+1) \geq u(p)$ si $p=0$

Si $p > 0$:

$$\begin{aligned} \text{iii)} \Rightarrow A_h &= \bigcup_{\alpha \leq s \leq p-1} U^*(u(s), x(s)) = \emptyset & \forall h, 0 \leq h < u(p) \\ A_h &= \bigcup_{\alpha \leq s \leq p} U^*(u(s), x(s)) = \emptyset & \forall h, 0 \leq h < u(p) \\ \text{soit } A_h &= \bigcup_{j \in I} U^*(u(j), x(j)) = \emptyset & \forall h, 0 \leq h < u(p) \end{aligned}$$

d'où $q = u(p+1) \geq u(p)$

Prenons alors arbitrairement $x(p+1) \in A_q = \bigcup_{j \in I} U^*(u(j), x(j))$. LA suite $(U(u(j), x(j)))_{j \in I'}$, appartient alors à $\mathcal{U}$.

Ce qui précède donne donc un procédé pour obtenir par récurrence une suite $(U(u(j), x(j)))_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}$ qui, d'après la 1ère partie, vérifie (4).

2°) Théorème maximal.

On suppose en plus des hypothèses du lemme 1 que $A_n \in T, \forall n \in \mathbb{N}$

5) $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $\mu^*(U^*(n, x)) \leq C \mu(U(n, x)), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A_n$

ν est une mesure sur T telle que :

6) $\nu(U(n, x)) \geq \mu(U(n, x)) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A_n$

Alors

7) $\mu(A_\infty) \leq C \nu(\bigcup_{j \in I} U(u(j), x(j)))$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 A_{\infty} &\subset \bigcup_{j \in I} U^*(u(j), x(j)) \\
 \implies \mu(A_{\infty}) &\leq \mu^*\left(\bigcup_{j \in I} U^*(u(j), x(j))\right) \\
 &\leq \sum_{j \in I} \mu^*(U(u(j), x(j))) \\
 &\leq C \sum_{j \in I} \mu(U(u(j), x(j))) \\
 &\leq C \sum_{j \in I} v(U(u(j), x(j))) \\
 &= C v\left(\bigcup_{j \in I} U(u(j), x(j))\right)
 \end{aligned}$$

A ajouter à l'énoncé de la "variante" :

On suppose qu'il existe un clan $T_0 \subset T$ tel que :

$$\begin{aligned}
 \text{i')} &\quad \left\{ \begin{array}{l} A \in T, B \in T_0 \implies A \cap B \in T_0 \\ \mu(A) = \sup_{B \in T_0} \mu(A \cap B) \end{array} \right. \\
 \text{ii')} &\quad
 \end{aligned}$$

3°) Une variante du théorème maximal.

$\{A_n\}_{n \in N}$ suite de T . (et non de T_0)

$$\left. \begin{array}{l} n \in N \\ x \in A_n \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{map}} \left\{ \begin{array}{l} U(n, x) \in T \\ U^*(n, x) \end{array} \right.$$

On suppose

$$\begin{aligned}
 1)' \quad \mu^*\left(\bigcup_{x \in B \cap A_n} U(n, x)\right) &< \infty & \forall B \in T_0 \\
 & & \forall n \in N
 \end{aligned}$$

2)' Les conditions 2), 3), 5), 6) sont satisfaites.

Alors :

$$\mu(A_{\infty}) \leq C v(X) \quad \text{si} \quad \text{si } A_{\infty} = \bigcup_{n \in N} A_n.$$

Pour tout $n \in N$, soit $A'_n \subset A_n$ avec $A'_n \in T_0$. On considère alors les $U(n, x)$ et $U^*(n, x)$ correspondant aux x appartenant aux A'_n .

Les conditions d'application du théorème maximal précédent sont alors remplies pour la suite $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'où :

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n\right) \leq C \nu(X).$$

Alors, d'après ii)' :

$$\begin{aligned} \mu(A_\infty) &= \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sup_{B \in \mathcal{T}_0} \mu\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cap B\right) \\ &= \sup_{B \in \mathcal{T}_0} \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{A_n \cap B}_{A'_n}\right) \leq C \nu(X) \end{aligned}$$

d'après i)'

4°) Conséquence du théorème maximal de Tulaea.

(X, T, μ) espace mesuré

$\mathcal{T}_0$ clan des $A \in T$ tels que $\mu(A) < \infty$

β : mesure sur T telle que $\beta(X) < \infty$

Théorème.

$(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$: suite croissante de sous-tribus de T

$f_n \in L^1(X, T, \mu)$: fonction F_n -mesurable telle que :

$$\beta(A) \geq \int_A f_n d\mu, \quad \forall A \in F_n$$

Alors :

$$a \mu(\{x ; \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > a\}) \leq \beta(X), \quad \forall a > 0.$$

Démonstration.

Posons : $\nu = (1/a) \beta$

$$A'_0 = \{x ; f_0(x) > a\}$$

$$n > 1 : A'_n = \{x ; \sup_{0 \leq j \leq n-1} f_j(x) \leq a, \quad f_n(x) > a\}.$$

Alors il est clair que

$$\{x ; \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n$$

Posons alors :

$$A_n = A'_n \quad \text{si} \quad \mu(A'_n) \neq 0$$

$$A_n = \emptyset \quad \text{si} \quad \mu(A'_n) = 0$$

Soit : $U(n,x) = U^*(n,x) = A_n$, $\forall x \in A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $A_n \neq \emptyset$.

Alors :

$$* \quad . A'_n \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{T} \implies \mu^*\left(\bigcup_{x \in A_n} U(n,x)\right) = \mu^*(A_n) = \mu(A_n) = \mu(A'_n) < \infty \implies 1)$$

$$\begin{aligned} . v(U(n,x)) &= v(A_n) = \frac{1}{a} \beta(A_n) \geq \frac{1}{a} \int_{A_n} f_n d\mu = \\ &= \frac{1}{a} \int_{A'_n} f_n d\mu \geq \frac{1}{a} a \mu(A'_n) = \mu(A_n) = \mu(U(n,x)) \\ &\implies 5). \end{aligned}$$

$$* \quad . \inf_{x \in A_n} \mu(U(n,x)) = \mu(A_n) > 0 \implies 2)$$

$$* \quad . \mu(U^*(n,x)) = \mu(U(n,x)) \implies 6) \quad \text{avec} \quad C = 1$$

$$* \quad . p, q \in \mathbb{N} \quad p \leq q$$

$$x \in A_p$$

$$\begin{aligned} y \in A_q \cap U^*(p,x) &= A_q \cap A_p \implies A_p \neq A_q \implies p \neq q \implies A_p \cap A_q = \emptyset \\ &\implies U(p,x) \cap U(q,y) = \emptyset \implies 3) \end{aligned}$$

(voir définition des A'_n).

Alors d'après le théorème maximal :

$$\mu(A_\infty) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n\right) \leq v(X) = \frac{1}{a} \beta(X).$$

$$\text{D'où : } a \mu(\{x ; \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > a\}) \leq \beta(X) \quad \text{Q.E.D.}$$

5°) Application à un lemme maximal de J. Neveu.

Lemme maximal de J. Neveu.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace de probabilité $\{\mathcal{A}_n\}$ une suite de sous-algèbres de

$$1) f \in L^1 \left[\begin{array}{l} \Omega_f = \bigcup_n \{E^n f > 0\} \end{array} \right] \Rightarrow \int_{\Omega_f} f \, dP \geq 0$$

$$2) f \in L^1, a > 0 \left[\begin{array}{l} \Omega_{f,a} = \bigcup_n \{|E^n f| > a\} \end{array} \right] \Rightarrow \int_{\Omega_{f,a}} (|f| - a) \, dP \geq 0.$$

Démonstration du 2).

On pose :

$$A'_0 = \{x ; |(E^0 f)(x)| > a\}$$

$$A'_n = \{x ; \sup_{1 \leq i \leq n-1} |(E^i f)(x)| \leq a, |(E^n f)(x)| > a\} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n = \Omega_{f,a}$$

Puis

$$\left[\begin{array}{ll} A_n = A'_n & \text{si } P(A'_n) \neq 0 \\ A_n = \emptyset & \text{si } P(A'_n) = 0 \end{array} \right] \quad \text{d'où} \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(\Omega_{f,a})$$

$$\mu = P$$

$$v \text{ défini par } v(A) = \frac{1}{a} \int_A |f| \, dP$$

$$\left. \begin{array}{l} n \\ x \in A_n \end{array} \right\} \longrightarrow U(n,x) = U^*(n,x) = A_n \in \mathcal{A}$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{x \in A_n} U(n,x)\right) = \mu^*(A_n) = \mu(A_n) = P(A_n) < \infty \Rightarrow 1)$$

$$v(U(n,x)) = v(A_n) = \frac{1}{a} \int_{A_n} |f| \, dP$$

$$= \frac{1}{a} \int_{A_n} E^n |f| \, dP_{\mathcal{A}_n} \geq \frac{1}{a} \int_{A_n} |E^n f| \, dP_{\mathcal{A}_n} \quad (\text{Cours J. Neveu p. 116})$$

car $\lambda_n \in \mathcal{C}_n$

$$> \frac{1}{a} a P_{\mathcal{C}_n}(A_n) = P(A_n) = \mu(U(n,x)) \implies 5)$$

$\inf_{x \in A_n} \mu(U(n,x)) = \mu(A_n) = P(A_n) > 0 \implies 2)$ par choix des A_n .

6) trivialement vérifié avec $C = 1$.

3) $p, q \in \mathbb{N} \quad p \leq q$

$$\begin{cases} x \in A_p \\ y \in A_q \cap \bigcup U^*(p,x) = A_q \cap \bigcup A_p \implies p \neq q \implies A_p \cap A_q = \emptyset \end{cases}$$

soit : $U(p,x) \cap U(q,y) = \emptyset$.

Conclusion.

Le théorème maximal de Tulcea s'applique et :

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \nu\left(\bigcup U(n,x)\right) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

d'où

$$P(\Omega_{f,a}) = \frac{1}{a} \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} |f| dP = \frac{1}{a} \int_{\Omega_{f,a}} |f| dP$$

puisque $\Omega_{f,a}$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ne diffèrent que par un ensemble P -nul.

$$\int_{\Omega_{f,a}} dP \leq \frac{1}{a} \int_{\Omega_{f,a}} |f| dP$$

D'où

$$\int_{\Omega_{f,a}} (|f| - a) dP \geq 0.$$

Démonstration du 1).

$$f = f^+ - f^-$$

$$f^+ = \sup(f, 0)$$

$$f^- = \sup(-f, 0)$$

$$\int_{\Omega_f} f dP = \int_{\Omega_f} f^+ dP - \int_{\Omega_f} f^- dP$$

On doit donc démontrer

$$\int_{\Omega_f} f^+ dP \geq \int_{\Omega_f} f^- dP$$

$$A'_0 = \{x ; (E^0 f)(x) > 0\}$$

$$A'_n = \{x ; (E^{n-1} f)(x) \leq 0, (E^n f)(x) > 0\}$$

$$\mu : \mu(A) = \int_A f^- dP \quad ; \quad \nu : \nu(A) = \int_A f^+ dP$$

$$\begin{cases} A_n = A'_n & \text{si } (A_n) > 0 \\ A_n = \emptyset & \text{si } (A_n) = 0 \end{cases} \quad U(n,x) = U^*(n,x) = A_n$$

$$\cdot \mu^*\left(\bigcup_{x \in A_n} U(n,x)\right) = \mu^*(A_n) = \mu(A_n) < \infty \implies 1) \text{ car } f^- \in L^1$$

(Halmos p. 102)

$$\cdot f = f^+ - f^- \implies E^n f = E^n f^+ - E^n f^- \quad \text{p.s.} \quad (\text{Neveu Cours p. 115 b)})$$

D'où : $x \in A_n$ (si $A_n \neq \emptyset$)

$$\implies (E^n f)(x) > 0 \implies (E^n f^+)(x) \geq (E^n f^-)(x) \quad \text{p.s.}$$

D'où

$$\begin{aligned} \nu(U(n,x)) &= \nu(A_n) = \int_{A_n} f^+ dP = \int_{A_n} E^n f^+ dP \geq \\ &\int_{A_n} E^n f^- dP = \int_{A_n} f^- dP = \mu(A_n) = \mu(U(n,x)) \\ &\implies 5) \end{aligned}$$

$$\cdot \inf_{x \in A_n} \mu(U(n,x)) = \mu(A_n) > 0 \text{ par choix des } A_n \implies 2)$$

• 6) trivialement vérifié : $C = 1$

• 3) vérifié comme précédemment car les A_n sont disjoints.

Conclusion.

On peut encore appliquer le théorème maximal de Tulcea :

$$\mu(\bigcup A_n) = \mu(\bigcup A'_n) = \mu(\Omega_f) \leq \nu(\bigcup U(n,x)) = \nu(\bigcup A_n) = \nu(\Omega_f)$$

D'où :

$$\int_{\Omega_f} f^- dP \leq \int_{\Omega_f} f^+ dP \Rightarrow \int_{\Omega_f} (f^+ - f^-) dP \geq 0$$

soit :

$$\int_{\Omega_f} f dP \geq 0 \quad \text{C.Q.F.D.}$$