

A. BRUNEL

Lemme ergodique de I. Cuculescu et C. Foias

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1966-1967
« Séminaires de probabilités et statistiques », , exp. n° 2, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1966-1967____A2_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LEMME ERGODIQUE DE I. CUCULESCU, ET C. FOIAS

Czech. Math. S. 1966) par A. BRUNEL.

1. Définition.

1.1. Définition de $(X_\infty, \mathcal{B}_\infty, \mu_\infty)$:

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ $X_\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$ $i \in j$ $X_i \cap X_j = \emptyset$
 μ σ -finie avec $X_i \approx X$

$$A \in \mathcal{B}_\infty \xLeftrightarrow{\text{def}} \forall n \quad A \cap X_n \in \mathcal{B}$$

$$\mu_\infty(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A \cap X_n).$$

1.2. L'opérateur S_∞ associé à une suite de contractions positives.

(T_n) suite de contractions positives sur $L^1(X)$.

$$T_n^* = S_n$$

$S_\infty : L^\infty(X_\infty) \longrightarrow L^\infty(X_\infty)$ définie par :

$$\begin{cases} S_\infty(\varphi_0, \varphi_1, \dots) = (\psi_0, \psi_1, \dots) \\ \psi_0 = S_1 \varphi_1 \dots \psi_n = S_{n+1} \varphi_{n+1} \end{cases}$$

S_∞ est une contraction positive de $L^\infty(X_\infty)$.

1.3. $\varphi^\vee$: plus petite fonction S -surharmonique majorant

e_A : potentiel d'équilibre de A . (cf. Meyer Probabilités et potentiels).

Dans toute la suite on suppose $T_n \geq T_{n+1}$ d'où $S_n \geq S_{n+1}$. Nous dirons que φ est de type décroissant si $\varphi_n \geq \varphi_{n+1}$. On a alors S_∞ de type décroissant et $\varphi^\vee$ également de type décroissant.

Soit A de type décroissant, e_A est donc de type décroissant

$$e_A = (e_0, e_1, \dots).$$

Rappelons que $e_A - S_\infty e_A$ est nulle sur ℓA

donc $e_A - S_\infty e_A = (h_0, h_1, \dots)$ h_n est nulle sur $\ell(E \cap A)$ et compte tenu de ce que la suite $A = (A_0, A_1, \dots)$ est de type décroissant : h_n est nulle sur $\ell(A_0)$ (dans X).

$$\text{Sur } A_n \setminus A_{n+1} \quad e_0 = e_1 = \dots = e_n = 1$$

$$\text{Comme } S_1 e_1 \geq S_2 e_2 \geq \dots$$

$$\text{de } h_0 = e_0 - S_1 e_1 \quad (\text{utiliser la définition de } S_\infty)$$

$$h_1 = e_1 - S_2 e_2$$

on déduit

$$\begin{cases} h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_n & \text{sur } A_n \setminus A_{n+1} \\ h_{n+1} = \dots = 0 & \text{sur } A_n \setminus A_{n+1} \end{cases}$$

2. Lemme ergodique (Brunel-Cuculescu).

2.1. Notations.

Soit famille $\{g_n\} \subset L^1(X)$.

$$A = \bigcap_k \left\{ \sup_{n \geq k} \sum_{i=k}^n g_i \geq 0 \right\}$$

$\forall x \in A$ posons $k_0(x)$ le plus petit entier n tel que $g_{0,n}(x) = \sum_{i=0}^n g_i(x) \geq 0$

$k_p(x)$ le plus petit entier $n \geq k_p$ $g_{k_p(x)+1,n}(x) \geq 0$.

$$B_{n,p}^k = \{x \mid k \leq k_p(x) \leq n\}$$

Soit pour n, p fixe e le potentiel d'équilibre de $(B_{n,p}^0, B_{n,p}^1, \dots)$

2.2. Lemme

Dans les conditions précédentes on a :

$$\int [g_0 e_0 + (g_1 - T_1 g_0) e_1 + \dots + (g_n - T_1 g_{n-1}) e_n] d\mu \geq 0$$

Démonstration.

Nous avons à prouver

$$\int [g_0 (e_0 - S_1 e_1) + \dots + g_{n-1} (e_{n-1} - S_n e_n) + g_n e_n] d\mu \geq 0$$

On a

$$h_0 = e_0 - S_1 e_1 \dots h_n = g_n e_n$$

coordonnées du potentiel d'équilibre de $B = (B_{n,p}^0, \dots)$

D'après une remarque précédente tous les h_i sont nuls sur $\partial B_{n,p}^0$. Or sur

$B_{n,p}^k - B_{n,p}^{k+1}$ la fonction à intégrer se réduit à $g_0 h_0 + \dots + g_k h_k$ d'où

$$\int_{B_{n,p}^k \setminus B_{n,p}^{k+1}} [g_0 (e_0 - S_1 e_1) + \dots + g_n e_n] d\mu = \int_{B_{n,p}^k \setminus B_{n,p}^{k+1}} [h_0 (g_0 + \dots + g_k) (h_1 - h_0) (g_1 + \dots + g_k) + \dots + (h_k - h_{k-1}) g_k] d\mu$$

comme $h_0 \leq h_1 < \dots \leq h_k$ sur $B_{n,p}^h \setminus B_{n,p}^{h+1}$.

Nous avons seulement à montrer que sur cet ensemble qui est $\{x : K_p(x) = k\}$

les sommes $g_{i,k} = \sum_{r=i}^h g_r$ sont ≥ 0 pour $0 \leq i \leq k$.

Or sur $\{x : K_0(x) = k\}$ on voit par définition de $K_0(x)$ que $g_{i,k} \geq 0$,

$\forall i = 0 \dots h$.

Sur $\{x : K_{p+1}(x) = k\}$ si $K_p(x) = s$ k est le plus entier $> s$

tel que $g_{s+1,h} \geq 0$. D'où toutes les sommes $g_{i,k}$ avec $s+1 \leq i \leq k$ sont posi-

tives. Mais d'après l'hypothèse de récurrence $g_{i,K_p(x)}(x) \geq 0$ pour tout

$i \leq K_p(x)$. D'où $\forall i$, $g_{i,k}(x) \geq 0$.

2.3. Corollaire du lemme ergodique.

Si $g_{n+1} \leq T_{n+1} g_n$, et si $e = (e_0, e_1, \dots)$ est le potentiel d'équilibre de $(A, A, A, \dots)$ alors pour tout m :

$$\int [g_0 e_0 + (g_1 - T_1 g_0) e_1 + \dots + (g_m - T_m g_{m-1}) e_m] d\mu \geq 0$$

Démonstration.

Désignons par $e^{n,p}$ le potentiel d'équilibre de $(B_{n,p}^1)$ intervenant dans le lemme précédent :

Pour tout $m \leq n$: (puisque $g_n - T_n g_{n-1} \geq 0$ positif par hypothèse).

$$\int [g_0 e_0^{n,p} + \dots + (g_m - T_m g_{m-1}) e_m^{n,p}] d\mu \geq 0$$

Pour m fixe $n \rightarrow \infty$, $B_{n,p}^k \rightarrow B_p^k$ en croissant

d'où $e^{n,0}$ converge en croissant vers le potentiel d'équilibre e^p de $(B_p^0, B_p^1, \dots, B_p^k, \dots)$.

Soit

$$\int [g_0 e_0^p + \dots + (g_m - T_m g_{m-1}) e_m^p] d\mu \geq 0 \quad \forall m$$

Comme pour tout k , $B_p^k \nearrow A$, on a en passant à nouveau à la limite :

$$\int [g_0 e_0 + \dots + (g_m - T_m g_{m-1}) e_m] d\mu \geq 0.$$

D'où le lemme.

2.4. Convergence.

$$\text{Si } g_{n+1} = T g_n \text{ et } T_i = T \quad \forall i$$

l'inégalité précédente devient $\int g e_0 d\mu \geq 0$ soit $\int g \Psi_A d\mu \geq 0$.

3. Théorème ergodique avec conditions mixtes.

Soient T_n une suite décroissante de contraction s de $L^1(X)$.

$f_n \in L^1_+$ telles que $T_{n+1} f_n \geq f_{n+1}$, et $g_n \in \mathcal{M}_+$ telle que $T_{n+1} g_n \leq g_{n+1}$.
Alors p.p. sur l'ensemble $\{\sum_{n=0}^{\infty} g_n > 0\}$ $\frac{f_0 + \dots + f_n}{g_0 + \dots + g_n}$ a une limite finie.

Démonstration.

1°) Nous nous ramenons au cas $g \in L^1_+$ en montrant que si le théorème est faux pour $g \in \mathcal{M}_+$, il l'est pour $g \in L^1$.

Supposons donc que f et g existent, $f \in L^1$ et $g \in \mathcal{M}_+$, tels que
 B , $0 < \mu(B) < +\infty$ sur B $\sum_{n=0}^{\infty} g_n > 0$ et $\frac{f_0 + \dots + f_n}{g_0 + \dots + g_n}$ ou bien n'a pas de limite ou bien tend vers $+\infty$.

Soit $B_n \subset B$ $\mu(B - B_n) \leq 2^{-(n+2)} \mu(B)$ et $g_n \cdot 1_{B_n}$
Si $D = \bigcap_n B_n$ $\mu(D) \geq \frac{1}{2} \mu(B)$ et toutes les $g_n \cdot 1_D$ sont intégrables.

$$\begin{aligned} h_0 &= g_0 \cdot 1_D \\ &\vdots \\ h_{n+1} &= T_{n+1} h_n \vee g_{n+1} \cdot 1_D \\ &\vdots \end{aligned}$$

On a évidemment $h_{n+1} \geq T_{n+1} h_n$.

Nous montrons par récurrence que $h_n \leq g_n$. Pour h_0 ceci est vrai. Si $h_n \leq g_n$

on a $T_{n+1} h_n \leq T_{n+1} g_n \leq g_{n+1}$ ce qui implique (voir la def. de h_{n+1})

$h_{n+1} = g_{n+1}$ sur D , et $h_{n+1} = T_{n+1} h_n \leq g_{n+1}$ en dehors de D .

et sur E $h_n = g_n$. D'où sur D on a le même comportement de

$$\frac{f_0 + \dots + f_n}{g_0 + \dots + g_n} \quad \text{et} \quad \frac{f_0 + \dots + f_n}{h_0 + \dots + h_n}$$

2°) Nous supposons $g \in L^1$

$$A = \{x : g_0(x) > 0 \text{ et } \overline{\lim}_n \frac{f_0 + \dots + f_n}{g_0 + \dots + g_n} = +\infty\} \quad \forall c > 0$$

$$\text{Sur } A, \forall k, \exists n \geq k \quad \sum_{i=k}^n f_i(x) - c g_i(x) \geq 0.$$

Comme

$$T_{n+1}(f_n - c g_n) \geq f_{n+1} - c g_{n+1}$$

on peut utiliser le corollaire du lemme (avec $m = 0$)

$$\int (f_0 - c g_0) e_0 d\mu \geq 0$$

D'où

$$\int g_0 e_0 d\mu = 0 \implies \int_A g_0 d\mu = 0 \implies A \text{ négligeable.}$$

3°) Soit

$$A' = \{x : \sum_n g_n(x) = +\infty \quad r_n = \frac{f_0 + \dots + f_n}{g_0 + \dots + g_n} \text{ pas de limite}\}.$$

Si $\mu(A') > 0$, on peut trouver A , $\mu(A) > 0$, $A \subset A'$, $0 < a < b$ tels que

$$\frac{\lim_n (r_n)}{n} < a < b < \overline{\lim}_n (r_n).$$

Sur A :

$$\forall k \quad \sup_{n \geq k} \sum_{i=k}^n (f_i(x) - b g_i(x)) \geq 0$$

$$\text{Comme } T_{n+1}(f_n - b g_n) \geq f_{n+1} - b g_{n+1}$$

On peut appliquer le corollaire du lemme ergodique :

$$\begin{aligned} (1) \quad b \int [g_0 e_0 + \dots + (g_n - T_n g_{n-1}) e_n] d\mu &\leq \int [f_0 e_0 + \dots + (f_n - T_n f_{n-1}) e_n] d\mu \\ &\leq \int f_0 e_0 d\mu \end{aligned}$$

D'où

$$(1') \quad \int [g_0 e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - T g_{n-1}) e_n] d\mu < +\infty$$

Sur A on a également :

$$\forall k \quad (\sup_{n \geq k} \sum_{i=k}^n (a g_i(x) - f_i(x)) \geq 0).$$

On applique le lemme avec $h_i = a g_i - f_i$:

$$\int [(h_1 - T_1 h_0) e_1^{(n,p)} + \dots + (f_n - T_n h_{n-1}) e_n^{(n,p)}] d\mu = - \int h_0 e_0^{(n,p)} d\mu$$

Cette fois d'après les hypothèses $h_{n+1} - T_{n+1} h_n \geq 0 \quad \forall n$.

D'où en appliquant Beppo-Levi : $n \rightarrow \infty$ puis $p \rightarrow \infty$

$$\int [\sum_{i=1}^{\infty} (h_i - T_i h_{i-1}) e_i] d\mu \geq - \int h_0 e_0^{(n,p)} d\mu \quad \forall n \text{ et } p$$

en appliquant Lebesgue :

$$\int [\sum_{i=1}^{\infty} (h_i - T_i h_{i-1}) e_i] d\mu \geq - \int h_0 e_0 d\mu$$

$$(2) \quad \int [h_0 e_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (h_i - T_i h_{i-1}) e_i] d\mu \geq 0$$

Compte tenu de (1) (1'), (2) et de la définition de h :

$$\begin{aligned} 0 \leq b \int (g_0 e_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (g_i - T_i g_{i-1}) e_i) d\mu &\leq \int [f_0 e_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (f_i - T_i f_{i-1}) e_i] d\mu \\ &\leq a \int (g_0 e_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (g_i - T_i g_{i-1}) e_i) d\mu \end{aligned}$$

et comme $b > a$ ceci implique

$$\int (g_0 e_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (g_i - T_i g_{i-1}) e_i) d\mu = 0$$

En particulier

$$\int g_0 e_0 d\mu = 0 \Rightarrow \int_A g_0 d\mu = 0$$

Donc $A \cap [g_0 > 0]$ est négligeable.

En recommençant avec le rapport :

$$\frac{f_k + \dots + f_n}{g_k + \dots + g_n}$$

on montre de même que $A \cap [g_k > 0]$ négligeable. D'où

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A \cap [g_k > 0] \text{ est négligeable.}$$

4. Décomposition de Hopf associée.

4.1. Décomposition.

Soit p intégrable > 0 p.p.

$$C = \{x \mid \sum_{n=0}^{\infty} T_n T_{n-1} \dots T_1 p(x) = \infty\}$$

$$D = C^c$$

$$\text{Soit } q > 0 \quad f_n = T_n T_{n-1} \dots T_1 q$$

$$g_n = T_n T_{n-1} \dots T_1 p$$

D'après le théorème ergodique précédent :

$$\frac{\sum_{n=0}^N f_n}{\sum_{k=0}^N g_n} \longrightarrow \text{limite presque partout}$$

d'où $C_p = C_q$ p.p.

4.2. Propriétés de la décomposition de Hopf.

Proposition 1.

Soit $f \in L_+^1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n T_1 f = \begin{cases} 0 \text{ ou } +\infty & \text{sur } C \\ <\infty & \text{sur } D \end{cases}$$

Démonstration. Soit p tel que $C = \{ \sum_{n=0}^{\infty} T_n \dots T_1 p(x) = +\infty \}$

On applique le théorème ergodique au rapport

$$\frac{\sum_{k=1}^n T_k \dots T_1 p}{\sum_{k=1}^n T_k T_1 f}$$

Si $0 < \sum_{k=1}^n T_k \dots T_1 f < +\infty$ on a nécessairement également $\sum_{k=1}^n T_k \dots T_1 p < \infty$

D'où

$$0 < \sum_{k=1}^n T_k \dots T_1 f(x) < +\infty \implies x \in D$$

Si $x \in C$ on a donc nécessairement $\sum_{k=1}^n T_k \dots T_1 f(x) = 0$ ou $+\infty$ et si $x \in D$

Le même théorème ergodique prouve que

$$\sum_{k=1}^n T_k \dots T_1 f(x) < +\infty.$$

Proposition 2.

Soit la contraction T_∞ définie par $T_\infty f = \lim_n T_n f$ $f \in L_+^1$

Soit $g \in L^1$ et supposons $g = 0$ sur $\{x : \sum_{n=0}^\infty T_n \dots T_1 f(x) = +\infty\}$ alors

$T_\infty g = 0$ sur cet ensemble.

Démonstration.

En décomposant $g = g^+ - g^-$ on ramène au cas $g \in L_+^1$.

Posons $f_n = \sum_{k=0}^n T_k T_{k+1} \dots T_1 f$

$$g_n = g \wedge f_n \quad \text{sur } A = \left[\sum_{n=0}^\infty T_n \dots T_1 f(x) = +\infty \right] \quad \text{on a } g_n \nearrow g.$$

En vertu de l'hypothèse $g = 0$ sur A^c on a $g_n \nearrow g$ sur tout X

$$T_\infty g = \lim_n T_\infty g_n$$

$$\begin{aligned} T_\infty g_n &\leq T_{n+1} g_n \leq T_{n+1} f_n = T_{n+1} f + T_{n+1} T_1 f + \dots + T_{n+1} T_n \dots T_1 f \\ &\leq T_1 f + T_2 T_1 f + \dots + T_{n+1} \dots T_n T_1 f \leq f_{n+1} \end{aligned}$$

D'où $T_\infty g = \lim_n T_\infty g_n \leq \lim_n f_n < +\infty$ par définition sur A .

Comme αg possède la même propriété que g

$$T_{\infty}(\alpha g) < +\infty \text{ pour tout } \alpha \text{ d'où } T_{\infty}g = 0 \text{ sur } \ell A.$$

BIBLIOGRAPHIE

I. CUCULESCU et C. FOIAS - *Czech Math. J.* 1966.