

MICHEL MÉTIVIER

Processus à liaisons complètes et processus markoviens associés

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1966-1967
« Séminaires de probabilités et statistiques », , exp. n° 13, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1966-1967____A13_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNIVERSITE DE RENNES
FACULTE DES SCIENCES

SEMINAIRE DE PROBABILITE

PROCESSUS A LIAISONS COMPLETES ET PROCESSUS

MARKOVIENS ASSOCIES

par

Michel METIVIER

Année 1966-1967

PROCESSUS A LIAISONS COMPLETES ET PROCESSUS

MARKOVIENS ASSOCIES

1. Systèmes de liaisons complètes.

Définition 1. 1° Un système de liaisons complètes (ou plus brièvement un système de liaisons) $\mathcal{C} = \{(\underline{X}, \mathcal{B}), (\underline{Z}, \mathcal{Z}), (p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, T\}$ est défini par la donnée de :

a - Deux espaces probabilisables : $(\underline{X}, \mathcal{B})$ appelé espace de phase, et $(\underline{Z}, \mathcal{Z})$ appelé espace des états.

b - Une famille (p_n) de probabilités de transition : $(z, B) \longmapsto p_n(z, B)$ de $(\underline{Z}, \mathcal{Z})$ dans $(\underline{X}, \mathcal{B})$.

c - Une application mesurable T de $(\underline{Z} \times \underline{X}, \mathcal{Z} \otimes \mathcal{B})$ dans $(\underline{X}, \mathcal{B})$. La fonction T sera appelée fonction de liaison d'ordre 1.

2° Le système est dit homogène s'il existe p telle que
 $\forall n : p = p_n$.

Définition 2. (Translatés d'un système de liaisons complètes).

On appelle $m^{\text{ième}}$ translaté du système $\mathcal{C}$ le système $\mathcal{C}_m$:

$$\mathcal{C}_m = \{(\underline{X}, \mathcal{B}), (\underline{Z}, \mathcal{Z}), (p_{m+n})_{n \in \mathbb{N}^*}, T\}$$

Un système homogène coïncide évidemment avec tous ses translatés.

Définition 3. (Fonctions de liaison d'ordre multiple).

Soient $(\underline{X}_i, \mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'espaces probabilisés isomorphes à $(\underline{X}, \mathcal{B})$. Nous noterons $(\underline{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)})$ l'espace probabilisés $(\prod_{i=1}^n \underline{X}_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}_i)$.

La fonction de liaison $T^{(k)}$ d'ordre k associée au système $\mathcal{G}$ est une application mesurable de $(\underline{Z} \times X^{(k)})$ dans $\underline{Z}$ définie par récurrence sur k de la façon suivante :

$$(1.1) \quad T^{(1)}(z; x_1) = T(z; x_1)$$

$$(1.2) \quad T^{(k)}(z; x_1 \dots x_k) = T(T^{(k-1)}(z; x_1 \dots x_{k-1}); x_k)$$

Convention de notations.

Nous noterons $x^{(n)}$ toute suite finie $(x_1 \dots x_n) \in \underline{X}^{(n)}$, avec la convention suivante : lorsque dans une même expression figurent les symboles $x^{(n)}$ et x_i , $0 \leq i \leq n$, x_i est nécessairement la i ème composante de $x^{(n)}$. De même si $k \leq n$ et $x^{(k)}$ et $x^{(n)}$ figurent dans une même expression ceci indiquera expressément que $x^{(k)}$ a pour coordonnées les k premières coordonnées de $x^{(n)}$. C'est ainsi que la formule (1.2) s'écrit avec ces conventions :

$$T^{(k)}(z, x^{(k)}) = T(T^{(k-1)}(z; x^{(k-1)}); x_k).$$

2. Processus associé à un système de liaisons.

Définition 1. (Processus associé).

Si $(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ est un processus stochastique défini sur l'espace probabilisé fondamental $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ayant $(\underline{X}, \mathcal{B})$ pour espace de phase, nous dirons que ce processus est associé au système de liaisons

$\mathcal{G} = \{(\underline{X}, \mathcal{B}), (\underline{Z}, \mathcal{Z}), (p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, T\}$ et d'état initial z si :

$$(2.1) \quad \forall B \in \mathcal{B} \quad P[X_1 \in B] = p_0(z, B)$$

$$(2.2) \quad \forall B \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}^* \quad P[X_n \in B \mid X_1 \dots X_{n-1}] = \\ = p_{n-1}(T^{(n-1)}(z; X_1 \dots X_{n-1}), B) \quad \text{P.p.s}$$

Proposition 1. (Le système projectif associé à un système de liaisons).

1) Si pour tout $z \in \underline{Z}$ et tout $m \in \mathbb{N}$ nous définissons la probabilité $P_{m,z}^{(n)}$ sur $(\underline{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)})$ au moyen des intégrales itérées :

$$(2.3) \quad \forall B^{(n)} \in \mathcal{B}^{(n)} :$$

$$P_{m,z}^{(n)}(B^{(n)}) = \int p_m(z, dx_1) \int p_{m+1}(T^{(1)}(z; x_1); dx_2) \int \dots \\ \dots \int p_{m+n-1}(T^{(n-1)}(z; x^{(n-1)}); dx_n) 1_{B^{(n)}}(x^{(n)})$$

Le système $(\underline{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)}, P_{m,z}^{(n)})$ est un système projectif d'espaces probabilisés dont la limite projective existe et est désignée par $(\underline{X}^{N*}, \mathcal{B}^{N*}, \tilde{P}_{m,z})$

2) $(\tilde{P}_{m,z})_{z \in \underline{Z}}$ est une diffusion de $(\underline{Z}, \mathcal{Z})$ dans $(\underline{X}^{N*}, \mathcal{B}^{N*})$.

3) Pour qu'un processus $(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ soit associé au système de liaisons $\mathcal{E} = \{(\underline{X}, \mathcal{B}), (\underline{Z}, \mathcal{Z}), (p_n)_{n \in \mathbb{N}}, T\}$, avec z pour état initial, il faut et il suffit que le système projectif des probabilités conjointes finies associée au processus et le système projectif $(\underline{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)}, P_{0,z}^{(n)})$ associé à $\mathcal{E}$ coïncident.

Démonstration. 1°) C'est une conséquence triviale du théorème de Ionescu-Tulcea.

2°) Puisque les (p_n) sont des probabilités de transition, pour toute fonction f mesurable sur $(\underline{X}, \mathcal{B})$ et tout entier r , l'application $z' \rightsquigarrow \int p_r(z', dx) f(x)$ est mesurable sur $(\underline{Z}, \mathcal{Z})$. En vertu de la mesurabilité de $T^{(k)}$ l'application : $(z, x^{(k)}) \rightsquigarrow \int p_{m+k}(T^k(z; x^{(k)}); dx_{k+1}) f(x_{k+1})$ est mesurable sur $(\underline{Z} \times \underline{X}^{(k)}, \mathcal{Z} \otimes \mathcal{B}^{(k)})$. La formule (2.3) montre alors, en raisonnant par récurrence sur $k = 1 \dots n$, que pour tout $B^{(n)}$ de la forme :

$B^{(n)} = B_1 \times \dots \times B_n$ l'application $z \mapsto P_{n,z}^{(n)}(B_1 \times \dots \times B_n)$ est $\mathcal{F}$ -mesurable. Le fait qu'elle soit mesurable pour tout $B^{(n)} \in \mathcal{B}^{(n)}$ résulte alors immédiatement d'un principe classique de prolongement par mesurabilité

3°) Si le processus $(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ est associée au système de liaisons $\{T, (p_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$, avec z pour état initial, la condition (2.2) exprime que $p_{n-1}(T^{(n-1)}(z; X_1 \dots X_{n-1}); B)$ est une version régulière de la probabilité conditionnelle $P[X_n \in B \mid X_1 \dots X_{n-1}]$. On en déduit immédiatement que la distribution conjointe $P^{(n)}$ des variables aléatoires $X_1 \dots X_n$ est donnée par la formule (2.3) avec $m = 0$.

Réciproquement, supposons que $P^{(n)} = P_{o,z}^{(n)}$ pour tout n . Alors :

$$P[X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n] = \int_{B_1} p_o(z, dx_1) \int_{B_2} \dots \int_{B_n} p_{n-1}(T^{(n-1)}(z, x^{(n-1)}); dx_n)$$

soit encore, en vertu de (2.3) et $P^{(n-1)} = P_{o,z}^{(n-1)}$:

$$\forall B_1 \times \dots \times B_n \in \mathcal{B}^{(n)} : P[X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n] = \int_{B_1 \times \dots \times B_{n-1}} P^{(n-1)}(dx_1 \times \dots \times dx_{n-1}) p_{n-1}(T^{(n-1)}(z; x^{(n-1)}); B_n)$$

Cette égalité exprime précisément que :

$$P[X_n \in B_n \mid X_1 \dots X_{n-1}] = p_{n-1}(T^{(n-1)}(z, X^{n-1}); B_n) \quad P\text{-p.s.}$$

D'où (2.2). Comme (2.1) résulte de (2.3) pour $n = 1$, la proposition est démontrée.

Corollaire.

$\mathcal{E} = \{(\underline{X}, \mathcal{B}), (\underline{Z}, \mathcal{Z}), (p_n)_{n \in \mathbb{N}}, T\}$ étant un système de liaisons, $\forall z \in \underline{Z}$ il existe un processus stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P}_{o,z}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ unique à une équivalence près, associé à $\mathcal{E}$ et d'état initial z .

Définition 5. (Système de liaisons équivalents).

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont dit équivalents si le processus stochastique canonique associé à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont identiques.

Exemples.

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de probabilités de transitions de $(\underline{X}, \mathcal{B})$ dans $(\underline{X}, \mathcal{B})$. Soit $T : (\underline{X}, \underline{X}) \rightarrow \underline{X}$ définie par $T(x, y) = y$. Considérons le système de liaisons $\mathcal{C} = \{(\underline{X}, \mathcal{A}), (\underline{X}, \mathcal{B}), (p_n), T\}$. Il est évident que, si l'on considère le processus de Markov canonique issu de z $(\Omega, \mathcal{F}, P_z, (X_n)_{n \in \mathbb{N}})$ défini par la famille (p_n) de transitions (p_n transition entre les instants n et $n+1$), et issu de z , le processus associé à $\mathcal{C}$ n'est autre que $(\Omega, \mathcal{F}, P_z, (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$. Si $\mathcal{C}$ est homogène le processus est homogène.

3. Processus des états d'un système de liaisons.

Théorème 1.

Soit un système de liaisons $\mathcal{C} = \{(\underline{X}, \mathcal{B}), (\underline{Z}, \mathcal{Z}), (p_n)_{n \in \mathbb{N}}, T\}$. Il existe $(\Omega, \mathcal{F})$, un processus de Markov $(\Omega, \mathcal{F}, (P_{n,z}), (\mathcal{F}_n), (\theta_n), (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}, z \in \underline{Z})$ à valeurs dans $(\underline{Z}, \mathcal{Z})$, une fonction aléatoire $(\Omega, \mathcal{F}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$, à valeurs dans $(\underline{X}, \mathcal{B})$, tels que pour tout $z \in \underline{Z}$ le processus $(\Omega, \mathcal{F}, P_{0,z}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ soit associé à $\mathcal{C}$, d'état initial z , les deux processus X_n et Z_n étant reliés par :

$$(3.1) \quad Z_n = T^{(n)}(z; X_1 \dots X_n) \quad P_{0,z} \text{ -p.s.}$$

Démonstration : Posons, pour simplifier l'écriture, $\tilde{\Omega} = \underline{X}^{\mathbb{N}^*}$, $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{B}^{\mathbb{N}^*}$ et considérons pour tout m le processus canonique associé à

$\mathcal{E}_m : (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}_{m,z}, (\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ d'état initial z . Posons :

$$(3.2) \quad \Omega = \tilde{\Omega} \times \underline{Z} \quad \mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{Z}$$

$$(3.3) \quad \forall \omega = (\tilde{\omega}, z) \in \Omega \quad Z_n(\omega) = T^{(n)}(z; \tilde{X}^{(n)}(\tilde{\omega}))$$

(cf. la convention de notations en 1.1)

$$(3.4) \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad z \in \underline{Z} \quad P_{m,z} = \tilde{P}_{m,z} \otimes \epsilon_z$$

$$(3.5) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \omega = (\tilde{\omega}, z) \in \Omega \text{ et } \tilde{\Theta}_n \text{ désignant l'opérateur de trans-}$$

lation canonique sur $\tilde{\Omega}$:

$$\Theta_n(\omega) = (T_1^{(n)}(z; \tilde{X}_1(\tilde{\omega}), \dots, \tilde{X}_n(\tilde{\omega})), \tilde{\Theta}_n(\tilde{\omega})).$$

$$(3.6) \quad X_n(\tilde{\omega}, z) = \tilde{X}_n(\tilde{\omega}) \text{ et } \mathcal{F}_n \text{ tribu engendrée par } X_1, \dots, X_n, Z_1, \dots, Z_n.$$

Les relations (3.2) à (3.6) définissent le terme

$(\Omega, \mathcal{F}, (P_{n,z}), (\Theta_n), (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}, z \in \underline{Z})$ ainsi que le processus

$(\Omega, \mathcal{F}, P_{0,z}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$, vérifiant (3.1) en vertu de (3.3), (3.4) et (3.6).

Nous allons montrer maintenant que le premier de ces termes est un processus de Markov.

Montrons d'abord que pour tout n $(P_{n,z})_{z \in \underline{Z}}$ est une diffusion de $(\underline{Z}, \mathcal{Z})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$. Pour tout $F = \tilde{F} \times \Gamma$, avec $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ et $\Gamma \in \mathcal{Z}$ on a d'après (3.4) :

$$P_{n,z}(F) = 1_{\Gamma}(z) \cdot \tilde{P}_{n,z}(\tilde{F}).$$

D'où la mesurabilité de l'application $z \mapsto P_{n,z}(\tilde{F} \times \Gamma)$ pour tout $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ et $\Gamma \in \mathcal{Z}$ (d'après la proposition 1; 2°). Le principe de prolongement par mesurabilité déjà utilisé prouve que $z \mapsto P_{n,z}(F)$ est mesurable pour tout $F \in \tilde{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{Z}$.

Montrons maintenant que les Θ_n sont bien des opérateurs de trans-

lation de la fonction aléatoire $(\Omega, \mathcal{F}, (Z_n)_{n \in \mathbb{N}})$. On a pour tout $\omega = (\tilde{\omega}, z)$; d'après (3.3) et (3.5) (avec $\omega = (\tilde{\omega}, z)$) :

$$\begin{aligned} Z_n(\theta_m(\omega)) &= T^{(n)}(T^{(m)}(z; \tilde{X}_1(\tilde{\omega}), \dots, \tilde{X}_m(\tilde{\omega})); \tilde{X}^{(n)} \circ \tilde{\theta}_m(\tilde{\omega})) \\ &= T^{(n)}(T^{(m)}(z; \tilde{X}_1(\tilde{\omega}), \dots, \tilde{X}_m(\tilde{\omega}), \dots, \tilde{X}_{m+1}(\tilde{\omega}), \dots, \tilde{X}_{m+n}(\tilde{\omega}))) \\ &= T^{(n+m)}(z; \tilde{X}_1(\tilde{\omega}), \dots, \tilde{X}_{m+n}(\tilde{\omega})) = Z_{n+m}(\omega). \end{aligned}$$

Pour montrer maintenant que $(\Omega, \mathcal{F}, (P_{n,z}), (\mathcal{F}_n), (\theta_n), (Z_n), n \in \mathbb{N}, z \in \underline{Z})$ est un processus de Markov, nous prouvons que pour tout $z \in \underline{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ et φ $\mathcal{F}$ -mesurable :

$$(3.7) \quad E_{0,z}(\varphi \circ Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E_{n,z}(\varphi \circ Z_1)$$

Pour tout $A_i \in \mathcal{B}$ et $\Gamma \in \mathcal{F}$ $[\tilde{X}_1 \in A_1, \dots, \tilde{X}_n \in A_n] \times \Gamma \in \mathcal{F}_n$, calculons, en remarquant que $P_{0,z}$ est portée par $\tilde{\Omega} \times \{z\}$ et utilisant (3.3) :

$$\begin{aligned} \int [\tilde{X}_1 \in A_1, \dots, \tilde{X}_n \in A_n] \times \Gamma \quad \varphi \circ Z_{n+1} \, dP_{0,z} &= \\ &= \epsilon_z(\Gamma) \int [\tilde{X}_1 \in A_1, \dots, \tilde{X}_n \in A_n] \varphi \circ T^{(n+1)}(z; \tilde{X}^{(n+1)}) \, d\tilde{P}_{0,z} \\ &= \epsilon_z(\Gamma) \int_{A_1 \times \dots \times A_n} \varphi \circ T^{(n+1)}(z; x^{(n+1)}) \, p_{0,z}^{(n+1)}(dx_1, \dots, dx_{n+1}) \end{aligned}$$

Comme en vertu de la définition du système projectif $(P_{0,z}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ (cf. en 2 ci-dessus), pour toute fonction ϕ sur $\underline{X}^{(n+1)}, \mathcal{B}^{(n+1)}$ -mesurable on a :

$$\begin{aligned} \int \phi(x^{(n+1)}) \, p_{0,z}^{(n+1)}(dx_1, \dots, dx_{n+1}) &= \\ &= \int p_{0,z}^{(n)}(dx_1 \times \dots \times dx_n) \int p_n(T^{(n)}(z; x^{(n)}), dx_{n+1}) \phi(x^{(n+1)}) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\int [\tilde{X}_1 \in A_1 \dots \tilde{X}_n \in A_n] \times \Gamma \varphi \circ Z_{n+1} dP_{O,Z} =$$

$$\varepsilon_Z(\Gamma) \int_{A_1 \times \dots \times A_n} P_{O,Z}^{(n)}(dx_1 \times \dots \times dx_n) \int p_n(T^{(n)}(z; x^{(n)}); dx_{n+1}) \varphi \circ T^{(n+1)}(z; x^{(n+1)})$$

Si donc nous posons :

$$\begin{aligned} \psi(z, x^{(n)}) &= \int p_n(T^n(z, x^{(n)}); dx_{n+1}) \varphi \circ T^{(n+1)}(z; x^{(n+1)}) \\ &= \int p_n(T^n(z, x^{(n)}); dx_{n+1}) \varphi \circ T^1(T^n(z; x^{(n)}), x_{n+1}) \end{aligned}$$

compte tenu de la relation suivante, conséquence immédiate de (2.3), (3.3) et (3.4)

$$E_{n,z'}(\varphi \circ Z_1) = \int p_n(z', dx_1) \varphi \circ T^1(z', x_1)$$

nous avons

$$\psi(z, x^{(n)}) = E_{n, T^{(n)}(z; x^{(n)})}(\varphi(Z_1))$$

soit

$$\begin{aligned} \int [\tilde{X}_1 \in A_1 \dots \tilde{X}_n \in A_n] \times \Gamma \varphi \circ Z_{n+1} dP_{O,Z} = \\ \varepsilon(\Gamma) \int_{A_1 \times \dots \times A_n} P_{O,Z}^{(n)}(dx_1 \dots dx_n) E_{n, T^{(n)}(z; x^{(n)})}(\varphi \circ Z_1) \end{aligned}$$

ce qui compte tenu de (3.4) s'écrit :

$$\begin{aligned} \int [\tilde{X}_1 \in A_1 \dots \tilde{X}_n \in A_n] \varphi \circ Z_{n+1} dP_{O,Z} = \\ \int [\tilde{X}_1 \in A_1 \dots \tilde{X}_n \in A_n] \times \Gamma E_{n, Z_n(\omega)}(\varphi \circ Z_1) P_{O,Z}(d\omega) \end{aligned}$$

Cette égalité exprime précisément que

$$E_{O,Z}(\varphi \circ Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E_{n, Z_n}(\varphi \circ Z_1)$$

soit la propriété de Markov.

Corollaire.

Lorsque le système de liaison $\mathcal{C}$ est homogène, le processus de Markov $(\Omega, \mathcal{F}, (P_{n,z}), (\theta_n), (Z_n))$ est homogène (i.e. : $P_{n,z} = P_{0,z}$, $\forall n$ et z).

4. Un problème ergodique pour les systèmes homogènes.

Un problème limite naturel pour un processus stochastique est de savoir si les distributions de dimension finie des variables $(X_n, \dots, X_{n+m})$ "convergent" vers une distribution limite lorsque n tends vers l'infini.

Posons pour tout $B^{(\ell)} \in \bigotimes_{i=1}^{\ell} \mathcal{B}_i$:

$$p_{\ell}^{(n)}(z, B^{(\ell)}) = P_{0,z}[(X_{n+1} \dots X_{n+\ell}) \in B^{(\ell)}]$$

Le problème précédent se formule : la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{\ell}^{(n)}(z, B^{(\ell)})$ existe-t-elle pour tout ℓ et tout $B^{(\ell)} \in \mathcal{B}^{(\ell)}$.

Si nous considérons uniquement le cas d'une chaîne homogène et si nous désignons par τ la fonction de transition du processus de Markov associé, $\tau(z, \Gamma) = P_{0,z}[Z_1 \in \Gamma] = P_{0,z}^{(1)}[T(z, X_1) \in \Gamma]$ soit :

$$(4.1) \quad \tau(z, \Gamma) = \int 1_{\Gamma}(T(z; x)) p(z, dx)$$

l'opérateur associé à cette fonction de transition, opérant sur les fonctions mesurables bornés sur $(Z, \mathcal{Z})$: $\varphi \rightsquigarrow \tau\varphi$ est défini par :

$$(4.2) \quad \tau\varphi(z) = \int \tau(z, dz') \varphi(z')$$

On voit facilement que si $F \in \mathcal{F}_n$ (tribu engendrée par $Z_1 \dots Z_n$) et si on pose $\varphi_F(z) = P_{0,z}(F)$:

$$(4.3) \quad P_{0,z}[\theta_n^{-1}(F)] = \tau^n \varphi_F(z)$$

et dans le cas particulier où $F = [(X_1, \dots, X)] \in B^{(\ell)}$ soit :

$$\varphi_F(z) = p_\ell^{(0)}(z, B^{(\ell)}) \quad \text{et donc} \quad p_\ell^{(n)}(z, B^{(\ell)}) = \tau^n \varphi_F(z),$$

Le problème limite que nous avons posé plus haut apparaît donc à certains égards comme un cas particulier du problème suivant : dans quelles conditions la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau^n \varphi(z)$ existe-t-elle ?

Il s'agit d'un problème ergodique fort typique. Il y a des résultats généraux allant dans ce sens (voir par exemple : J. Neveu [6], Doeblin [1] et [2]).

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE.

- [1] DOEBLIN - Thèse. Bucarest.
 - [2] DOEBLIN et FORTET - Sur les chaînes à liaisons complètes. Bull. Soc. Math. France, LXV (1937), 132-148.
 - [3] IOSIFESCU - Systèmes aléatoires à liaisons complètes à un ensemble quelconque d'états. Revue Math. Pures et Appl. Acad. R.P.R. 1963, 8, 611-645, 9, 91-92 (en Russe).
 - [4] IOSIFESCU - Sur l'ergodicité uniforme des systèmes aléatoires homogènes à liaisons complètes à un ensemble quelconque d'états. Bull. Math. de la soc. Math. Phys. de la R.P.R. Tome 7 (55), n° 3-4, 1963.
 - [5] IOSIFESCU - Quelques propriétés asymptotiques des systèmes aléatoires homogènes à liaisons complètes. Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquées. Tome X n° 5, 1965.
 - [6] NEVEU - Bases mathématiques du calcul des Probabilités. Masson.
 - [7] THEODORESCU - Une propriété limite pour les chaînes à liaisons complètes. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 259 (21 sept. 1964).
-