

M. MÉTIVIER

Lemme de Brunel et applications

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1966-1967
« Séminaires de probabilités et statistiques », , exp. n° 10, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1966-1967____A10_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LEMME DE BRUNEL ET APPLICATIONS

Par M. METIVIER.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace probabilisé.

1 - Préliminaires sur les contractions.

T contraction positive de L^1 . T^* son adjointe.

1.1 - Fonction excessive.

h est dite excessive dans la suite si $h \geq T^*h$.

1.2 - Proposition 1 :

Il existe une plus petite fonction excessive majorant $\varphi > 0$.

Cette fonction est définie comme limite croissante de la suite ϕ_n définie par récurrence

$$\phi_0 = \varphi \quad \phi_{k+1} = \varphi \vee T^* \phi_k.$$

Démonstration :

Comme T^* est une contraction, on voit immédiatement par récurrence sur k que : $\|\phi_k\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$

En outre $\phi_1 \geq \varphi_0$ et si $\phi_k \geq \phi_{k-1}$ on a :

$$\phi_{k+1} = \varphi \vee T^* \phi_k \geq \varphi \vee T^* \phi_{k-1} = \phi_k \quad \text{d'où par récurrence sur}$$

k la croissance de la suite (ϕ_n) .

La suite ϕ_n converge donc vers une fonction ψ_φ . Montrons que cette fonction est excessive :

$$T^* \psi_\varphi = \lim_n T^* \phi_n \leq \lim_n \phi_{n+1} = \psi_\varphi$$

1.3 - Autre expression de ψ_E lorsque $T = 1_E$ $E \in \mathcal{C}$

On a , (en vertu de $T^* 1_E \leq 1$) :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= 1_E V T^* 1_E = 1_E + T^*(1_E) - 1_E \cdot T^* 1_E = 1_E + T^* 1_E - 1_E T^* 1_E = \\ &= 1_E + 1_E^c T^* 1_E.\end{aligned}$$

Posons alors $T_E = T \circ J_E^c$

avec $J_E^c : f \longmapsto 1_E^c \cdot f$

On a : $T_E^* = J_E^c \circ T^*$

D'où

$$\phi_1 = 1_E + T_E^* 1_E$$

et par récurrence sur k du fait que :

$$\phi_k = 1_E + 1_E^c T^* \phi_{k-1} = 1_E + T_E^* \phi_{k-1}$$

on déduit :

$$\phi_n = \sum_{k=0}^n T_E^*{}^k 1_E.$$

D'où :

$$\boxed{\psi_E = \sum_{k=0}^{\infty} T_E^*{}^k 1_E.}$$

2 - Lemme ergodique

Pour tout $k \leq n$ on pose $T_{k,n} = \sum_{\lambda=k}^n T^\lambda$

$$E_f = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{n>k} \{ T_{k,n} f \geq 0 \}$$

Alors pour tout $f \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ et tout $E \in \mathcal{G}$ $E \in E_f$ on a $\int_E f \, d\mu \geq 0$.

Démonstration :

Soit $e_n = \bigcap_{i=0}^n \{ T_{i,n} f \geq 0 \} \cap E$

1°) On a $E = \bigcup_{k \geq n} e_k$ pour tout n soit $E = \limsup_k e_k$:

Si $x \in e_k \subset E_f$ il existe un $l > k$ tel que $T_{k,l} f(x) > 0$.

Soit l le plus petit des indices possédant cette propriété. On a nécessairement

$T_{k',l} f(x) \geq 0$ pour tout $k+1 \leq k' < l$ sinon $T_{k',l} f(x) < 0$ joint

à $T_{k,l} f(x) = T_{k,k'} f(x) + T_{k',l} f(x) \geq 0$ impliquerait $T_{kk'} f(x) > 0$

contrairement à l'hypothèse que l est le plus petit des indices $> k$ tel que

$T_{k,l} f(x) > 0$. Soit $i < k$. Comme $T_{i,l} f(x) = T_{ik} f(x) + T_{k,l} f(x) \geq 0$ On a

donc pour tout $x \in e_k$:

$T_{i,l} f(x) \geq 0$ pour tout $i \leq l$. Soit $x \in e_l$. Ceci prouve que

$\forall k \quad e_k \subset \bigcup_{l > k} e_l$ d'où $\bigcup_{k \geq 0} e_k = \bigcup_{k \geq n} e_k \quad \forall n$.

En outre si $x \in E_f \cap E$, d'après la définition de E_f

$x \in \bigcup_{n > 0} [T_n f \geq 0]$ donc il existe un plus petit $n > 0$ tel que $T_n f(x) \geq 0$

et en reprenant le raisonnement précédent $x \in e_n$. D'où

$$E \subset \bigcup_{n > 0} e_n = \bigcup_{k \geq 0} e_k.$$

$$(2.1) \quad \text{On pose } \Gamma_{i,n} = e_i \otimes e_{i+1} \dots \otimes e_n$$

D'après ce qui précède $l_{\Gamma_{i,n}} = \psi_{i,n} \xrightarrow{n} l_{\Gamma}$ pour tout i .

2°) Construction de $\phi_{0,n} \leq \psi_{\Gamma}$ telle que $\int f \cdot \phi_{0,n} d\mu \geq 0$.

Nous définissons $\phi_{i,n}$ $i \leq n$ de la façon suivante : $(\phi_{i,n} \in L^{\infty})$:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \phi_{n,n} = \psi_{n,n} \\ \phi_{n-1,n} = \psi_{n-1,n} \vee T^* \phi_{n,n} \\ \vdots \\ \phi_{0,n} = \psi_{0,n} \vee T^* \phi_{1,n} \end{cases}$$

On a (en vertu de $\psi_{n,n} < \psi_{n-1,n}$) $\phi_{n,n} \leq \phi_{n-1,n}$. Par

réurrence sur $k = n \dots 0$ on voit que $\phi_{k,n} \leq \phi_{k-1,n} \leq 1 \quad \forall k = 1 \dots n$:

en effet une telle inégalité jointe à $\psi_{k,n} \leq \psi_{k-1,n}$ et à la positivité de T^* implique trivialement

$$\phi_{k-2,n} = \psi_{k-2,n} \vee T^* \phi_{k-1,n} \geq \psi_{k-1,n} \vee T^* \phi_{k,n} = \phi_{k-1,n}.$$

Nous définissons également :

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \Gamma_{0,n} &= \phi_{0,n} - T^* \phi_{1,n} \\ \Gamma_{1,n} &= \phi_{1,n} - T^* \phi_{2,n} \\ &\vdots \\ \Gamma_{n,n} &= \phi_{n,n} \\ \Gamma_{0,n} + T^* \Gamma_{1,n} + \dots + T^{*n} \Gamma_{n,n} &= \phi_{0,n} \end{aligned}$$

Si $x \in E_{k,n}$ on a pour tout $i \geq k$ $\psi_{i,n}(x) = 0$ d'où :

$$\phi_{i,n}(x) = T^k \phi_{i+1,n}(x)$$

d'où :

$$x \notin E_{k,n} \implies \Gamma_{i,n}(x) = 0 \text{ pour tout } i \geq k$$

Si donc $x \in E_{k,n} - E_{k+1,n}$ on a :

$$(2.4) \quad \Gamma_{k+1,n}(x) = \Gamma_{k+2,n}(x) = \dots = \Gamma_{n,n}(x) = 0$$

et

$$(2.5) \quad 1 = \psi_{k,n}(x) = \phi_{k,n}(x) = \dots = \phi_{0,n}(x)$$

Comme la suite $(T^k \phi_{i,n})_{i \leq n}$ est décroissante il résulte de

(2.5) et de la définition des $\Gamma_{i,n}$ que $\Gamma_{0,n} \leq \Gamma_{1,n} \leq \dots \leq \Gamma_{k,n}$ sur

$E_{k,n} - E_{k+1,n}$. Ceci entraîne que sur $E_{k,n} - E_{k+1,n} \subset e_k$:

$$\Gamma_{0,n} f + \Gamma_{1,n} T f + \dots + \Gamma_{k,n} T^k f = \Gamma_0 f + \dots + \Gamma_k T^k f =$$

$$= T_{0,k} f \cdot \Gamma_0 + (\Gamma_1 - \Gamma_0) T_{1,k} f + \dots + (\Gamma_k - \Gamma_{k-1}) T_{k,k}^k f$$

$$\geq 0$$

D'où finalement sur $E_{0,n} = \bigcup_k E_{k,n} - E_{k+1,n}$:

$$\Gamma_{0,n} f + \Gamma_{1,n} T f + \dots + \Gamma_{n,n} T^n f \geq 0$$

Comme sur $E_{0,n}$ $T_0 = \Gamma_1 = \dots = \Gamma_n = 0$ on a :

$$0 \leq \int (\Gamma_{0,n}^f + \Gamma_{1,n}^{T^f} + \dots + \Gamma_{n,n}^{T^n f}) d\mu = \int f(\Gamma_{0,n} + T^* \Gamma_{1,n} + \dots + T^{*n} \Gamma_{n,n}) d\mu$$

Soit d'après (2.3) :

$$(2.6) \quad 0 \leq \int f \cdot \phi_{0,n} d\mu$$

$$3^\circ) \quad \phi_{0,n} \xrightarrow{\quad} \psi_E$$

Comme $\psi_{i,n} \leq 1_E$ pour tout i et tout n , il résulte de la définition de ψ_E donnée en (1.1) que :

$$(2.7) \quad \phi_{i,n} \leq \psi_E \text{ pour tout } i \text{ et } n.$$

Remarquons que : en vertu de la croissance de $i \rightarrow \psi_{i,n}$:

$$\begin{aligned} \phi_{0,n} &= \psi_{0,n} \vee T^*(\psi_{1,n} \vee T^*(\psi_{2,n} \vee T^* \dots (\psi_{i,n} \vee T^* \dots \vee T^* \psi_{n,n}))) \\ (2.8) \quad &\geq \underbrace{\psi_{i,n} \vee T^*(\psi_{i,n} \vee T^*(\dots T^*(\psi_{i,n})))}_{i \text{ termes}} \text{ pour tout } i \end{aligned}$$

En revenant aux notations de 1°), soit ϕ_i telle que

$$\phi_i(x) \geq \psi_E(x) - \varepsilon$$

$$\phi_i(x) = \underbrace{1_E \vee T^*(1_E \vee T^*(\dots \vee T^* 1_E))}_{i \text{ termes}}$$

Comme $\psi_{i,n} \xrightarrow{n} 1_E$ (limite croissante), on peut trouver

n_ε tel que compte tenu de (2.8) pour tout $n \geq n_\varepsilon$:

$$(2.9) \quad \phi_{0,n}(x) \geq \psi_E(x) - 2\varepsilon$$

En vertu de (2.7) et (2.9) on a donc :

$$(2.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{0,n}(x) = \psi_E(x).$$

4°) De (2.6) (2.7) et (2.10) résulte la formule :

En effet d'après le théorème de la convergence bornée de Lebesgue :

$$\int f \cdot \psi_E \, du = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f \cdot \phi_{0,n} \, du \geq 0.$$

3 - Deuxième lemme de Brunel.

$$E''_f = (\{ \overline{\lim}_n T_{0,n} f > +\infty \} \cap C) \cup (\{ \lim_{n \rightarrow \infty} T_{0,n} f \geq 0 \} \cap D). \quad (1)$$

(Cet ensemble contient l'ensemble $E'_f = \{ \lim_{n \rightarrow \infty} T_{0,n} f \geq 0 \} (A. Koglu).$)

Alors si $E \subset E''_f \quad \int f \psi \, du \geq 0.$

Démonstration :

$$E_1 = E \cap C$$

$$E_2 = E \cap D$$

$$1^\circ) \quad \text{Soit } f_0 > 0 \text{ telle que } \left[\sum_{k=0}^{\infty} T^k f_0 = +\infty \right] = C$$

$$\text{Sur } E_1 \quad \overline{\lim}_n \sup T_{0,n} (f + \epsilon f_0) = +\infty$$

$$\text{D'où } E_1 \subset E_{f+\epsilon f_0} \xrightarrow{\text{(lemme de Brunel)}} \int_{E_1} \psi (f + \epsilon f_0) \, du \geq 0$$

comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$:

$$\int \psi_{E_1} f \, du \geq 0.$$

(1) : C : partie dissipative de l'opérateur T : non la définitive dans le cours de la démonstration.

D : partie conservative.

$$2^{\circ}) \quad 1_E \leq \psi_{E_1} + \psi_{E_2} \quad \psi_E \leq \psi_{E_1} + \psi_{E_2}$$

$$0 \leq \psi_E - \psi_{E_1} \leq \psi_{E_2}$$

en vertu de la propriété suivante de la partie dissipative :

$$\psi \geq 0 \text{ et } \{\psi > 0\} \subset D \implies [T^* \psi > 0] \subset D.$$

on a $[\psi_{E_2} > 0] \subset D$ ou encore ψ_{E_2} nulle en C d'où ;

$$\psi_E - \psi_{E_1} \text{ nulle en } C.$$

$$\text{Posons } X = (1 - T^*) \psi_E = (1 - T^*)(\psi_E - \psi_{E_1}) \text{ (parce que } \psi_{E_1} \text{}$$

harmonique).

Si nous pouvons montrer que $T^{*n}(\psi_E - \psi_{E_1}) \rightarrow 0$ il en résultera

que :

$$X + T^* X + \dots + T^{*n} X + \dots = \psi_E - \psi_{E_1}$$

1) Supposons que $f_0 + T f_0 + \dots + =$ intégrale sur E_2 alors :

$$+\infty > \int_{E_2} (f_0 + T f_0 + \dots + T^n f_0 + \dots) d\mu.$$

Soit

$$+\infty > \int f_0 (1_{E_2} + T^* 1_{E_2} + \dots +) d\mu.$$

D'où :

$$1_{E_2} + T^* 1_{E_2} + \dots + < +\infty$$

$$\text{et } \lim_{k \rightarrow \infty} T^{*k} 1_{E_2} + T^{*k+1} 1_{E_2} \dots = 0$$

ce qui implique :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^{*n} \psi_{E_2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq n} T^{*k} 1_{E_2} = 0$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^{*n} (\psi_E - \psi_{E_1}) = 0$$

ce qui implique :

$$\psi_E - \psi_{E_1} = \sum_{k \geq 0} T^{*k} X.$$

Evaluons :

$$\int f (\psi_E - \psi_{E_1}) d\mu = \lim_n \int X \left(\sum_{k=0}^n T^k f \right) d\mu$$

Or $X \leq \psi_E - \psi_{E_1}$ nul sur C

$$X \leq (1 - T^*) \psi_E \text{ nul en dehors de } E.$$

Comme $0 \leq X$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} f + T f + \dots + T^n f \geq 0$ par définition sur

$E_f^n \cap D$, si en outre :

(2) $(f) + T(f) + \dots +$ intégrable sur E_2 , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int X \left(\sum_{k=0}^n T^{*k} f \right) d\mu \geq 0$$

Nous avons maintenant ^à nous affranchir de (1) et (2) .

Comme sur D (par définition) :

$$\sum_{k \geq 0} T^k f_0 < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{k \geq 0} T^k (f) < +\infty$$

on peut trouver une suite $E_2^m \nearrow E_2$ telle que sur chaque E_2 (1) et (2) soient vrais.

$$\text{On pose } E^m = E_1 \cup E_2^m$$

et $\psi_E^m \longrightarrow \psi_E$

Comme d'après la première partie de la démonstration on a :

$$\int f \psi_E^m d\mu = 0$$

on en déduit : $\int f \psi_E d\mu = 0$