MICHEL MÉTIVIER

Martingales à valeurs vectorielles Application à la dérivation

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1965-1966
« Publications des séminaires de mathématiques », , exp. n° 4, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1965-1966____A4_0>

Martingales à Valeurs Vectorielles

Application à la dérivation

par

Michel METIVIER

Introduction.

La théorie des martingales à valeurs dans un espace vectoriel localement convexe général est loin d'avoir atteint le même état d'élaboration que la théorie des martingales à valeurs réelles.

Dans cet exposé, je me propose de donner un aperçu de ce qui me paraît être l'état actuel de la théorie des martingales vectorielles (à base croissante), telle qu'elle résulte des travaux de S. D. Chatterj , F. Scalora, A et C. Ionescu Tulcea, M. Drimi et O. Hans, J. Neveu et moi-même. Je donnerai quelques résultats qui n'ont pas encore été publiés ou qui ont été énoncés sans démonstration (notamment dans [21]).

De même que dans le cas réel, la théorie des martingales peut être appliquée au problème de la "dérivation" des fonctions d'ensembles. Nous envisagerons ici la "dérivation " relativement à une mesure positive bornée μ des fonctions d'ensembles définies sur une tribu $\mathcal{F}$ de parties d'un ensemble Ω, à valeurs dans un espace vectoriel localement convexe $\mathbb{V}$. L'existence d'intégrants de Radon-Nikodym, dans le cas des mesures vectorielles, n'ayant d'ailleurs pas reçu de réponse complète, ceci nous permet d'obtenir quelques résultats prolongeant ceux célèbres de J. Dieudonné (cf. [6] et [4]), et précisant d'autres que nous avons précédemment donnés (cf. [18]

§ 1 - Théorèmes pour Martingales à Valeurs Vectorielles.

1. - Préliminaires - Problèmes.

1.1 - Propriétés scalaires - Propriétés faibles.

Dans toute la suite $\mathbb{W}$ désignera un espace localement convexe en dualité avec $\mathbb{W}'$ (cf. [3] chap. IV).

Une fonction f définie sur un ensemble E, à valeurs dans $\mathbb{W}'$, sera dite posséder scalairement une propriété P si pour tout $v' \in \mathbb{W}'$ la fonction $v' \circ f$ (notée aussi $< f, v' >$) possède la propriété P.

Les propriétés faibles sont celles qui se définissent relativement à la topologie faible $\sigma(\mathbb{W}, \mathbb{W}')$ de $\mathbb{W}$. (cf. [3] chap. IV)

1.2 - Base de Martingale.

I désignera toujours un ensemble d'indices ordonné par une relation notée $\leq$ et filtrant à droite pour cette relation.

$(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ désignera un espace mesuré complet, μ étant une mesure positive bornée.

Une base de martingale sera toujours pour nous la donnée, outre $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$, d'une famille croissante $(\mathfrak{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$ de sous tribus de $\mathfrak{F}$.

$\mathfrak{F}_\infty$ désignera la complétion relativement à μ de la tribu engendrée par $\bigcup_{\alpha \in I} \mathfrak{F}_\alpha$.

1.2 - Martingales faibles à valeurs dans V.

Nous dirons que le terme $(\mathfrak{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une martingale faible (pour la dualité $< \mathbb{V}, \mathbb{V}' >$) si :

(M_1) Pour tout α, f_α est une fonction définie sur Ω , à valeurs dans $\mathbb{V}$, scalairement $\mathfrak{F}_\alpha$-mesurable.

(M_2) Pour tout α et tout $F \in \mathfrak{F}_\alpha$ l'intégrale faible $\int_F f_\alpha \, d\mu$ est un élément de $\mathbb{V}$ (i.e. : la forme linéaire $v' \rightsquigarrow \int_F < f_\alpha, v' > d\mu$ s'identifie par la dualité $< \mathbb{V}, \mathbb{V}' >$ à un élément de $\mathbb{V}$ noté $\int_F f_\alpha d\mu$).

(M_3) Pour tout $\alpha \leq \beta$ et tout $F \in \mathfrak{F}_\alpha$:

$$\int_F f_\alpha \, d\mu = \int_F f_\beta \, d\mu.$$

1.3 - Martingales fortes à valeurs dans un Banach.

Lorsque $\mathbb{V}$ est un espace de Banach nous dirons que $(\mathfrak{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une martingale forte si elle vérifie les conditions (M'_1), (M'_2) et (M'_3) obtenus en remplaçant dans (M_1), (M_2) et (M_3) la notion de mesurabilité scalaire par celle de mesurabilité forte (ou mesurabilité au sens de [9] par exemple) et celle d'intégrabilité faible par celle d'intégrabilité forte (Intégrabilité au sens de S. Bochner cf. [1] ou [9]).

Il est évident que toute martingale forte est une martingale faible pour la dualité $< \mathbb{V}, \mathbb{V}' >$

1.4 - Problèmes.

Soit $(\mathfrak{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ une martingale faible (resp. forte).

Problème I. Lorsque I n'a pas de plus grand élément soit $\hat{I}$ l'ensemble ordonné obtenu en ajoutant à I un plus grand élément noté ∞, et soit $\mathfrak{F}_\infty$ comme définie en 1.2.

Existe-t-il une application f_∞ de Ω dans V telle que $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in \hat{I}}$ soit une martingale faible (resp. forte) ?

Problème II. Si f_∞ existe comme solution du problème I, la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge-t-elle suivant l'ensemble filtrant I pour un mode convenable de convergence vers f_∞ ?

Problème III. Indépendamment de l'existence d'une solution du problème I, la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge-t-elle en un sens convenable vers une application f de Ω dans $\mathbb{W}$?

1-4- Les résultats connus dans le cas fort.

Nous résumons ici les résultats obtenus dans le cas réel avec leurs analogues (et leurs lacunes) dans le cas des martingales fortes à valeurs dans un espace de Banach.

a - Cas Réel - (Théorèmes de Doob et Helms.).

Le problème I admet une solution si et seulement si (f_α) est terminalement equi-intégrable

La famille $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge alors (Problème II) vers f_∞ dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ - Si $I = \mathbb{N}$, la convergence a lieu également μ.p.p

Théorèmes de Doob et Krickeberg :

Si $\sup_\alpha \int |f_\alpha| d\mu \leq K < +\infty$ la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge en mesure vers une fonction f (problème III).

La convergence a même lieu μ.p.p. si $I = \mathbb{N}$.

b - Martingales fortes .

Il est bien connu (voir par exemple [5] et [25] qu'une martingale forte $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ à valeurs dans un espace de Banach B peut très bien être équiintégrables sans qu'il existe pour autant de solution au problème I.

On a toutefois :

<u>Théorème de Chatterji - Scalora. Tulcea</u> (problème I)

Si B est le dual d'un espace de Banach, et est séparable , le problème I admet une solution pour la martingale forte $(f_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si (f_n) est équi-intégrable .

Nous généralisons ce résultat au cas I quelconque plus loin.

Le problème II fort est entièrement résolu par un théorème de A et C Tulcea et Neveu que nous donnons plus loin (Th.3)

Enfin pour une martingale forte $(f_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace de Banach B, le Problème III a reçu la réponse partielle suivante :

<u>Théorème de Chatterji-Scalora - Tulcea</u> (Problème III)

Si B est le dual d'un espace de Banach et est séparable, et si $\sup_n \int |f_n| \, d\mu < +\infty$, (f_n) converge μ.p.p vers une fonction f.

Dans la suite nous donnons quelques résultats relativement aux martingales faibles et également quelques compléments sur les martingales fortes.

2. Martingales faibles.

Nous considérons une martingale faible $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ à valeurs dans $\mathbb{V}$. On désigne par $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de $\mathbb{V}$ convexes équilibrées et compactes pour $\sigma(\mathbb{V}, \mathbb{V}')$, filtrant pour la relation d'inclusion $\subset$ et constituant un recouvrement de $\mathbb{V}$.

Théorème 1.

On suppose que la martingale $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ vérifie l'une des conditions (A) ou (B) suivante :

(A) Il existe une suite croissante (Ω_n) extraite de $\mathcal{F}_\infty$ et (Q_n) extraite de $\mathfrak{S}$ et une suite croissante (α_n) d'indices telles que : $\mu(\bigcup_n \Omega_n) = \mu(\Omega)$ et :

Pour tout $\alpha \geq \alpha_n$ $\quad 1_{\Omega_n}^{(\omega)} \cdot f_\alpha(\omega) \in Q_n \quad \mu$. p . p . (1)

En outre $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ est scalairement terminalement uniformément intégrable (cf. [15] ou [17]).

(B) Il existe une sous martingale réelle $(\mathcal{F}_\alpha, \lambda_\alpha)_{\alpha \in I}$ terminalement uniformément intégrable et $Q \in \mathfrak{S}$ tels que :

---

(1) 1_F désigne l'indicateur de l'ensemble F.

Pour tout $\alpha \in I$ $\quad f_\alpha(\omega) \in \lambda_\alpha(\omega)\, Q$ $\quad \mu$. p . p .

Alors :

1°) Il existe f_∞ telle que $(\mathfrak{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in \hat{I}}$ soit une martingale faible. La famille $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge scalairement en moyenne vers f_∞ .

2°) Si $\mathbb{W}'$ admet un ensemble dénombrable partout dense pour la $\mathfrak{S}$-topologie, il est possible d'extraire de I une suite (α_n) telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \text{faible } f_{\alpha_n}^{(\omega)} = f_\infty^{(\omega)} \quad \mu . p . p .$$

3°) Si $\mathbb{W}'$ admet un ensemble dénombrable partout dense pour la $\mathfrak{S}$-topologie et si $I = \mathbb{N}$;

$$\lim_{n \to \infty} \text{faible } f_n(\omega) = f(\omega) \quad \mu . p. p .$$

Pour une démonstration de ce théorème voir [22] . Ce théorème complète et précise des théorèmes analogues publiés dans [18] et [21] . Il résulte immédiatement de la théorie des martingales réelles (théorème de Helms [11]) que pout tout $v' \in \mathbb{W}'$ la martingale réelle $(< f_\alpha, v' >)_{\alpha \in I}$ converge en moyenne vers un $\tilde{h}_{v'} \in L(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, \mu)$. Il faut ensuite utiliser une méthode de relèvement, notamment un théorème de A et C Ionescu Tulcea (cf. [12]) pour montrer l'existence de f_∞ vérifiant :

$$< f_\infty , v' > = \tilde{h}_{v'} \quad \mu . p . p . \text{ pour tout } v'.$$

Nous donnons également une réponse partielle au problème III.

<u>Théorème 2.</u>

1°) $(\mathfrak{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ étant une martingale faible, l'une des conditions (A') ou (B') ci-dessous est suffisante pour que $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge scalairement en mesure vers une application f de Ω dans $\mathbb{W}$, scalairement $\mathfrak{F}_\infty$-mesurable :

(A') $(\mathfrak{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in I}$ est scalairement à variation bornée ; il existe une suite (Ω_n) croissante extraite de $\mathfrak{F}_\infty$, (Q_n) extraite de $\mathfrak{S}$ et une suite (α_n) extraite de I telles que : $\mu(\bigcup_n \Omega_n) = \mu(\Omega)$ et

Pour tout $\alpha \geq \alpha_n$ $\quad 1_{\Omega_n}(\omega) \cdot f_\alpha(\omega) \in Q_n$ $\quad \mu . p . p .$

(B') Il existe une sous-martingale $(\mathfrak{F}_\alpha, \lambda_\alpha)_{\alpha \in I}$ **réelle**, telle que $\sup_\alpha \int |f_\alpha| \, d\mu = K < +\infty$ et un $Q \in \mathfrak{S}$ tel que :

pour tout $\alpha \in I$ $\quad f_\alpha(\omega) \in \lambda_\alpha(\omega) \cdot Q$ $\quad \mu . p . p .$

2°) Si $I = \mathbb{N}$ et si $\mathbb{W}'$ admet un ensemble dénombrable partout dense pour la $\mathfrak{S}$-topologie on a :

$$\lim_{n\to\infty} \text{faible } f_n(\omega) = f(\omega) \quad \mu . p . p .$$

Pour une démonstration voir [22] . La démonstration utilise le théorème de Krickeberg (cf. [16]) sur la convergence stochastique des martingales réelles à variation bornée et des méthodes de relèvement analogues à celles utilisées pour le théorème 1.

3. - Martingales fortes.

Dans le n° 3, $\mathbb{W}$ est un espace de Banach, en dualité avec $\mathbb{W}'$, Lorsque nous utiliserons le vocable faible pour $\mathbb{W}$, sans préciser $\mathbb{W}'$ nous entendrons par là que $\mathbb{W}'$ est le dual de l'espace de Banach $\mathbb{W}$. Si par contre $\mathbb{W}$ est un dual $\mathbb{B}'$ d'espace de Banach $\mathbb{B}$, le mot "faible" relatif à dualité $\sigma(\mathbb{B}', \mathbb{B})$ sera souvent remplacé par "vague".

3.1 - Passage du cas faible au cas fort.

Si $(\mathfrak{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in I}$ est une martingale forte, c'est à fortiori une martingale faible, et on peut dans certains cas lui appliquer les théorèmes qui précèdent. Soit alors f solution du problème I faible. Si on peut montrer que f_∞ prend ses valeurs dans un sous-espace séparable de $\mathbb{W}$, il résulte d'un théorème de Pettis (cf. [24] et [9]) que f_∞ est fortement mesurable. Si on peut alors prouver que $\int^* ||f_\infty|| \, d\mu < +\infty$; on a prouvé que $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in\hat{I}}$ est une martingale forte. Dans [26], [20] et [21] sont énoncés des lemmes permettant de faire le passage du cas faible au cas fort.

La solution du problème II fort est complètement donnée par un théorème très important du à A et C. Ionescu Tulcea et J. Neveu :

Théorème 3.

Si f_∞ , solution du problème I fort existe, (f_α) converge vers f_∞ dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{W}, \mu)$. Si $I = \mathbb{N}$, on a alors également

$$\lim_{n\to\infty} \text{forte } f_n(\omega) = f\ (\omega) \quad \mu\,.\,p\,.\,p\,.$$

3.2 - Problème I fort.

Nous énoncerons deux résultats. Pour les démonstrations voir [22] .

Théorème 4.

Soit $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in I}$ une martingale forte à valeurs dans un espace de Banach $\mathbb{W}$ séparable, de dual $\mathbb{W}'$. Soit Q une partie convexe équilibrée de $\mathbb{W}$ compacte pour $\sigma(\mathbb{W}, \mathbb{W}')$. Si l'hypothèse (B) du théorème 1 est vérifiée il existe f_∞ telle que $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in\hat{I}}$ soit une martingale forte.

Si $\mathbb{W}$ est un espace réflexif et si $I = \mathbb{N}$ en prenant pour Q la boule unité de $\mathbb{W}$ et pour (λ_n) la sous-martingale $(||f_n||)$, on obtient les théorèmes de S. D. Chatterji et F. Scalora.

<u>Théorème 5.</u>

Soit $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ une martingale forte à valeurs dans le dual $\mathbb{B}'$ d'un espace de Banach $\mathbb{B}$. Si $\mathbb{B}'$ est un espace de Banach séparable, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe f_∞ telle $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in \hat{I}}$ soit une martingale forte est que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ soit terminalement uniformément intégrable.

Dans le cas $I = \mathbb{N}$ le théorème 5 a été énoncé par A et C. Ionescu Tulcea dans [12] . Si $I = \mathbb{N}$ et $\mathbb{B}$ réfléxif on retrouve le théorème de S. D. Chatterji et F. Scalora.

§ 2 - Application à la dérivation

1. - Problème de dérivation globale pour mesures vectorielles.

1.1 - Base de dérivation.

Une base de dérivation $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha \in I}, \quad)$ est défini dans ce qui suit par la donnée d'un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, la mesure μ étant toujours ici supposée réelle bornée, et d'une famille $(\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha \in I}$ de partitions finies de Ω possédant les propriétés suivantes :

($\mathcal{C}_1$) I est un ensemble ordonné par $\leq$ et filtrant à droite.

($\mathcal{C}_2$) $\alpha, \beta \in I$ avec $\alpha \leq \beta \Longrightarrow \mathcal{P}_\alpha$ plus fine que $\mathcal{P}_\beta$.

($\mathcal{C}_3$) $\mathcal{F}$ est la complétion de la tribu engendrée par $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{P}_\alpha$.

1.2 - Fonctions additives à valeurs vectorielles.

Nous considérons une fonction φ définie sur un anneau $\mathcal{R} \supset \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{P}_\alpha$ à valeurs dans $\mathbb{W}$, et additive sur $\mathcal{R}$.

Nous rappelons qu'une fonction φ additive sur $\mathcal{R}$ et σ-additive lorsque l'on considère sur $\mathbb{W}$ la topologie $\sigma(\mathbb{W}, \mathbb{W}')$ est σ-additive pour toute topologie sur $\mathbb{W}$ compatible avec la dualité $\langle \mathbb{W}, \mathbb{W}' \rangle$. (cf. [9] chap. IV - 10 et [18] chap. V.) Nous pouvons donc dire σ-additif sans préciser.

1.3 - Fonction d'ensembles dominée par une mesure μ. Absolue continuité scalaire.

On dira qu'une fonction d'ensembles φ (réelle ou vectorielle) est dominée par la mesure μ si $\mu(A) = 0 \Longrightarrow \varphi(A) = 0$.

On dira que φ à valeurs vectorielle est scalairement absolument continue par rapport à μ si pour tout v' et tout $\varepsilon > 0$

il existe η tel que $\mu(A) \leq \eta \Longrightarrow |\langle \varphi(A), v' \rangle| \leq \varepsilon$

Il est évident que si φ est σ-additive les 2 notions précédentes coïncident.

On sait également (voir [6] et [24]) qu'il n'existe pas de "bonne condition d'absolue continuité" permettant d'énoncer un théorème de Radon Nikodym pour mesures vectorielles, relativement à une mesure réelle donnée.

1.4 - Dérivants et dérivées d'une fonction 1 définie sur A.

On pose

$$D_\alpha^\varphi(\omega) = \sum_{F \in \mathcal{S}_\alpha} 1_F(\omega) \frac{\varphi(F)}{\mu(F)}$$

avec la convention $\frac{\varphi(F)}{\mu(F)} = 0$ si $\mu(F) = 0$

D_α^φ est appelé le dérivant de φ relativement à $\mathcal{S}_\alpha$.

Si $\mathcal{F}_\alpha$ désigne la tribu finie engendrée par $\mathcal{S}_\alpha$, on voit que si φ est dominée par μ, $(D_\alpha^\varphi, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une martingale. C'est même une martingale forte si W est un espace de Banach.

On a d'ailleurs $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$

Si $(D_\alpha^\varphi)_{\alpha \in I}$ converge pour un mode "T" de convergence vers f, on dit que f est la T-dérivée de φ relativement à la base $(\mathcal{S}_\alpha)$.

Si $(D_\alpha^\varphi(\omega))_{\alpha \in I}$ converge faiblement (resp. fortement) vers $f(\omega)$ on dit que $f(\omega)$ est la dérivée faible (resp. forte) de φ au point ω.

Si f est solution du problème I faible (resp. fort) on voit que f est une densité faible (resp. faible) de φ.

Le problème I est donc celui de l'existence d'une densité

Le problème III est donc celui de l'existence d'une T-dérivée

Le problème II est donc celui de la relation entre densité et T-dérivée.

2. Dérivation faible.

Dans toute cette partie 2 du paragraphe 2, nous considérerons un espace localement convexe $\mathbb{V}$, en dualité avec $\mathbb{V}'$, et $\mathfrak{S}$ désignera comme précédemment un ensemble filtrant de parties convexes équilibrées de V, compactes pour $\sigma(\mathbb{V}, \mathbb{V}')$.

2.1 - Existence d'une densité faible et dérivés correspondants.

Théorème 6.

Soit φ une fonction additive d'ensembles définie sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $\mathbb{V}$, dominée par μ et possèdant l'une des propriétés (A") ou (C") suivantes :

(A") φ est σ-additive et il existe une suite $(\mathcal{R}_n)$ croissante extraite de $\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{S}_\alpha$ et une suite (Q_n) extraite de $\mathfrak{S}$ telles que $\mu(\bigcup_n \mathcal{R}_n) = \mu(\mathcal{R})$ et :

$$\forall F \in \mathcal{S} \qquad \varphi(F\cap\mathcal{R}_n) \in \mu(F\cap\mathcal{R}_n) \cdot Q_n$$

(B") Il existe une mesure réelle bornée ν, absolument continue par rapport à μ, et un $Q\in\mathfrak{S}$ tels que :

$$\forall F\in \mathcal{S} \qquad \varphi(F) \in \nu(F) \cdot Q$$

Alors :

1°) - φ admet une densité faible f relativement à μ.

2°) - les dérivées $(D_\alpha^\varphi)_{\alpha\in I}$ convergent suivant I scalairement en moyenne vers f.

3°) - si $\mathbb{V}'$ admet un sous-ensemble dénombrable partout dense pour la $\mathfrak{S}$-topologie, il existe une suite $(D_{\alpha_n}^\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de la famille des dérivants, telle que $\lim_{n\to\infty}$ faible $D_{\alpha_n}^\varphi(\omega) = f(\omega)$ μ. p . p .

4°) - si I est dénombrable φ admet pour dérivée faible f, en μ-presque tout $\omega \in \Omega$, relativement à la base $(\mathcal{S}_n)$ de dérivation.

Démonstration.

Remarquons que si ν est une mesure réelle bornée absolument continue par rapport à μ, la martingale $(D_\alpha^\nu , \mathcal{F}_\alpha)$ réelle est uniformément intégrable (et converge d'ailleurs en moyenne vers la densité de ν relativement à μ). Si l'hypothèse (B") est vraie, on a :

$$D_\alpha^\Phi (\omega) \in D_\alpha (\omega) \quad Q \qquad \mu. \ p . p .$$

et le théorème résulte immédiatement de l'application du théorème 1 lorsque l'hypothèse (B) est vraie.

Lorsque (A") est vraie, φ étant σ-additive, pour tout $v' \in W'$ la martingale réelle $(\langle D_\alpha^\varphi , v' \rangle , \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$ est constituée par la famille des dérivants de la mesure réelle bornée $\langle \varphi, v' \rangle$. On sait (cf. [17] p. 485 prop. 2.1.2) qu'une telle martingale est de variation bornée et absolument continue donc (ibid. prop. 2.3.2) qu'elle est terminalement uniformément intégrable. Le théorème résulte donc encore dans ce cas immédiatement du théorème 1.

Cas particulier.

1°) Si $\mathbb{B}''$ est un dual $\mathbb{B}'$ d'espace de Banach $\mathbb{B}$. En prenant pour éléments de $\mathcal{G}$ les boules de $\mathbb{B}'$, qui sont compactes pour $\sigma(\mathbb{B}', \mathbb{B})$, on obtient un théorème généralisant celui de J. Dieudonné (cf. [6]) où $\mathbb{B}$ est supposé séparable.

2°) Si $\mathbb{B}''$ est un dual $\mathbb{B}'$ d'espace de Banach $\mathbb{B}$, l'hypothèse $(\mathbb{B}'')$ est vraie si φ est à variation bornée (au sens de [9] chap. III), car on a

$\varphi(F) \in \mathrm{var}_\varphi(F) \,.\, Q$ si Q désigne la boule unité de $\mathbb{B}'$.

2.2 - Un théorème de décomposition comme application du théorème 2.

Théorème 7.

Soit φ une fonction additive d'ensembles définie sur $\mathcal{K}$, à valeurs dans $\mathbb{W}$, dominée par μ et possédant l'une des propriétés (A''') ou (B''') suivantes :

(A''') φ est scalairement à variation bornée et il existe une suite $(\mathcal{S}_n)$ croissante extraite de $\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{P}_\alpha$ et une suite (Q_n) extraite de $\mathcal{G}$ telles que $\mu(\bigcup_n \mathcal{S}_n) = \mu(\mathcal{S})$ et :

$$\forall F \in \mathcal{F} \quad \varphi(F\cap\mathcal{S}_n) \in \mu(F\cap\mathcal{S}_n).\, Q_n$$

(B''') Il existe une fonction simplement additive, à variation bornée ν sur μ, dominée par μ, et un $Q \in \mathcal{G}$ tel que :

$$\forall F \in \mathcal{F} \quad \varphi(F) \in \nu(F).\, Q$$

Alors

1°) φ est décomposable de façon unique en la somme de deux fonctions additives φ_1 et φ_2 possédant les propriétés suivantes :

- φ_1 admet une densité f_1 par rapport à μ

- φ_2 est scalairement purement simplement additive (i.e. $\forall v' \in \mathbb{W}'$ quelle que soit la mesure σ-additive μ' : $|\mu'| \leq |\langle\varphi_2, v'\rangle| \Longrightarrow \mu' = 0$).

2°) Les dérivées $(D^{\varphi}_{\alpha})_{\alpha \in I}$ convergent suivant I scalairement en mesure vers f

3°) Si $\mathbb{W}'$ admet un ensemble dénombrable partout dense pour la $\mathcal{G}$-topologie et si $I = \mathbb{N}$, φ admet $f_1(\omega)$ pour dérivée en μ-presque tout point $\omega \in \mathcal{S}$, relativement à la base de dérivation $(\mathcal{P}_n)$.

Démonstration.

Si φ admet une décomposition du type indiqué, $\forall\, v' \in \mathbb{W}'$ $\langle\varphi, v'\rangle = \langle\varphi_1, v'\rangle + \langle\varphi_1, v'\rangle$ est la décomposition unique de la fonction réelle simplement additive à variation bornée $\langle\varphi, v'\rangle$ en sa partie σ-additive (ici absolument continue par rapport à μ) et en sa partie purement simplement additive. Si une autre décomposition $\varphi = \varphi'_1 + \varphi'_2$ existait, on aurait donc $\langle\varphi'_2, v'\rangle = \langle\varphi_2, v'\rangle$ pour tout v' d'où $\varphi_2 = \varphi'_2$. D'où l'unicité.

En appliquant le théorème 2 à la martingale $(D_\alpha^\varphi)_{\alpha\in I}$ on voit que cette martingale converge scalairement en mesure vers une fonction f_1. Pour tout $v' \in \mathbb{W}'$ la martingale réelle $(\langle D_\alpha^\varphi, v'\rangle)_{\alpha \in I}$ converge stochastiquement vers la densité de la partie absolument continue de $\langle\varphi, v'\rangle$ ($\langle f_1, v'\rangle$ est donc cette densité). On sait que $F \rightsquigarrow (\langle\varphi(F), v'\rangle - \int_F \langle f_1, v'\rangle\, d\mu$ est la partie purement simplement additive de $\langle\varphi, v'\rangle$. (cf. [17] th. 3 p. 491). On voit donc qu'en posant $\varphi_1(A) = \varphi(A) - \int_A f_1\, d\mu$ on obtient la décomposition voulue, ainsi d'ailleurs que la deuxième partie du théorème.

La 3ème partie résulte alors immédiatement du théorème 2. 4°).

3. Dérivation forte.

3.1 - Un cas d'existence d'une densité forte et dérivés correspondants.

Théorème 8.

Soit φ σ-additive à valeurs dans un dual séparable $\mathbb{B}'$ d'espace de Banach $\mathbb{B}$. On suppose que φ est à variation forte bornée et dominée par la mesure μ.

Alors il existe une densité forte f de φ relativement à la mesure μ. La famille des dérivants $(D_\alpha^\varphi)_{\alpha \in I}$ converge vers f dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, B')$.

Si I est dénombrable φ admet $f(\omega)$ pour dérivée forte en μ-presque tout $\omega \in \Omega$.

Démonstration.

L'hypothèse de variation forte bornée s'écrit en effet :

$$+\infty > \sup_\alpha \sum_{F \in \mathcal{S}_\alpha} \| \varphi(V) \| = \sup_\alpha \int \| D_\alpha^\varphi \| \quad d\mu$$

La variation $\nu = \mathrm{Var}_\varphi$ de 1 est une mesure réelle bornée dominée par μ, $\nu = \mathrm{Var}_\varphi$ est absolument continue par rapport à μ. La suite des dérivants (D_α^ν) est donc une martingale uniformément intégrable (cf. [15]) qui majore terme à terme $(\| D_\alpha^\varphi \|)$.

Le théorème 8 est donc conséquence du théorème 5.

3.2 - Un théorème de décomposition.

Soit S un ensemble portant la partie absolument contenue de Var_φ par rapport à μ et tel que S^c porte la partie de Var_φ étrangère à μ.

On appellera $F \rightsquigarrow \varphi(S \cap F)$ la partie absolument continue de φ relativement à P et $F \rightsquigarrow \varphi(S^c \cap F)$ la partie étrangère de φ.

On a la proposition évidente.

Proposition.

Une mesure φ à variation forte bornée est dominée par μ si et seulement si la partie de φ étrangère à μ est nulle.

Théorème 9.

Soit φ à valeurs dans un dual séparable $\mathbb{B}'$ d'espace de Banach $\mathbb{B}$. On suppose que φ est de variation forte Var_φ bornée.

On suppose également que I est dénombrable.

Alors la suite des dérivants (D_n^φ) converge μ-presque partout pour la topologie forte dans $\mathbb{B}'$ vers une densité forte de la partie absolument continue de φ relativement à μ.

Démonstration.

On a en effet

$$D_n^\varphi = \sum_{F \in \mathfrak{F}_n} 1_V \cdot \frac{\varphi(F)}{\mathrm{Var}_\varphi(F)} \cdot \frac{\mathrm{Var}_\varphi(F)}{\mu(F)}$$

Posons

$$g_n = \sum_{F \in \mathfrak{F}_n} 1_V \cdot \frac{\varphi(F)}{\mathrm{Var}_\varphi(F)}$$

$$\lambda_n = \sum_{V \in \mathfrak{F}_n} 1_V \cdot \frac{\mathrm{Var}_\varphi(F)}{\mu(F)}$$

$(g_n, \mathfrak{F}_n)$ est une martingale vectorielle forte à valeurs dans la boule unité de $\mathbb{B}'$. Elle converge fortement μ-presque partout vers une densité forte g de φ par rapport à Var_φ.

La sous-martingale réelle $(\lambda_n, \mathfrak{F}_n)$ converge μ-presque partout vers une densité λ de la partie absolument continue μ de Var_φ relativement à μ.

La suite (D_n^φ) des dérivants converge donc μ-presque partout vers $\lambda \cdot g$ pour la topologie forte de $\mathbb{B}'$.

Pour tout $F \in \mathfrak{F}$ on a, en désignant par S un ensemble portant la partie absolument continue de φ tandis que S^c porte la partie étrangère à μ :

$$\int_{F \cap S} \varphi \, d\mu = \int_{F \cap S} g(\omega) \, \mathrm{Var}_\varphi(d\omega) = \int_{F \cap S} g(\omega) \cdot \lambda(\omega) \, \mu(d\omega)$$
$$= \int_F g(\omega) \cdot \lambda(\omega) \, \mu(d\omega)$$

D'où le théorème.

Nous terminons en donnant une conséquence du théorème 4 :

<u>Théorème 10</u> .

Soit φ à valeurs dans un espace de Banach $\mathbb{B}$. On suppose, ou bien que I est dénombrable, ou bien que $\mathbb{B}$ est séparable.

Si il existe une partie faiblement compacte Q de B telle que

$$\varphi(F) \in \mu(F) \, , \, Q \qquad \forall F \in \mathcal{F}$$

alors : φ admet une densité forte f par rapport à μ, la famille des dérivants $(D_\alpha^\varphi)_{\alpha \in I}$ converge vers f dans $L^1(\Omega ; \mathcal{F}, \mu, \mathbb{B})$, et si I = $\mathbb{N}$ φ admet f (ω) pour dérivée forte en μ presque tout $\omega \in \Omega$.

B I B L I O G R A P H I E

[1] BOCHNER S. Intégration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind. Fundamenta Mathematicae. Vol. 20 (1933) p. 262-276.

[2] BOCHNER S. Partial Ordering in the theory of Martingales Annals of Math. Vol. 62-n° 1. July 1955 p. 162-169

[3] BOURBAKI Espaces vectoriels topologiques. Paris Hermann (1955

[4] BOURBAKI Intégration. Chap. VI Paris-Hermann (1959)

[5] CHATTERJI S. D. Martingales of Banach-valued random variables. Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 395-398

[6] DIEUDONNE J. Sur le Théorème de Lebesgue Nikodym. (V) Can. J. of Math. vol. III N° 2 1951 p. 129-139

[7] DRIHL M. and HANS O. Conditional expectations for generalized random variables. Trans. Second. Prague Conf. ou Info. Theory. Prague (1960)

[8] DOOB J. L. Stochastic processes. New-York 1950

[9] DUNFORD ans SCHWARTZ Linear operators Part. I - New-York 1958

[10] MOURIER E. Eléments aléatoires dans un espace de Banach.

[11] HELMS L. L. Mean convergence of martingales. Trans. Am. Math. Soc. Vol. 87 (1958) p. 439-445

[12] IONESCU-TULCEA A. et C. On the lifting Property I. J. of Math. An. and Appl. 3 (1961) p. 537-546

[13] IONESCU-TULCEA A. et C. On the lifting Property II. J. Math. Mech. 1962 773-795

[14] IONESCU-TULCEA A. et C. Abstract regodic theorems. Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1963) p. 107-125

[15] KRICKEBERG K. Convergence of Martingales with a directed index Trans. of the Am. Math. Soc. Vol. 83 n° 2 p. 313-317

[16] KRICKEBERG K. Stochastische Konvergenz von Semimartingalen. Math. Zeitschr. 66 (1957) p. 470-486

[17] KRICKEBERG K. et PAUC Chr. Martingales et dérivation. Bull. Soc. Math. de France (1963) p. 455-543

[18] METIVIER M. Limites projectives de mesures. Martingales. Applications Annali di Mat. Pura ed Appl. (IV) Vol. LXI) 1963 p. 225-352

[19] METIVIER M. Martingales à Valeurs Vectorielles. Bulletin Soc. Math. Grèce 1964 p.

[20] METIVIER M. Martingalen mit Werten in einem Lokal-konvexen Raum : exposés dactylographiés au Séminaire de Probabilités de l'Université de Hambourg (Mai - Juin 1965)

[21] METIVIER M. Martingales faibles et Martingales fortes. C. R. Acad. Sc. Paris t. 261 p. 3 723-3 726

[22] METIVIER M. Martingales à valeurs dans un espace localement convexe. A paraître.

[23] NEVEU J. Relation entre la téeorie des martingales et la théorie ergodique. Colloque International de Théorie du Potentiel Paris Juin 1964

[24] PETTIS B. J. On integration in vector spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938) p. 277-304

[25] RÖNNOV Ulf. Martingales à valeurs vectorielles et dérivation. Sém. de Théorie des Probabilités. Institut Henri Poincaré Année 64-65

[26] SCALORA F. Abstract martingale convergence theorems. Pac. J. of Math. Vol. II (1961) n° 1 p. 347-374.