

CHR. COATMELEC

Quelques théorèmes de Whitney et applications à l'analyse numérique

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1965-1966
« Publications des séminaires de mathématiques », , exp. n° 2, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1965-1966____A2_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

"QUELQUES THEOREMES DE WHITNEY ET APPLICATIONS A L'ANALYSE NUMERIQUE"

par Chr. COATTELEC

I NOTATIONS - DEFINITIONS PRELIMINAIRES - POSITIONS DU PROBLEME

$\mathbb{R}^n$ est supposé rapporté à une base : $(X_1, \dots, X_n)$ sont les coordonnées de $M \in \mathbb{R}^n$

$M_1 M_2$ est la distance de 2 points dans $\mathbb{R}^n$.

E : compact dans $\mathbb{R}^n$ et E_1 : ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant E .

Si on a $f \in \mathcal{C}^k(E_1)$ on pose : $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ et $k = k_1 + \dots + k_n$ avec $0 \leq k_i \leq k$. $\|f\|_E = \max_{M \in E} |f(M)|$.

(Nous supposons que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$)

$$\|f\|_E^k = \max_{0 \leq i \leq k} \left\| \frac{\partial^i f}{\partial X^i} \right\|_E$$

$$M_k(f, E) = \max_{k_1 + \dots + k_n = k} \left\| \frac{\partial^K f}{\partial X^K} \right\|_E$$

Pour $f \in \mathcal{C}^m(E_1)$ et $A \in E_1$ nous appellerons $T_A[f]$ le polynôme de Taylor de f en A . C'est un élément, pour A fixé, d'un espace vectoriel à $m_1 = \binom{m+n}{n}$ dimensions, défini par exemple par les données des m_1 valeurs réelles $\frac{\partial^K f}{\partial X^K}(A)$ où K est un multiindice prenant toutes valeurs possibles telles que $0 \leq k \leq m$. La valeur en $M \in \mathbb{R}^n$ de $T_A[f]$ sera notée $T_A[f](M)$. Une fonction $f \in \mathcal{C}^m(E_1)$ induit sur E un champ de polynômes défini par $A \longrightarrow T_A[f]$. Ce champ est appelé le champ taylorien associé à f sur E .

Réciproquement étant donné sur E un champ (de polynômes de degrés $\leq m$) défini par $A \longrightarrow T_A$ nous nous demandons à quelles conditions doit satisfaire ce champ pour qu'il soit la restriction à E du champ taylorien

associé à une fonction $f \in \mathcal{C}^m(E_1)$ où E_1 est un ouvert contenant E . Si nous avons trouvé une telle fonction f nous dirons que nous avons prolongé le champ donné en une fonction de classe $\mathcal{C}^m$.

II MODULES DE CONTINUITE

Dans ce paragraphe nous généralisons à $\mathbb{R}^n$ une définition de de la Vallée Poussin [I] et un théorème de Steckin et Efimov [I] pour introduire naturellement le module concave de continuité introduit par Glaeser dans sa thèse.

(II, 1) Module de continuité d'une fonction f uniformément continue sur un convexe C de $\mathbb{R}^n$.

Si f est uniformément continue sur C nous poserons

$$\omega(f, \delta) = \sup_{M_1, M_2 \in C, |M_1 - M_2| \leq \delta} |f(M_1) - f(M_2)| \text{ avec } M_1 \in C \text{ et } M_2 \in C.$$

La fonction $\omega(f, \cdot)$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie ainsi est le module de continuité de f sur C .

Les propriétés suivantes sont vérifiées par $\omega(f, \cdot)$:

$$(II, 1, 1) \quad \omega(f, 0) = 0$$

$$(II, 1, 2) \quad \omega(f, \cdot) \text{ est non décroissante.}$$

$$(II, 1, 3) \quad \omega(f, \cdot) \text{ est continue à l'origine}$$

$$(II, 1, 4) \quad \omega(f, \delta_1 + \delta_2) \leq \omega(f, \delta_1) + \omega(f, \delta_2) \text{ pour } \delta_1 \geq 0 \text{ et } \delta_2 \geq 0$$

La continuité de $\omega(f, \cdot)$ sur $[0, +\infty[$ en résulte.

De plus on a :

$$\omega(f, N\delta) \leq N \omega(f, \delta) \text{ pour } N \text{ entier } \geq 0 \text{ et } \delta \geq 0$$

$$\omega(f, \lambda\delta) \leq (\lambda + 1) \omega(f, \delta) \text{ pour } \delta \text{ et } \lambda \geq 0$$

(II, 2) Module de Continuité.

Soit ω fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ satisfaisant à

$$(II, 2, 1) \quad \omega(0) = 0$$

$$(II, 2, 2) \quad \text{pour } h \text{ et } \delta \text{ positifs quelconques : } 0 \leq \omega(\delta + h) - \omega(\delta) \leq \omega(h)$$

Nous dirons que ω est un module de continuité et nous désignerons par $H(a, \omega, C)$ l'ensemble des f uniformément continues sur C telles que :

$$\omega(f, \delta) \leq a \omega(\delta)$$

(II, 3) Module concave de continuité.

Soit $\hat{\omega}$ une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$(II, 3, 1) \quad \hat{\omega}(0) = 0$$

$$(II, 3, 2) \quad \hat{\omega} \text{ est non décroissante}$$

$$(II, 3, 3) \quad \hat{\omega} \text{ est concave}$$

$$(II, 3, 4) \quad \hat{\omega} \text{ est continue à l'origine}$$

Nous dirons que $\hat{\omega}$ est un module concave de continuité.

Le théorème de Steckin (Efimov [I]) s'énonce ainsi :

Si ω est un module de continuité défini sur un segment $[0, d]$ de $\mathbb{R}^+$ comme on l'a fait en (II, 2) alors il existe un module concave $\hat{\omega}$ de continuité défini sur $[0, d]$ tel que :

$$(II, 3, 5) \quad \omega(\delta) \leq \hat{\omega}(\delta) \leq 2\omega(\delta)$$

La constante 2 ne peut être remplacée par $2 - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

A toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(E)$ on peut donc associer son module de continuité $\omega(f, \circ)$ et un module concave de continuité $\hat{\omega}_T(\circ)$ tel que (II, 3, 5) soit satisfaite.

III LE THEOREME DU PROLONGEMENT DE WHITNEY DANS $\mathbb{R}^n$

Soit un champ de polynômes, de degrés $\leq m$, défini. sur un compact E de $\mathbb{R}^n$ par $A \longrightarrow T_A$.

Nous poserons :

$$(III, 1) \quad \mathcal{C}_1(A, B, T, m) = \sup_{M \in \mathbb{R}^n} \frac{|T_A(M) - T_B(M)|}{(AM + BM)^m} \quad \text{pour A et B dans E.}$$

$$(III, 2) \quad \mathcal{C}_2(A, B, T, m) = \sup_{0 \leq k \leq m} \frac{\left| \frac{\partial^k T_B}{\partial x^k}(A) - \frac{\partial^k T_A}{\partial x^k}(A) \right|}{AB^{m-k}} \quad \text{pour A et B dans E.}$$

$$(III, 3) \quad \mathcal{C}_3(A, B, T, m) = \sup_{M \in C_{AB}} \frac{|T_A(M) - T_B(M)|}{(AM + BM)^m} \quad \left| \begin{array}{l} \text{où } C_{AB} \text{ est un hypercube} \\ \text{à côtés parallèles aux} \\ \text{axes et contenant A et B} \\ \text{points de E. Le côté de} \\ C_{AB} \text{ est égal à AB.} \end{array} \right.$$

Proposition (III, 4)

Dans notre travail indiqué en bibliographie nous démontrons que :

$$\mathcal{C}_3(A, B, T, m) \leq \mathcal{C}_1(A, B, T, m) \leq e \mathcal{C}_2(A, B, T, m) \leq e \cdot 2^{2m} (m!)^2 \cdot n^{\frac{m}{2}} \mathcal{C}_3(A, B, T, m)$$

$\mathcal{C}_1$ a été introduit par Glaeser dans Glaeser [I]

$\mathcal{C}_2$ a été introduit par Whitney dans Whitney [I]

Théorème du prolongement :

Pour qu'il existe une fonction f , m fois continûment dérivable dans $\mathbb{R}^n$, dont le champ taylorien $A \longrightarrow T_A [f]$ coïncide en restriction sur E avec le champ donné à l'avance sur $E : A \longrightarrow T_A$ il faut et il suffit qu'il existe un module concave de continuité $\hat{\omega}$ tel que

$$(III, 5) \quad \mathcal{C}_i(A, B, T, m) \leq \hat{\omega}(A, B) \quad \left| \begin{array}{l} \text{pour } i = 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3 \text{ et quels que} \\ \text{soient } A \text{ et } B \text{ dans } E. \end{array} \right.$$

Remarque : Nous savons que si f est m fois continûment différentiable dans un ouvert borné E_1 de $\mathbb{R}^n$ et si nous désignons par $\omega(f, m, .)$ le sup des modules de continuité des dérivées partielles d'ordre m que l'on peut définir sur $\bar{E}_1$ alors $|f(M) - T_A [f](M)| \leq \frac{AM^m}{m!} \omega(f, m, AM)$ ce qui entraîne que pour tout couple $(A, B) \in E$. E on a :

$$(III, 6) \quad |T_A [f](M) - T_B [f](M)| \leq \frac{1}{m!} (AM^m \omega(f, m, AM) + BM^m \omega(f, m, BM))$$

Réciproquement nous avons le théorème :

Si, étant donné un champ T sur E il existe un module concave de continuité $\hat{\omega}_1$ tel que $\forall A \in E, B \in E$ et $M \in \mathbb{R}^n$:

$$(III, 7) \quad |T_A(M) - T_B(M)| \leq AM^m \hat{\omega}_1(AM) + BM^m \hat{\omega}_1(BM)$$

alors les conclusions du théorème du prolongement sont vérifiées

Plus exactement nous montrons qu'il en résulte que

$$\mathcal{C}_2(A, B, T, m) \leq 2^{m+1} \cdot m! \cdot n^{\frac{m+1}{2}} \cdot \hat{\omega}_1(AB)$$

(III, 8) Définition : Si l'une des conditions (III, 5) avec $i = 1$ ou 2 ou 3 ou si la condition (III, 7) est vérifiée nous dirons que T est un champ taylorien sur E et que T définit une fonction m fois continûment dérivable sur le fermé E .

IV QUELQUES MAJORATIONS

Nous venons de voir qu'un champ taylorien T d'ordre m défini sur E peut être prolongé à $\mathbb{R}^n$ en une fonction m fois continûment dérivable.

Il est intéressant de savoir ce que l'on peut dire d'un prolongement $f[T]$ associé à T . Soit C un compact de diamètre d , convexe de $\mathbb{R}^n$. Nous pouvons par (II, 1) définir le k -module de continuité d'une fonction f k fois continûment dérivable sur C .

$$\omega(f, C, k, \delta) = \max_{\substack{k_1 + \dots + k_n = k \\ M_1 \in C \\ M_2 \in C \\ M_1 M_2 \leq \delta}} \left(\max_{M_1 \in C} \left| \frac{\partial^{K_1} f}{\partial X^{K_1}} (M_1) - \frac{\partial^{K_2} f}{\partial X^{K_2}} (M_2) \right| \right)$$

Nous allons donner des majorations concernant $\omega(f(T), C, k, \delta)$ et $\|f\|_C^k$ en fonction des données du problème.

Signalons auparavant que dans Whitney [II] il est démontré que l'on peut choisir un prolongement $f(T)$ abalytique dans $C - E$ mais un tel prolongement n'est pas obtenu en général par un opérateur linéaire de prolongement.

Au contraire, pour m fini la méthode donnée dans Whitney [I] définit un opérateur linéaire continu de prolongement et la fonction prolon-

gée $f(T)$ est dans $\mathcal{C}^\infty(C - E)$ et satisfait aux inégalités (IV, 1) et (IV, 2). Par contre $f(T)$ est en général seulement m fois continûment dérivable sur C , même lorsque T est le champ induit sur E par une fonction $f_1 \in \mathcal{C}^{m+k}(E_1)$ avec $k \geq 1$. Il n'y a exception que lorsque E est fini.

Soit T un champ taylorien d'ordre m et soit $\hat{\omega}$ un module concave de continuité associé à T sur E . Supposons par exemple qu'il existe $\hat{\omega}$ tel que $\mathcal{C}_2(A, B, T, m) \leq \hat{\omega}(AB)$ pour $A \in E$ et $B \in E$.

Posons comme dans Glaeser II :

$$\|f\|_E^m = \max(\|f\|_E^m, \max_{\substack{A \in E, B \in E \\ M \in C}} \mathcal{C}_1(A, B, T, m))$$

C'est une norme sur $W^m(E)$ espace des champs tayloriens d'ordre m définis sur E . $W^m(E)$ est d'ailleurs isomorphe au quotient de l'ensemble des fonctions m fois continûment dérivables sur C par l'idéal fermé des fonctions m fois continûment dérivables sur K et m plates en tout point de E .

Pour cette norme $\|\cdot\|_E^m$ $W^m(E)$ est complet alors qu'il ne l'est pas en général pour la norme $\|\cdot\|_E^m$.

Théorème (IV, 1) (Glaeser [I] p. 31) : Il existe $\Gamma_1(m, n, d)$ tel que

$$\left\| \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right\|_C \leq e^d \|f\|_E^m + \Gamma_1 \cdot d^{m-k} \hat{\omega}(d) \text{ pour } 0 \leq k \leq m$$

Théorème (IV, 2) (Glaeser I p.32) : Il existe $\Gamma_2(m, n, d)$ tel que

$$\omega(f, C, m, \cdot) \leq \Gamma_2 \cdot \hat{\omega}(\cdot)$$

V PROLONGEMENT A $\mathbb{R}$ D'UNE FONCTION DEFINIE SUR UN COMPACT E DE $\mathbb{R}$

Dans le théorème général de Whitney dans $\mathbb{R}^n$ on suppose donné sur E une champ taylorien T. Le problème (non résolu dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$) qui se pose est le suivant :

Etant donné f par ses valeurs sur E : à quelles conditions doivent satisfaire ces valeurs pour que l'on puisse prolonger f à C de telle façon que la fonction prolongée soit m fois continûment différentiable et coïncide en restriction sur E avec f. Il suffit pour le faire de trouver en fonction des données un champ taylorien d'ordre m sur E et d'appliquer le théorème général. Dans un article difficile Whitney a résolu ce problème lorsque $n=1$. Les démonstrations sont nettement clarifiées et des résultats sont améliorés dans l'article de Merrien : Merrien [I] . Dans ce paragraphe nous donnons les résultats importants:

Le théorème de Whitney [11] donné plus loin en (V,3), donne une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs de f sur E (et non plus sur le champ taylorien que l'on ne connaît d'ailleurs pas a-priori) pour qu'une fonction f définie sur E soit prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^m$.

Les théorèmes (V,4) et (V,5) précisent la "forme" du prolongement.

Soit $\mathcal{A}_{m+1} = (a_0, a_1, \dots, a_m)$ un ensemble de $m+1$ points de $\mathbb{R}$: on permet à 2 ou plusieurs points de $\mathcal{A}_{m+1}$ d'être confondus et on suppose que pour $i = 1$ à m on a $a_{i-1} \leq a_i$. Soit $\mathbb{R}_{m+1}$ l'ensemble des $\mathcal{A}_{m+1}$. Soit E un compact de $\mathbb{R}$ et E_{m+1} l'ensemble des $\mathcal{A}_{m+1}$ correspondant à des points a_i de E . Soit C un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ contenant E , soit d le diamètre de C et C_{m+1} l'ensemble qui lui correspond.

E_{m+1}^* désignera l'ensemble des $\mathcal{A}_{m+1}$ de E_{m+1} définis par $(m+1)$ points distincts dans E .

Dans l'article cité en bibliographie Merrien considère le quotient de $\mathbb{R}^{m+1}$ par le groupe des permutations des $m+1$ coordonnées de $\mathcal{A}_{m+1}$. C'est donc ce que nous appelons $\mathbb{R}_{m+1}$. Il pose alors :

$d(\mathcal{A}_{m+1}, \mathcal{B}_{m+1}) = \inf_{\sigma} \sum_{i=0}^m |a_i - b_{\sigma(i)}|$ où σ est une permutation des $m+1$ coordonnées et montre que $d(\mathcal{A}_{m+1}, \mathcal{B}_{m+1})$ définit une distance égale à $\sum_{i=0}^m |a_i - b_i|$ sur $\mathbb{R}_{m+1}$.

C'est cette dernière distance ou plus exactement :

$$d(\mathcal{A}_{m+1}, \mathcal{B}_{m+1}) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m |a_i - b_i| \text{ que nous considérons.}$$

Les théorèmes énoncés dans l'article conduisent aux théorèmes :

THEOREME (V, 1) : Si $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ alors la différence divisée généralisée (plusieurs points de $\mathcal{A}_{m+1}$ peuvent être confondus) relative à f sur $\mathcal{A}_{m+1}$ est une fonction $\mathcal{F}_{m+1}$ définie sur $\mathbb{R}_{m+1}$ et continue sur $\mathbb{R}_{m+1}$. Plus exactement si $\omega(f, c, m, d)$ désigne le m -module de continuité de f sur C on a, en omettant l'indice $(m+1)$ sur $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{F}$:

$$\forall \mathcal{A} \in C_{m+1} \text{ et } \forall \mathcal{B} \in C_{m+1} : |\mathcal{F}(\mathcal{A}) - \mathcal{F}(\mathcal{B})| \leq \frac{2m+1}{m!} \omega(f, c, m, d(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$$

Réciproquement :

THEOREME (V,2) : Si f est définie sur C et si $\mathcal{F}_{m+1}$, qui lui est associé sur C_{m+1}^* , est uniformément continue sur C_{m+1}^* alors on a $f \in \mathcal{C}^m(C)$.

THEOREME (V,3) : Théorème de Whitney : Whitney [11]

La condition nécessaire et suffisante pour que f définie sur E puisse être prolongée à $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^m$ est qu'il existe un module concave de continuité $\hat{\omega}$ tel que :

$$\forall \mathcal{A}_{m+1} \in E_{m+1}^* \text{ et } \forall \mathcal{B}_{m+1} \in E_{m+1}^* : |\mathcal{F}_{m+1}(\mathcal{A}_{m+1}) - \mathcal{F}_{m+1}(\mathcal{B}_{m+1})| \leq \hat{\omega}(d(\mathcal{A}_{m+1}, \mathcal{B}_{m+1}))$$

Dans la démonstration de ce théorème on commence par définir sur l'ensemble $\hat{E}$ des points d'accumulation de E un champ taylorien d'ordre m . Pour cela on considère $\mathcal{F}_p$ pour $1 \leq p \leq m+1$ défini sur E_p^* . On prolonge par continuité à $\hat{E}$. Puis on définit sur $E - \hat{E}$ un champ taylorien d'ordre m (c'est la partie délicate de la démonstration). Le champ taylorien obtenu sur E satisfait à la condition (III,5) et se prolonge donc (par le théorème général de Whitney) en une fonction f de classe $\mathcal{C}^m$.

THEOREME (V,4) : Si on pose $M_m = \sup_{1 \leq p \leq m+1} \left(\sup_{\mathcal{A}_p \in E_p^*} |\mathcal{F}_p(\mathcal{A}_p)| \right)$ il existe $\Gamma_1(m,d)$ et $\Gamma_2(m,d)$ tels que pour la fonction prolongée à C contenant E on ait :

$$\|f^{(k)}\|_C \leq \Gamma_1 e^d M_m + \Gamma_2 d^{m-k} \hat{\omega}(d)$$

pour $k = 0$ on a d'ailleurs $\|f\|_C \leq \Gamma_1 e^d M_m$

THEOREME (V,5) : Le m -module de continuité de f sur C est tel qu'il qu'il existe $K(m,d)$ et tel que

$$\omega(f, c, m, d) \leq K(m, d) \hat{\omega}(.)$$

VI APPLICATIONS.

(VI, 1) Extrapolation à la limite.

Soit $H = \{h_0, h_1, \dots, h_p, \dots\}$ ensemble de réels positifs tels que :

(VI, 1, 1) : $\exists k$ positif < 1 tel que $\forall i$ entier ≥ 1 on ait $h_{i+1} \leq kh_i$.

Soit $\overline{H} = H \cup \{0\}$ et considérons l'ensemble G des fonctions g , à valeurs réelles, définies sur H et telles que :

(VI, 1, 2) : $\lim_{i \rightarrow +\infty} g(h_i) = g(0)$ existe pour chaque g de G .

Soit $P_N[g]$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré $\leq N$ relatif à g sur $H_N = \{h_0, h_1, \dots, h_N\}$

Par Laurent [I] nous savons que la condition nécessaire et suffisante pour que $\forall g \in G : \lim_{N \rightarrow +\infty} |g(0) - P_N[g](0)| = 0$ est que (VI, 1, 1) soit vérifié. Quelle majoration peut-on donner lorsque l'on suppose que g satisfait à une condition plus forte que (VI, 1, 2) ?

(VI, 1, 3) $\exists c_0, c_1, \dots, c_q$ dans $\mathbb{R}$ et un module de continuité $\omega_q(g, \cdot)$ tels que :

$$\forall h \in H : |g(h) - c_0 - c_1 h - \dots - c_q h^q| \leq h^q \omega_q(g, h).$$

Théorème (VI, 1, 4) : Si (VI, 1, 1) est vérifiée par H et (VI, 1, 3) par g alors $\exists B_q(k)$ et $K_1(q, h_0, k)$ tels que :

$$|g(0) - P_N[g](0)| \leq B_q(k) \cdot \frac{(2q+1)!}{q!} \cdot \pi^q \cdot h_0^q \cdot \frac{\omega_q(g, h_0)}{(N+1)^q}$$

$$\left| g(o) - P_H[g](o) \right| \leq K_1(q, h_o, k) \cdot h_o^q \cdot \frac{1}{(N+1)^q} \cdot \omega_q\left(g, \frac{h_o}{N+1}\right)$$

Pour démontrer ce théorème il suffit :

a) de prolonger g à $[o, h_o]$ en une fonction q fois continûment dérivable après avoir vérifié la condition (V, 3). On a par (V, 4) et (V, 5) une majoration de $\|g^q\|_{[o, h_o]}$. On peut aussi opérer directement comme nous l'avons fait pour obtenir des précisions sur $B_q(k)$. Nous avons obtenu

$$B_q(k) \leq 2 \left[1 + \left(\frac{1}{\prod_{j=1}^{\infty} (1-k^j)} \right)^2 \right] \cdot \frac{1+k^q}{(1-k)^q}$$

b) d'introduire le polynôme Q_1 , de degré $\leq N$ de meilleure approximation de g sur $K_N = (h_o, h_1, \dots, h_N, o)$ puis Q_2 le polynôme de degré $\leq N$ de meilleure approximation de g sur $[o, h_o]$. Par utilisation des résultats cités dans de la Vallée Poussin [I] et Golomb [I] on obtient les conclusions du théorème.

Les majorations obtenues prouvent que la convergence est au moins de l'ordre de $\frac{1}{N^q}$ lorsque N tend vers $+\infty$ et ceci explique l'efficacité du procédé d'extrapolation de Richardson.

Notons que dans presque tous les problèmes d'analyse numérique il s'agit de calculer un nombre fini de valeurs $g_i(o)$ ou les g_i satisfont à (VI, 1, 3) en discrétisant et en approchant $g_i(o)$ par $g_i(h)$. h doit satisfaire alors à deux conditions contradictoires : être assez voisin de o pour avoir une bonne précision théorique, être assez éloigné de o pour que les erreurs d'arrondi (qui croissent lorsque h décroît) ne soient pas trop grandes. La méthode donnée précédemment est très efficace. Le théorème (VI, 1, 4) précise la nature de la convergence en

fonction de h_0 d'une part, en fonction de N d'autre part.

La condition (VI, 1, 3) s'exprime souvent plus simplement (VI, 1, 3bis) : $\exists c_0$ dans R et $M_{q+1}(g)$ tel que : $|g(h) - c_0| \leq M_{q+1} h^{q+1}$. Il en est ainsi par exemple lorsque g_1 est défini par une méthode de quadrature, d'interpolation, de différentiation...etc...

Nous donnons des exemples numériques.

Nous avons pensé à remplacer $P_N[g]$ par le polynôme $P_{N+q}[g]$ de degré $N+q$ qui satisfait à la condition d'interpolation sur H_N et dont les dérivées possèdent les mêmes propriétés de platitude en 0 que g . Cette méthode peut être étudiée théoriquement de la même façon qu'en (VI, 1, 4). Numériquement elle ne donne pas de meilleurs résultats (au contraire) que l'extrapolation classique sauf si k est voisin de 1. Ceci s'explique aisément par le fait que les conditions de platitude sont déjà vérifiées par $P_N[g]$ à cause des propriétés des différences divisées et des polynômes d'interpolation. Néanmoins lorsque k est assez voisin de 1 la méthode est bonne.

(VI, 2) Interpolation de fonctions de plusieurs variables.

Etant donné $f \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ où Ω boule ouverte de R^n contient M il s'agit d'approcher $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(M)$ en n'utilisant que les valeurs de f sur une partie de Ω .

Soit $\{R_1\}$ une suite, de systèmes unisolvents de $m_1 = \binom{n+m}{n}$ points dans R^n , satisfaisant aux conditions :

(VI, 2, 1) : $\forall i$: les n_i points A_k de $\mathcal{R}_i$ sont dans un hypercube C_i , contenant n , de côté d_i et si $Q_j(\mathcal{R}_i, \cdot)$ est le polynôme de degré $\leq n$ tel que $Q_j(\mathcal{R}_i, A_k) = \delta_{jk}$ pour $A_k \in \mathcal{R}_i$ alors il existe Γ tel que :

$$\forall i : \sup_{\mu \in C_i} \sum_{j=1}^{n_i} |Q_j(\mathcal{R}_i, \mu)| \leq \Gamma$$

$$(VI, 2, 2) : \lim_{i \rightarrow +\infty} d_i = 0$$

Ces relations sont vérifiées en particulier lorsque les $\mathcal{R}_i$ sont obtenus, à partir de $\mathcal{R}_0$ fixé, par des déplacements homothétiques de centre M et de rapport $r(i)$ décroissant vers 0.

Théorème (VI,2,3) : Si (VI, 2, 1) et (VI,2 ,2) sont vérifiés alors, en désignant par $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_i}[f]$ le polynôme d'interpolation relatif à f sur $\mathcal{R}_i$, on a :

$$\forall K \text{ tel que } K \leq n : \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\partial^K \mathcal{P}_{\mathcal{R}_i}[f]}{\partial X^K}(M) = \frac{\partial^K f}{\partial X^K}(M)$$

ou plus exactement on a une majoration du type :

$$\left| \frac{\partial^K \mathcal{P}_{\mathcal{R}_i}[f]}{\partial X^K}(M) - \frac{\partial^K f}{\partial X^K}(M) \right| \leq A_d \frac{n-K}{i} \omega(f, n, d_i)$$

Ce théorème nous permet d'obtenir systématiquement des approximations pour $\frac{\partial^K f}{\partial X^K}(M)$. Le paragraphe (VI, 1) nous permet d'améliorer nos approximations en faisant croître i assez vite .

BIBLIOGRAPHIE

- COATMELEC (C) : Thèse
- EFIMOV (A. V) [I] : Math. Sb. (N. S) 54 (96) 5(1961)
- GLAESER (G.) [I] : Etude de quelques algèbres tayloriennes -
J. d'Analyse Math. Jérusalem (1958)
- GOLOMB (H) [I] : Lectures on theory of approximation .
Argonne National Laboratory (1962)
- KORNEICUK (N. P) : The exact constant in D. Jackson's theorem
on best uniform approximation of continuous
periodic functions. DOKLADY (July 1962) vol
3 n° 4
- LAURENT (P. J) [I] : Etude de procédés d'approximation en
analyse numérique (Thèse 15 juin 1964)
- MERRIEN (J.) [I] : Prolongateurs de fonctions différentiables
d'une variable réelle. (à paraître et
séminaire d'analyse RENNES 1964)
- VALLEE POUSSIN (C. de la) [I] : Leçons sur l'approximation des
fonctions d'une variable réelle (Gauthier
Villars 1919)
- WHITNEY [I] : Analytic extensions of differentiable
functions defined in closed sets - (Trans.
Amer. Math. Soc. 36-1 (1934))
- [II] : Differentiable functions defined in closed
sets - (Trans. Amer. Math. Soc. 36 -2 (1934))