

FAUCONNET

Calcul en moyenne quadratique : continuité, dérivation et intégration

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1964-1965
« Séminaire d'initiation aux probabilités », , exp. n° 7, p. 9-17

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1964-1965____A7_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CALCUL EN MOYENNE QUADRATIQUE :
CONTINUITE, DERIVATION ET INTEGRATION

I - Remarques préliminaires.

Soit une fonction aléatoire $X(t)$ du second ordre sur T considéré comme application de T dans $\mathcal{V}$ = ensemble des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Plus précédemment pour tout $t \in T$, $X(t)$ est un élément de $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de Hilbert quand on prend pour produit scalaire : $\langle X, Y \rangle = \int X \bar{Y} dP$

$$\text{Donc } E \ X(t) \bar{X}(t') = \Gamma(t, t') = \langle X(t), X(t') \rangle$$

$$E |X(t)|^2 = \Gamma(t, t) = \|X(t)\|^2.$$

L'inégalité de Schwarz montre que le produit scalaire est continu : $E \left(\lim_{\substack{m, q \\ s \rightarrow s_0}} X_s \cdot \bar{X}_0 \right) = \langle \lim_{\substack{m, q \\ s \rightarrow s_0}} X_s, X_0 \rangle = \lim_{s \rightarrow s_0} \langle X_s, X_0 \rangle$

$$= \lim_{s \rightarrow s_0} E (X_s \cdot \bar{X}_0)$$

$$\lim_{\substack{m, q \\ s \rightarrow s_0}} X_s = X \quad \text{signifie} \quad \lim_{s \rightarrow s_0} \|X_s - X\| = 0$$

$$\text{ou} \quad \lim_{s \rightarrow s_0} E |X_s - X|^2 = 0$$

$$\text{et } E \left(\lim_{\substack{m, q \\ s \rightarrow s_0}} X_s \cdot \lim_{\substack{m, q \\ t \rightarrow t_0}} \bar{X}_t \right) = \lim_{\substack{s \rightarrow s_0 \\ t \rightarrow t_0}} E (X_s \bar{X}_t)$$

Lemme.

Soit $X_s(t)$ une fonction aléatoire du second ordre, elle converge en moyenne quadratique vers une fonction aléatoire $X(t)$ (nécessairement du second ordre).

and $s \rightarrow s_0$, si et seulement si $E(X_s(t) \overline{X_{s'}(t)})$ converge vers une fonction finie $F(t)$ sur T quand $s \rightarrow s_0$ et $s' \rightarrow s_0$.

Alors $\Gamma_{X_s}(t, t')$ converge vers $\Gamma_X(t, t')$

Démonstration : de la condition suffisante :

H) $E(X_s(t) \overline{X_{s'}(t)}) \rightarrow F(t)$ finie quand $s \rightarrow s_0$ et $s' \rightarrow s_0$.

Par suite : $\|X_s(t) - X_{s'}(t)\|^2 = \|X_s(t)\|^2 + \|X_{s'}(t)\|^2$

$$- 2 \langle X_s(t), X_{s'}(t) \rangle = - 2 \langle X_s(t), X_{s'}(t) \rangle.$$

converge vers 0 quand $s \rightarrow s_0$ et $s' \rightarrow s_0$.

$(X_s(t))_{s \rightarrow s_0}$ est un filtre de Cauchy donc converge en moyenne quadratique.

La condition nécessaire et la propriété $\Gamma_{X_s}(t, t') \rightarrow \Gamma_X(t, t')$ résultent de la continuité du produit scalaire.

II. - Continuité en m. q.

Pour que $X(t)$ soit continu en m. q. sur T il faut et il suffit que $\Gamma(t, t')$ soit continue sur la diagonale Δ de $T \times T$. Et alors $\Gamma(t, t')$ est continue dans $T \times T$

$X(t)$ continue en m. q. : $X(t+h) \xrightarrow{\text{m. q.}} X(t)$ quand $h \rightarrow 0$

- La condition nécessaire résulte de la continuité du produit scalaire.

- Condition suffisante.

On suppose $\Gamma(t, t')$ continue en tout point de Δ .

$$\|X(t+h) - X(t)\|^2 = \|X(t+h)\|^2 - \langle X(t+h), X(t) \rangle - \langle X(t), X(t+h) \rangle + \|X(t)\|^2 = \Gamma(t+h, t+h) - \Gamma(t+h, t) - \Gamma(t, t+h) + \Gamma(t, t)$$

L'hypothèse entraîne donc $\|X(t+h) - X(t)\|^2 \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$ c'est-à-dire $X(t+h) \xrightarrow{m. q.} X(t)$ quand $h \rightarrow 0$.

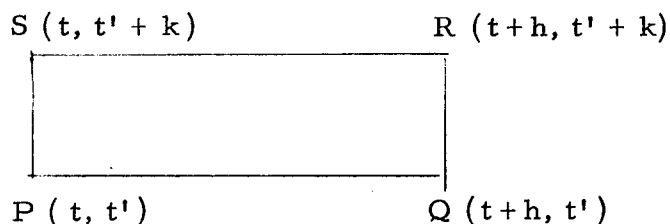
III. - Différentiation en moyenne quadratique.

- une f. a. $X(t)$ a une dérivée en m. q. en t si $\frac{X(t+h) - X(t)}{h}$ a une limite en moyenne quadratique quand $h \rightarrow 0$. Cette limite est la dérivée en m. q. notée $X'(t)_{m. q.}$

- une fonction à valeurs complexes $F(t, t')$ a une dérivée seconde généralisée en (t, t') si $\frac{1}{h k} \Delta_h \Delta_k F(t, t')$ a une limite quand $h \rightarrow 0$ et $k \rightarrow 0$. Cette limite est la dérivée seconde généralisée notée $\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial t'}(t, t')$.

$$\Delta_h \Delta_k F(t, t') = F(t+h, t'+k) - F(t+h, t') - F(t, t'+k) + F(t, t')$$

$$\Delta_h \Delta_k F(t, t') = F(R) - F(Q) - F(S) + F(P)$$



- Théorème.

Pour que la fonction aléatoire du second ordre $X(t)$ ait une dérivée en m. q. sur T il faut et il suffit que la dérivée seconde généralisée de sa covariance existe et soit finie sur la diagonale de $T \times T$.

.12.

D'après le lemme $\frac{X(t+h) - X(t)}{h}$ converge en m. q. vers une limite notée $X'(t)$ quand $h \rightarrow 0$.
m. q.

si et seulement si $E \left(\frac{X(t+h) - X(t)}{h} \frac{\bar{X}(t+k) - \bar{X}(t)}{k} \right)$ a une limite quand $\begin{cases} h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0 \end{cases}$ or ceci est $\frac{1}{h k} \Delta_h \Delta_k \Gamma(t, t)$

Corollaire 1.

Si $\frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} \Gamma(t, t')_g$ existe finie en tout point de Δ alors les dérivées $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, t')$ $\frac{\partial \Gamma}{\partial t'}(t, t')$ $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial t'}(t, t')_g$ existent finies en tout point de $T \times T$.

Cela résulte de la continuité du produit scalaire.

$$\begin{aligned} E(X'(t) \bar{X}(t')) &= E \left(\lim_{\substack{\text{m. q.} \\ h \rightarrow 0}} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \bar{X}(t') \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\Gamma(t+h, t') - \Gamma(t, t') \right) = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, t') \\ E(X'(t) \bar{X}'(t')) &= \Gamma_{X'}(t, t') = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial t'}(t, t')_g \\ \text{- Donc } \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial t'}(t, t')_g &\text{ est la covariance de } X'(t)_{\text{m. q.}} \end{aligned}$$

Corollaire 2.

Si $X(t)$ a des dérivées en m. q. jusqu'à l'ordre n les dérivées généralisées de Γ existent jusqu'à l'ordre $\begin{matrix} m \leq n & \text{en } t \\ p \leq n & \text{en } t' \end{matrix}$
et $\frac{\partial^{m+p} \Gamma}{\partial t^m \partial t'^p}(t, t')_g = E \frac{d^m X(t)}{dt^m}_{\text{m. q.}} \frac{d^p X(t')}{dt'^p}_{\text{m. q.}}$

Corollaire 3.

Une f. a. du 2^e ordre $X(t)$ sur T est analytique en moyenne quadratique si et seulement si $\Gamma_X(t, t')$ est analytique en tout point de la diagonale Δ .

Et alors $\Gamma_X(t, t')$ est analytique sur $T \times T$.

- Si $\Gamma(t, t')$ est analytique sur Δ , alors les dérivées de $X(t)$ en moyenne quadratique, de tout ordre $n \in \mathbb{N}$ existent pour tout $t \in T$, en particulier pour $t = 0$.

$$\text{Posons } X_n(t) = X(0) + \frac{t}{1!} X'(0) + \dots + \frac{t^n}{n!} X^{(n)}(0)$$

Il faut montrer que $E |X(t) - X_n(t)|^2$ converge vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$

$$E |X(t) - X_n(t)|^2 = \|X(t) - X_n(t)\|^2 = \|X(t)\|^2 - \langle X(t), X_n(t) \rangle - \langle X_n(t), X(t) \rangle + \|X_n(t)\|^2$$

$$\Gamma(t, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{m+k}}{k! m!} \frac{\partial^{m+k} \Gamma}{\partial t^m \partial t'^k}(0, 0) = \|X(t)\|^2$$

$$\langle X(t), X_n(t) \rangle = \sum_{k=0}^n E(X(t) \bar{X}^k(0) \frac{t^k}{k!}) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \frac{\partial^k \Gamma}{\partial t'^k}(t, 0)$$

$$\text{et } \frac{\partial^k \Gamma}{\partial t'^k}(t, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+m} \Gamma}{\partial t^m \partial t'^k}(0, 0) \frac{t^m}{m!}$$

$$\text{Finalement on obtient } E |X(t) - X_n(t)|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{t^{m+k}}{k! m!} \frac{\partial^{m+k} \Gamma}{\partial t^m \partial t'^k}(0, 0)$$

- Réciproquement si $X(t) = \lim_{\substack{m, q. \\ n \rightarrow +\infty}} X_n(t)$ (où $X_n(t)$ est un polynome en t , à coefficients aléatoires)

$$X(t') = \lim_{\substack{m, q. \\ n' \rightarrow +\infty}} X_{n'}(t') \text{ et } E(X(t) \bar{X}(t')) = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n' \rightarrow +\infty}} E(X_n(t) \bar{X}_{n'}(t'))$$

Donc $\Gamma(t, t')$ est la somme d'une série entière en t et t' .

IV. - Intégration en moyenne quadratique.

Soient $X(t)$, $Y(t)$ deux fonctions aléatoires du second ordre, de covariances $\Gamma_X(t, t')$ et $\Gamma_Y(t, t')$, qui ne sont pas supposées centrées. En effet on considèrera des cas particuliers dans lesquels l'une ou l'autre de ces fonctions sera une fonction sûre.

1. - Définition de $\int_a^b X(t) dY(t)$ intégrale de Riemann-Stieltjes m. q.

Soit $a = t_1 \leq \theta_1 < t_2 \leq \theta_2 \dots t_n \leq \theta_n < t_{n+1} = b$

$D = (a, \theta_1, t_2, \dots, \theta_n, b)$. $|D| = \sup_k |t_{k+1} - t_k|$

$$S_D = \sum_{k=1}^n X(\theta_k) (Y(t_{k+1}) - Y(t_k))$$

Si S_D a une limite en m. q. quand $|D| \rightarrow 0$ on pose

$$\text{i. m. q. } \int_a^b X(t) dY(t) = \lim_{\substack{|D| \rightarrow 0 \\ \text{m. q.}}} \sum_{k=1}^n X(\theta_k) (Y(t_{k+1}) - Y(t_k))$$

Il suffit de se donner $Y(t)$ définie à l'addition près d'une variable aléatoire (indépendante de t).

$$\text{i. m. q. } \int_a^{+\infty} X(t) dY(t) = \lim_{\substack{\text{m. q.} \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b X(t) dY(t) \text{ à condition que cette limite existe.}$$

2. - Théorème.

Soit I un intervalle fini ou infini.

Si $X(t)$ est une f. a. du second ordre indépendante de la fonction aléatoire du second ordre $Y(t')$ sur $I \times I$ pour que i. m. q.

$\int_I X(t) dY(t)$ existe il faut et suffit que

$$\text{i. R. S; } \iint_{I \times I} \Gamma_X(t, t') d d' \Gamma_Y(t, t') \text{ existe.}$$

Supposons I fini. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble de toutes les subdivisions pointées D de I . $(S_D)_{D \in \mathcal{D}}$ est une famille de v. a. du second ordre ; à "covariances" finies :

$$E(S_D \bar{S}_{D'}) < +\infty$$

en effet :

$$\begin{aligned} E(S_D \bar{S}_{D'}) &= \sum_{k=1}^n \sum_{k'=1}^{n'} E \left(X(\theta_k) [Y(t_{k+1}) - Y(t_k)] X(\theta'_{k'}) [Y(t'_{k'+1}) - Y(t'_{k'})] \right) \\ (E) \quad &= \sum_{k=1}^n \sum_{k'=1}^{n'} \Gamma_X(\theta_k, \theta'_{k'}) \Delta_{t_{k+1} - t_k} \Delta_{t'_{k'+1} - t'_{k'}} \Gamma_Y(t_k, t'_{k'}) \end{aligned}$$

Par une extension du lemme (2 IV) pour que S_D ait une limite en m. q. quand $|D| \rightarrow 0$ il faut et suffit que $E(S_D \bar{S}_{D'})$ ait une limite quand $|D| \rightarrow 0$ et $|D'| \rightarrow 0$.

D'après l'égalité ci-dessus (E) cela revient à dire que l'intégrale de R. S $\iint_{I \times I} \Gamma_X(t, t') d d' \Gamma_Y(t, t')$ existe.

3. - Corollaire.

Soient $X^s(t)$ et $Y(t')$ des fonctions aléatoires du second ordre indépendantes. Si les intégrales en m. q. ci-dessous existent, alors

$$E \left(\int_I X^s(t) dY(t) \int_{I'} \bar{X}^{s'}(t') d\bar{Y}(t') \right) = \iint_{I \times I'} E(X^s(t) \bar{X}^{s'}(t')) d d' \Gamma_Y(t, t')$$

L'intégrale double étant l'intégrale de Riemann-Stieltjes

Si I et I' sont des intervalles finis $\int_I X^s(t) dY(t) = \lim_{\substack{\text{m. q.} \\ |D| \rightarrow 0}} S_D$

$$\int_{I'} \bar{X}^{s'}(t') d\bar{Y}(t') = \lim_{|D'| \rightarrow 0} \bar{S}'_{D'}$$

où $S_D = \sum_{k=1}^n X^s(\theta_k) [Y(t_{k+1}) - Y(t_k)]$

$$\bar{S}'_{D'} = \sum_{k'=1}^n \bar{X}^{s'} (\Theta'_{k'}) [\bar{Y} (t'_{k'+1}) - \bar{Y} (t'_{k'})]$$

$$\text{Or } E \left(\lim_{\substack{\text{m. q.} \\ |D| \rightarrow 0}} S_D \times \lim_{\substack{\text{m. q.} \\ |D'| \rightarrow 0}} \bar{S}'_{D'} \right) = \lim_{\substack{|D| \rightarrow 0 \\ |D'| \rightarrow 0}} E (S_D \bar{S}'_{D'}) \text{ d'où le résultat.}$$

Pour I et I' infinis les intégrales quand elles existent sont définies comme limites d'intégrales sur des intervalles finis.

Cas particuliers.

$$1^\circ) \text{ Si } \xi_n = \int_a^b X_n(t) dt \text{ i. m. q. existe}$$

$$E(\xi_n \bar{\xi}_m) = \int_a^b \int_a^b E(X_n(t) \bar{X}_m(t')) dt dt'$$

$$2^\circ) z(t) = \int_a^b f_t(s) dY(s) \text{ où } f_t(s) \text{ est une fonction certaine.}$$

$$\text{Si } z(t) \text{ existe (i. m. q.) } E(z(t) \bar{z}(t')) =$$

$$\int_a^b \int_a^b f_t(s) \bar{f}_{t'}(s') dd' \Gamma_Y(s, s')$$

4. - Critère d'existence.

Si la fonction aléatoire du second ordre $X(t)$ est continue en m. q., indépendante sur $I \times I$ de la fonction aléatoire du second ordre $Y(t')$.

Si la covariance $\Gamma_X(t, t')$ est bornée sur $I \times I$.

et si la covariance $\Gamma_Y(t, t')$ est à variation bornée sur $I \times I$.

Alors $\int_I X(t) dY(t)$ existe.

$\Gamma_Y(t, t')$ est à variation bornée sur $I \times I$ où I est fini si il existe une constante C_I telle que D et D' étant deux subdivisions quelconques de I .

$$\sum_{\substack{t_j \in D \\ t'_k \in D'}} |\Gamma_Y(t_{j+1}, t'_{k+1}) - \Gamma_Y(t_j, t'_{k+1}) - \Gamma_Y(t_{j+1}, t'_k) + \Gamma_Y(t_j, t'_k)| < C_I < +\infty$$

$$\text{notation abrégée : } \sum_{t \in D} \sum_{t' \in D'} |\Delta \Delta' Y(t, t')| < C_I < +\infty$$

Quand I est infini.

$\Gamma_Y(t, t')$ est à variation bornée sur $I \times I$ si pour tout I' fini, inclus dans I $C_I, \leq C < + \infty$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Blanc - Lapierre et R. Fortet

Théorie des Fonctions Aléatoires.

[2]. M. Loève :

Probability Theory.

[3]. A. Tortrat : Calcul des Probabilités.

[4]. J. L. Doob. Stochastic Processes.

° ° ° °

o