

FAUCONNET

Covariance d'une fonction aléatoire du second ordre

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1964-1965
« Séminaire d'initiation aux probabilités », , exp. n° 6, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1964-1965____A6_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COVARIANCE D'UNE FONCTION ALEATOIRE DU SECOND ORDRE

I - Définition.

Nous étudions les fonctions aléatoires complexes du second ordre :
 $X(t) = Y(t) + i Z(t) \quad t \in T \subset \mathbb{R}$; $Z(t), Y(t)$ sont des
 fonctions aléatoires réelles et $t \in T : E |X(t)|^2 < +\infty$

Donc $E(X(t))$ est finie $\forall t \in T$, et d'après l'inégalité de
 Schwarz $\Gamma_X(t, t') = E(X(t) \overline{X}(t'))$ existe, finie pour tout $(t, t') \in T \times T$.

$\Gamma_X(\cdot, \cdot)$ est une fonction définie sur $T \times T$, à valeurs complexes, ap-
 pelée covariance de la fonction aléatoire $X(\cdot)$ sur T .

- Réciproquement si $\Gamma_X(t, t')$ est fini sur $T \times T$ alors $\Gamma_X(t, t) =$
 $E |X(t)|^2 < +\infty, t \in T$
 et $X(t)$ est une fonction aléatoire du second ordre.

- Remarque.

Etant données une f. a. $X(t)$ du 2^e ordre de covariance
 $\Gamma_X(t, t')$ et une v. a H indépendante de $X(t) \forall t \in T$, telle que
 $E(H) = 0, E |H|^2 = 1$ la f. a. $Y(t) = H X(t)$ est du se-
 cond ordre.

Sa covariance est $\Gamma_Y(t, t') = \Gamma_X(t, t')$

et de plus $E(Y(t)) = 0 \quad \forall t \in T$.

Donc, dans la suite on supposera que $X(t)$ est centrée $\forall t \in T$
 i. e. $E(X(t)) = 0$, sauf lorsque le contraire sera expli-
 citement mentionné.

II. - Propriété caractéristique des covariances.

$$\Gamma(t, t) = E\{|X(t)|^2\} \geq 0$$

$$\Gamma(t, t') = E(X(t) \overline{X(t')}) = E(\overline{X(t')} X(t))$$

$$\text{soit : } \Gamma(t, t') = \overline{\Gamma(t', t)}$$

Donc Γ est hermitienne.

Définition.

$F(t, t')$ sur $T \times T$ est dite définie de type non - négatif si $\forall n$, $\forall (t_1, t_2, \dots, t_n)$ suite de n éléments de T et $\forall a_1, a_2, \dots, a_n$ réels ou complexes

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n F(t_j, t_k) a_j \overline{a_k} \geq 0$$

Une fonction de type non négatif est hermitienne.

en effet en prenant $n = 1$ on obtient $F(t, t) \geq 0 \quad \forall t$

en prenant $n = 2$, la suite (t, t') et les nombres complexes a et b on obtient

$$(a)^2 F(t, t) + a \overline{b} F(t, t') + \overline{a} b F(t', t) + |b|^2 F(t', t') \geq 0$$

$$\text{or } |a|^2 F(t, t) + |b|^2 F(t', t') \geq 0$$

donc $a \overline{b} F(t, t') + \overline{a} b F(t', t)$ est réel :

en donnant à $a \overline{b}$ les valeurs 1 et i on trouve donc $F(t, t') = \overline{F(t', t)}$

THEOREME.

Pour qu'une fonction (t, t') définie sur $T \times T$ soit une covariance il faut et il suffit qu'elle soit de type non - négatif sur $T \times T$.

- Condition nécessaire : Soit une f. a. $X(t)$ du second ordre et $\Gamma_X(t, t')$ sa covariance

$\forall n$, $\forall (t_1, t_2, \dots, t_n)$ et $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n)$ formons

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \Gamma(t_j, t_k) a_j \bar{a}_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n E(X(t_j) \bar{X}(t_k) a_j \bar{a}_k) \\ &= E \left(\sum_{j=1}^n a_j X(t_j) \right) \left(\sum_{k=1}^n \bar{a}_k \bar{X}(t_k) \right) \\ &= E \left| \sum_{j=1}^n a_j X(t_j) \right|^2 \end{aligned}$$

Donc $S_n \geq 0$.

- Condition suffisante.

$\Gamma(t, t')$ étant de type non - négatif sur $T \times T$ on va démontrer qu'il existe une f. a. gaussienne dont la covariance est $\Gamma(t, t')$.

1°) Rappels : X obéit à la loi de Gauss si sa densité de répartition est

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{Alors} \quad E(X) = 0, E(X^2) = 1$$

$$\text{Sa fonction caractéristique est } \varphi(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

$$Y = \sigma X + m \quad \text{est du type de } X \quad - \frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}$$

$$\text{Sa densité de répartition est } g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E(Y) = m$$

$$E|Y - m|^2 = \sigma^2$$

$$\text{Sa fonction caractéristique est } e^{i u m} e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}}$$

- Une combinaison linéaire de variables aléatoires indépendantes, du type de Gauss, est une variable aléatoire du type de Gauss.

$$\text{Soit } Y = \sum_j a_j X_j = \sum_j Y_j$$

La fonction caractéristique de Y est le produit des fonctions caractéristiques des Y_j

$$\begin{aligned} \text{donc } \varphi(u) &= \prod_j e^{i u m_j} e^{-\frac{\sigma_j^2 u^2}{2}} \\ &= e^{i u \sum (m_j)} e^{-\frac{\sum \sigma_j^2 u^2}{2}} \end{aligned}$$

2°) Lemme de Loève [2] p. 466

Soit une forme quadratique $Q(u) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{jk} u_j u_k$
positive : $Q(u) \geq 0$ quels que soient les u_j réels, à coefficients réels :
 $m_{jk} \in (-\infty, +\infty)$, et $m_{jk} = m_{kj}$.

Il existe des variables aléatoires gaussiennes X_k (certaines peuvent être dégénérées) à valeurs réelles telles que

$$m_{jk} = E(X_j X_k).$$

- Démonstration.

$Q(u) = R(v) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 v_k^2$ c'est la décomposition en somme de carrés à coefficients positifs d'une forme quadratique positive.

$\forall k \quad v_k$ est une combinaison linéaire de $u_1, u_2, \dots, u_n$.

$$e^{-\frac{R(v)}{2}} = \prod_{k=1}^n e^{-\frac{\sigma_k^2}{2} v_k^2} \quad \text{est la fonction caractéristique conjointe de } (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \text{ où } Y_k \text{ est la variable aléatoire gaussienne centrée, d'écart } E(Y_k^2) = \sigma_k^2$$

Les Y_k étant indépendantes.

$$\text{Donc } R(v) = \sum_{k=1}^n v_k^2 E(Y_k)^2 = \sum_{k=1}^n E(v_k Y_k)^2 = E\left(\sum_{k=1}^n v_k Y_k\right)^2$$

$$\text{Par suite } Q(u) = E\left(\sum u_k X_k\right)^2$$

où les X_k sont des combinaisons linéaires des v. a. gaussiennes indépendantes Y_j .

Les X_k sont donc des variables aléatoires gaussiennes et
 $m_{jk} = E(X_j X_k)$.

La densité de répartition de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est

$$e^{-\frac{1}{2} P(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad \text{où } P(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ est}$$

la forme quadratique réciproque de $Q(u_1, u_2, \dots, u_n)$

3°) Démonstration de la condition suffisante du théorème. [2] p. 467
[4] p. 71 . 73

Soit T_n un sous-ensemble fini de T . $T_n = \{t_1, t_2 \dots t_n\}$

$S = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \Gamma(t_j, t_k) a_j \bar{a}_k \geq 0$ quels que soient les nombres complexes a_j .

Posons $a_j = u_j - i v_j$ (u_j, v_j réels)

et $\Gamma(t_j, t_k) = A(t_j, t_k) + i B(t_j, t_k)$ A et B fonctions réelles).

d'où $S = \sum_j \sum_k \frac{1}{2} A(t_j, t_k) (u_j u_k - v_j v_k) - \frac{1}{2} B(t_j, t_k) (u_j v_k - v_j u_k)$
 $= Q(u, v)$. $Q(u, v)$ est une forme quadratique des $2n$ variables u_j et v_k , positive ou nulle.

On va pouvoir appliquer le lemme de Loève si on vérifie que $Q(u, v)$ est une forme symétrique c'est-à-dire si :

$$A(t_j, t_k) = A(t_k, t_j) \text{ et } B(t_j, t_k) = -B(t_k, t_j)$$

Or ceci résulte du fait que Γ est de type non - négatif et par suite hermitienne.

Donc il existe une v. a. gaussienne de dimension 2
($Y_1, Y_2 \dots Y_n, Z_1, Z_2 \dots Z_n$), de fonction caractéristique $e^{-\frac{1}{2} Q(u, v)}$

telle que $E(Y_j Y_k) = \text{coefficient de } u_j u_k = \frac{1}{2} A(t_j, t_k)$

$$E(Z_j Z_k) = \text{coefficient de } v_j v_k = \frac{1}{2} A(t_j, t_k)$$

$$E(Z_j Y_k) = \text{coefficient de } v_j u_k = \frac{1}{2} B(t_j, t_k)$$

Posons $X_j = Y_j + i Z_j$.

$$E(X_j X_k) = E(Y_j + i Z_j)(Y_k + i Z_k) = 0.$$

$$E(X_j \bar{X}_k) = A(t_j, t_k) + i B(t_j, t_k) = \Gamma(t_j, t_k)$$

Pour $t_j \in T_n$ posons $X(t_j) = X_j$.

Pour toute famille finie T_n d'indices on obtient aussi une v. a gaussienne complexe de dimension n dont la covariance est $\Gamma(t, t')$ sur $T_n \times T_n$, associée à une variable aléatoire gaussienne réelle de dimension 2_n .

Il reste la question suivante : ces lois forment-elles un système projectif ?

[1] chap. III. A. 3.

i e : Si $T_m \subset T_n$ est-ce que la loi marginale sur T_m coïncide avec la loi sur T_m ?

Il suffit de le vérifier pour $m = n - 1$

Soit $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n, Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ la variable aléatoire gaussienne

à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$ associée à $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$

$$X_{t_j} = Y_j + i Z_j \text{ comme ci-dessus.}$$

Sa fonction caractéristique est : $e^{-\frac{1}{2} Q(u, v)}$

Sa densité de répartition $K e^{-\frac{1}{2} P(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)}$

$$= \int_n (y_1, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_n) = (y, z)$$

$$C^{-\frac{1}{2} Q(u, v)} = \iint \dots \int e^{iu_1 y_1 + iu_2 y_2 + \dots + iu_n y_n + \dots + iv_n z_n} \int_n (y, z) dy_1 \dots dz_r$$

$$= \iint \dots \int e^{iu_1 y_1 + \dots + iu_{n-1} y_{n-1} + iv_1 z_1 + \dots + iv_{n-1} z_{n-1}} \iint e^{iu_n y_n + iv_n z_n} \int_n (y, z) dy_1 \dots dz_n$$

Or la densité marginale de $(Y_1, \dots, Y_{n-1}, Z_1, \dots, Z_{n-1})$ est :

$$\int_{n-1} (y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_n (y_1 \dots y_n, z_1 \dots z_n) dy_n dz_n.$$

Sa fonction caractéristique est donc :

$$\iint \dots \int e^{iu_1 y_1 + \dots + iu_{n-1} y_{n-1} + iv_1 z_1 + \dots + iv_{n-1} z_{n-1}} \int_{n-1} (y, z) dy_1 \dots dy_{n-1} dz_1 \dots dz_{n-1}$$

$$- \frac{1}{2} Q(u_1, \dots, u_{n-1}, 0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, 0)$$

C'est donc e

Les conditions de Kolmogorov sont donc satisfaites.

III- Propriétés des covariances.

1. - La partie réelle d'une covariance en est une

la partie imaginaire non. (sauf si elle est nulle)

Ceci résulte de la démonstration de la condition suffisante dans le théorème précédent.

$$\Gamma(t, t') = A(t, t') + i B(t, t'), \quad E(\sqrt{2} Y(t) \sqrt{2} Y(t')) = A(t, t')$$

$$B(t, t) = 0 \text{ car } \Gamma(t, t) \geq 0$$

Si il existe $X(t)$ f. a telle que $B(t, t') = E X(t) \overline{X}(t')$

$$\text{alors } E |X(t)|^2 = 0 \quad \forall t \in T$$

donc $X(t) = 0$ presque partout

2. - La somme de deux covariances en est une

le produit " " " " "

Soient $\Gamma_1(t, t')$ et $\Gamma_2(t, t')$ deux covariances.

Soit $X_1(t)$ f. a gaussienne sur l'espace probabilisé $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ de covariance $\Gamma_1(t, t')$.

et soit $X_2(t)$ f. a gaussienne sur $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$

Formons l'espace produit avec la probabilité $P_1 \times P_2$. On obtient ainsi deux fonctions aléatoires indépendantes et centrées.

$$\text{d'où } E(X_1(t) + X_2(t))(\overline{X}_1(t') + \overline{X}_2(t')) = \Gamma_1(t, t') + \Gamma_2(t, t')$$

$$E(X_1(t) X_2(t))(\overline{X}_1(t') \overline{X}_2(t')) = \Gamma_1(t, t') \Gamma_2(t, t')$$

3. - Si une suite de covariances $\Gamma_n(t, t')$ a une limite finie

$\Gamma(t, t')$ sur $T \times T$ quand $n \rightarrow \infty$, $\Gamma(t, t')$ est une covariance.

- Toute combinaison linéaire à coefficients positifs d'un nombre fini de covariances en est une.