

MÉTIVIER

Convergence des suites de mesures Compacité faible dans L^1

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1964-1965
« Séminaire d'initiation aux probabilités », , exp. n° 3, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1964-1965____A3_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Convergence des suites de mesures

Compacité faible dans L^1

I- Espace métrique $\mathcal{F}(\mu)$

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, μ une mesure positive bornée sur $\mathcal{F}$, $M(\mathcal{F}, \mu)$ l'espace des classes d'équivalence pour μ de fonctions réelles $\mathcal{F}$ mesurables, muni de la métrique définissant la convergence en mesure. On sait que $M(\mathcal{F}, \mu)$ est complet pour la structure uniforme définie par cette métrique.

Soit (l_{F_n}) une suite de classes d'équivalence de fonctions indicatrices d'éléments de $\mathcal{F}$, qui soit une suite de Cauchy dans M . Comme on peut extraire de cette suite une suite $(\tilde{l}_{F_{n_k}})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge μ -presque partout vers la limite $\tilde{f}$ de $(\tilde{l}_{F_{n_k}})$ dans M , on voit que $\tilde{f}$ est la classe d'équivalence d'une fonction qui vaut 1 ou 0. On en déduit que le sous-espace de M constitué par les classes d'indicateurs d'ensembles de $\mathcal{F}$ est fermé dans M , donc complet. On désignera par $\mathcal{F}(\mu)$ ce sous-espace métrique.

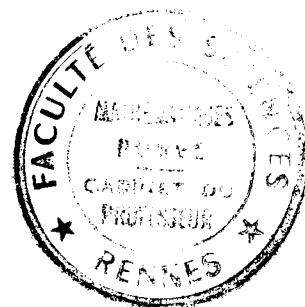
Enfin, si l'on considère la métrique de la convergence en mesure :

$$p(\tilde{f}, \tilde{g}) = \inf \left\{ \alpha : \mu([|f - g| > \alpha]) \right\}$$

On voit que pour $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{F}$ on a

$$p(\tilde{l}_F, \tilde{l}_G) = \mu(F \Delta G)$$

Par abréviation, on notera $\tilde{F}$ la classe d'équivalence de l_F .



II- Théorème de Vitali-Hahn-Saks.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré par une mesure μ positive bornée, soit (λ_n) une suite de mesures réelles (ou à valeurs dans un espace de Banach B) sur $\mathcal{F}$, absolument continues par rapport à μ

(c. a. d. : $\lim_{\varepsilon} \mu(E) = 0 \Rightarrow \lim_{\varepsilon} \lambda_n(E) = 0$) telle que $\lim_n \lambda_n F$ existe dans $\mathbb{R}$ ou B pour tout $F \in \mathcal{F}$. Alors :

$$\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \sup_n |\lambda_n(E)| = 0$$

(Autrement dit la famille (λ_n) est équi-absolument continue par rapport à μ). En outre la fonction λ définie sur $\mathcal{F}$ par $\lambda(F) = \lim_n \lambda_n(F)$ est une mesure.

DEMONSTRATION.

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{F}_{n,m} = \{F : F \in \mathcal{F}, |\lambda_n(F) - \lambda_m(F)| \leq \varepsilon\}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{F}_k = \bigcap_{n,m \geq k} \mathcal{F}_{n,m}$$

L'hypothèse suivant laquelle $\lim_n \lambda_n(F)$ existe pour tout $F \in \mathcal{F}$ implique $\mathcal{F}(\mu) = \bigcup_k \mathcal{F}_k$

En outre la définition des $\mathcal{F}_{n,m}$ et $\mathcal{F}_k$, et l'absolue continuité des λ_n montrent que les $\mathcal{F}_k$ sont fermés dans $\mathcal{F}(\mu)$.

Le théorème de Baire implique alors que l'un d'eux possède un point intérieur. Il existe donc un entier k_0 , un nombre positif r et un ensemble $A \in \mathcal{F}$ tel que :

$$\mu(A \Delta F) \leq r \implies |\lambda_n(F) - \lambda_m(F)| \text{ pour tout } n, m \geq k_0$$

Or, de l'identité :

$$F = A \cup F \setminus (A \setminus F)$$

et des inégalités

$$\mu(A \Delta (A \cup F)) \leq \mu(F)$$

et

$$\mu(A \Delta (A \setminus F)) \leq \mu(F)$$

On déduit donc que pour tout $n \geq k_0$

$$\mu(F) \leq r \implies |\lambda_n(F) - \lambda_{k_0}(F)| = |\lambda_n(A \cup F) - \lambda_{k_0}(A \cup F) - \lambda_n(A \setminus F) + \lambda_{k_0}(A \setminus F)| \leq 2\varepsilon$$

Soit alors r' tel que :

$$\mu(F) < r' \implies \lambda_n(F) \leq \varepsilon \text{ pour tout } n = 1, \dots, k.$$

On voit qu'en posant $\zeta = \inf(r, r')$ on a :

$$\mu(F) < \zeta \implies \lambda_n(F) \leq 3\varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

D'où la première propriété énoncée par la proposition.

Que λ soit additive est évident. Comme enfin pour tout $F \in \mathcal{F}$

$|\lambda(F)| \leq \sup_n |\lambda_n(F)|$, l'absolue continuité de λ , donc sa σ -additivité résultent de ce qui précède.

III- Théorème de NIKODYM.

Soit (λ_n) une suite de mesures réelles sur $\mathcal{F}$. Si $\lambda(F) = \lim_n \lambda_n(F)$ existe pour tout $F \in \mathcal{F}$, λ est une mesure sur $\mathcal{F}$, et pour toute suite décroissante (F_k) extraite de $\mathcal{F}$ telle que $\bigcap_n F_n = \emptyset$ On a $\lim_k (\sup_n |\lambda_n(F_k)|) = 0$.

DEMONSTRATION.

$$\text{Posons } \mu_n = \frac{\lambda_n}{\|\lambda_n\|}$$

Les mesures λ_n sont absolument continues par rapport à la mesure $\mu = \sum \frac{1}{2^n} \mu_n$ (sommation dans l'espace de Banach des mesures réelles). Le théorème résulte alors immédiatement du théorème précédent.

IV- Convergence faible de suites dans $L^1(\mu)$.

THEOREME-

Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables telles que pour tout F $\lim_n \int_F f_n d\mu$ existe dans $\mathbb{R}$. La suite (f_n) est alors équi-intégrable, et converge pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers une fonction intégrable f .

DEMONSTRATION.

Si on pose $\lambda_n(F) = \int_F f_n d\mu$, on voit que le théorème de Vitali-Hahn-Saks entraîne l'équi-absolue continuité de la suite (λ_n) . Pour que (f_n) soit équi-intégrable, il faut et il suffit qu'en plus la suite $(\int |f_n| d\mu)$ soit bornée.

$$\text{Or : } \int |f_n| d\mu = \int_{[f_n > 0]} f_n d\mu + \left| \int_{[f_n < 0]} f_n d\mu \right|$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\mu(F) < \varepsilon \Rightarrow \left| \int_F f_n d\mu \right| < \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On peut trouver une partition finie (G_p) de Ω au moyen d'ensembles mesurables qui sont soit des atomes soit des ensembles de mesure $< \varepsilon$.

(Voir par ex. Halmos p. 172).

On a alors si $\mu(G_p) < \varepsilon$: $\int_{G_p} |f_n| d\mu < 2\varepsilon$ pour tout n .

Si G_p est un atome les f_n sont constantes (à un ensemble de mesure nulle près) sur G_p et donc :

$$\int_{G_p} |f_n| d\mu = \left| \int_{G_p} f_n d\mu \right|$$

La limite $\lim_n \int_{G_p} f_n d\mu$ existant pour tout atome G_p , la suite des nombres

$$\left(\int_{G_p} |f_n| d\mu \right)_{n \in \mathbb{N}}$$
 est donc bornée.

Finalement $\int |f_n| d\mu = \sum_p \int_{G_p} |f_n| d\mu$ est donc le terme général d'une suite bornée. D'où l'équi-intégrabilité de (f_n) .

Nous avons remarqué à la fin de la démonstration du théorème de Vitali-Hahn-Saks que λ définie par :

$$\lambda(F) = \lim_n \int_F f_n d\mu$$

est une mesure réelle absolument continue par rapport à μ . Soit alors f une densité de λ . On a $f \in L^1$ avec

$$\lambda(F) = \int_F f d\mu \quad \text{pour tout } F \in \mathcal{F}.$$

L'hypothèse sur la suite (f_n) exprime que pour toute $h \in L^\infty$, de la forme $h = 1_F$, et par suite pour toute h étagée on a :

$$\lim_n \int h \cdot f_n d\mu = \int h \cdot f d\mu.$$

La suite (f_n) est bornée dans L^1 . C'est donc un ensemble équicontinu de formes linéaires sur L^∞ , qui converge simplement sur un ensemble partout dense dans L^∞ , donc aussi sur L^∞ .

COROLLAIRE.

Pour qu'une suite (f_n) dans L^1 converge pour $\sigma(L^1, L^\infty)$, il faut et il suffit que (f_n) soit une suite de Cauchy pour la structure uniforme $\sigma(L^1, L^\infty)$.

(Autrement dit L^1 , muni de la structure uniforme $\sigma(L^1, L^\infty)$ est séquentiellement complet).

DEMONSTRATION.

La condition est évidemment nécessaire.

Elle est suffisante par ce qu'elle entraîne que pour tout $F \in \mathcal{F}$: $\lim_n \int_F f_n d\mu$ existe, et que le théorème précédent permet alors de conclure à la convergence faible de (f_n) vers un $f \in L^1$.

V- Compacité faible dans L^1 .

THEOREME

Soit $H \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) H est équi-intégrable
- 2) H est relativement faiblement compact dans L^1

- 3) De toute suite de fonctions de H on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement (i.e. H est séquentiellement faiblement compact).

DEMONSTRATION.

L'équivalence entre 2) et 3) résulte du théorème d'Eberlein (voir Dunford et Schwartz, Linear-Operators p. 430) qui exprime que cette équivalence est vraie pour toute partie H d'un espace de Banach quelconque.

Montrons que 2) $\Rightarrow$ 1) :

Supposons que H ne soit pas équi-intégrable. Il existerait $\eta > 0$ et une suite (f_n) extraite de H telle que :

$$\text{pour tout } n : \int_{\{|f_n| \geq n\}} f_n \, d\mu \geq \eta$$

Aucune sous-suite de (f_n) n'est équi-intégrable. Elle ne peut donc converger pour $\sigma(L^1, L^\infty)$ d'après le théorème du N° 4. Ceci exclut que H soit compact pour $\sigma(L^1, L^\infty)$.

Montrons que 1) $\Rightarrow$ 2).

Si H est équi-intégrable il existe un nombre réel positif m tel que

$$N_1(f) = \int |f| \, d\mu \leq m \text{ pour tout } f \in H$$

L'ensemble H , borné dans le dual de L^∞ est donc équicontinu sur L^∞ . Son adhérence faible $\overline{H}$ dans le dual $(L^\infty)'$ est donc compacte pour $(L^{\infty'}, L^\infty)$. Nous avons seulement à montrer que $H \subset L^1$. Soit alors une forme linéaire ℓ continue sur L^∞ , telle que $\ell \in \overline{H}$. Pour tout $F \in \mathcal{F}$, et tout ε , il existe $f \in H$ tel que :

$$\left| \int f \cdot 1_F d\mu - \ell(1_F) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On déduit immédiatement de l'équi-absolue continuité des mesures de densité f (résultant de l'équi-intégrabilité de H), que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe ζ tel que :

$$\mu(F) \leq \zeta \implies \ell(1_F) \leq \varepsilon$$

L'implication 1) $\implies$ 2) à démontrer résulte donc du lemme suivant :

LEMME : Pour qu'une forme linéaire ℓ sur $L^\infty(\mu)$ soit de la forme $\ell(h) = \int h \cdot f d\mu$ avec $f \in L^1$, il faut et il suffit que la fonction d'ensembles $F \mapsto \ell(1_F)$ soit absolument continue par rapport à μ au sens suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe ζ tel que $\mu(F) \leq \zeta \implies \ell(1_F) \leq \varepsilon$.

DEMONSTRATION.

La condition est évidemment nécessaire :

Supposons que réciproquement $F \mapsto \ell(1_F)$ soit absolument continue.

Il existe une densité $f \in L^1$ telle que :

$$\ell(1_F) = \int_F f d\mu.$$

On a alors

$$\ell(h) = \int h \cdot f d\mu \quad \text{pour toute } h \text{ étagée} \in L^\infty$$

Comme $h \mapsto \int h f d\mu$ est une forme linéaire continue sur L^∞ qui coïncide avec ℓ sur le sous-espace partout dense des fonctions étagées en deux formes linéaires sont égales. D'où le lemme

Ceci achève également la démonstration du théorème.