JEAN-LOUIS WALDSPURGER

Homogénéité de certaines distributions sur les groupes p-adiques

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 81 (1995), p. 25-72

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1995__81__25_0>

HOMOGÉNÉITÉ DE CERTAINES DISTRIBUTIONS SUR LES GROUPES P-ADIQUES

par J.-L. WALDSPURGER

1. Introduction

1.1. Le but de cet article est de tirer de notre article précédent [W] quelques conséquences concernant les développements en germes d'intégrales orbitales ou de caractères de représentations irréductibles.

Soient F un corps local non archimédien, de corps résiduel fini et $\mathbf{G}$ un groupe algébrique défini sur F, réductif et connexe. On suppose que $\mathbf{G}$ appartient à l'ensemble Γ défini ci-dessous (cf. 2.1; cet ensemble est contenu dans l'ensemble noté Γ de [W] 1.3). En particulier, $\mathbf{G}$ est classique. Pour simplifier cette introduction, supposons F de caractéristique nulle. On note $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de F, p la caractéristique du corps résiduel, v_F et $|\,.\,|_F$ la valuation, resp. la valeur absolue, de F. On note $\mathbf{g}$ l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$, on pose $G = \mathbf{G}(F)$, $g = \mathbf{g}(F)$. Notons encore $C_c^\infty(G)$, resp. $C_c^\infty(g)$, l'espace des fonctions sur G, resp. g, à valeurs complexes, localement constantes et à support compact, et $C_c^\infty(G)^*$, resp. $C_c^\infty(g)^*$, son dual. On associe à $\mathbf{G}$ des entiers $d(\mathbf{G})$ et $e(\mathbf{G})$ et un ensemble fini $P(\mathbf{G})$ de nombres premiers (cf. 2.1).

Soit $\mathscr{B}$ l'immeuble de $\mathbf{G}$ sur F. Notons $S(\mathscr{B})$ l'ensemble des facettes de $\mathscr{B}$ de dimension minimale. A tout $s \in S(\mathscr{B})$, on associe le sous-groupe compact maximal K_s de G formé des éléments qui fixent tout point de s. On associe aussi à s une sous-$\mathfrak{o}$-algèbre k_s de g, que l'on peut considérer comme l'algèbre de Lie de K_s (cf. [W] 1.1 et plus loin 2.2). On peut aussi définir le plus grand sous-groupe distingué pro-nilpotent K_s^u de K_s (cf. 2.2). On note 1_{K_s}, resp. 1_{k_s}, la fonction caractéristique de K_s dans G, resp. k_s dans g.

Notons G_{tu}, resp. g_{tn}, l'ensemble des éléments topologiquement unipotents de G, resp. topologiquement nilpotents de g. Supposons $v_F(p) \leqslant (4e(\mathbf{G})\, d(\mathbf{G}))^{-1}(p-1)$ et $p \notin P(\mathbf{G})$. En précisant la définition de l'application exponentielle, on définit un isomorphisme $e : g_{tn} \to G_{tu}$, cf. 3.3.

Notons $\mathcal{O}_{nil}$ l'ensemble des orbites nilpotentes de g. Pour tout $n \in \mathcal{O}_{nil}$, on fixe une mesure sur n invariante par l'action de G et on note $\Phi_n \in C_c^\infty(g)^*$ l'intégrale orbitale associée à n.

1.2. Fixons un tore $\mathbf{T} \subset \mathbf{G}$ maximal, notons $\mathbf{t}$ son algèbre de Lie, posons $T = \mathbf{T}(F)$, $t = \mathbf{t}(F)$. On note T_{freg}, resp. t_{reg}, l'ensemble des éléments fortement réguliers de T, resp. réguliers de t. Fixons sur $T\backslash G$ une mesure invariante par translations à droite. Langlands a défini un groupe $K(T/F)$ et, pour tout $\kappa \in K(T/F)$ et tout $\gamma \in T_{freg}$, une distribution $\Phi^\kappa(\gamma, .) \in C_c^\infty(G)^*$, invariante par conjugaison, à support dans la classe de conjugaison stable de γ (cf. [L], p. 32). Pour $H \in t_{reg}$, on définit de même

$$\Phi^\kappa(H, .) \in C_c^\infty(g)^*.$$

On montre que pour tout $n \in \mathcal{O}_{nil}$, il existe une unique fonction Γ_n^κ sur t_{reg} vérifiant la relation d'homogénéité

$$\Gamma_n^\kappa(\mu^2 H) = |\mu|_F^{-\dim(n)} \Gamma_n^\kappa(H)$$

pour tous $\mu \in F^\times$, $H \in t_{reg}$, et telle que pour toute $f \in C_c^\infty(g)$, on ait l'égalité

$$\Phi^\kappa(H, f) = \sum_{n \in \mathcal{O}_{nil}} \Gamma_n^\kappa(H)\, \Phi_n(f)$$

pour tout H dans un voisinage de 0 dans t_{reg}.

Proposition. — Supposons $p \notin P(\mathbf{G})$ et $v_F(p) \leqslant (4e(\mathbf{G})\, d(\mathbf{G}))^{-1}(p-1)$. Pour tous $s \in S(\mathscr{B})$, $\kappa \in K(T/F)$, $H \in t_{reg} \cap g_{tn}$, on a l'égalité

$$\Phi^\kappa(e(H), 1_{K_s}) = \sum_{n \in \mathcal{O}_{nil}} \Gamma_n^\kappa(H)\, \Phi_n(1_{k_s}).$$

Cette proposition résout, dans le cas où $\mathbf{G}$ appartient à Γ, la question de l'homogénéité des intégrales orbitales des fonctions caractéristiques des compacts hyperspéciaux. Cette homogénéité peut être utile dans certains cas pour démontrer le « lemme fondamental » de la théorie de l'endoscopie (cf. [Ha], [W2]).

1.3. Fixons un caractère $\psi : F \to \mathbf{C}^*$ continu non trivial et une forme bilinéaire symétrique B sur g, non dégénérée et invariante par l'action adjointe de G. Pour $f \in C_c^\infty(g)$, on définit $\hat{f} \in C_c^\infty(g)$ par

$$\hat{f}(X) = \int_g f(Y)\, \psi(-B(X, Y))\, dY,$$

où dY est la mesure autoduale pour cette transformation.

Si π est une représentation admissible de $\mathbf{G}$, on note Θ_π son caractère.

Proposition. — Supposons $p \notin P(\mathbf{G})$, $p \geqslant 2d(\mathbf{G})\, e(\mathbf{G})\, (2d(\mathbf{G}) + 1)$

et $\qquad v_F(p) \leqslant (4e(\mathbf{G})\, d(\mathbf{G}))^{-1}(p-1).$

Soit π une représentation admissible irréductible de G dans un espace V. Supposons qu'il existe $s \in S(\mathscr{B})$ tel que l'espace des invariants $V^{K_s^u}$ soit non nul. Alors il existe une famille $(c_n)_{n \in \mathcal{O}_{nil}}$ de nombres complexes telle que pour toute $f \in C_c^\infty(g)$ à support dans g_{tn}, on ait l'égalité

$$\Theta_\pi(f \circ e^{-1}) = \sum_{n \in \mathcal{O}_{nil}} c_n \Phi_n(\hat{f}).$$

Remarques. — (1) On montrera que la famille $(c_n)_{n \in \mathcal{O}_{\mathrm{nil}}}$ est uniquement déterminée par l'ensemble des représentations de $\mathrm{K}_s/\mathrm{K}_s^u$ sur $\mathrm{V}^{\mathrm{K}_s^u}$ pour s parcourant un ensemble de représentants des orbites de G dans $\mathrm{S}(\mathscr{B})$.

(2) Selon une suggestion de Moy, on démontre en fait une proposition plus générale où l'on remplace K_s^u par un de ses sous-groupes de congruence.

(3) La proposition ne fait que préciser un résultat de Harish-Chandra qui affirme l'existence d'un tel développement pour f à support dans un voisinage de l'origine.

(4) Les conditions sur p figurant dans les propositions ci-dessus ne sont pas optimales. Par ailleurs ces propositions restent vraies en caractéristique positive, *mutatis mutandis*. On doit remplacer l'exponentielle par une exponentielle tronquée.

1.4. Comme on l'a dit, les résultats ci-dessus sont des conséquences de ceux que l'on a obtenus dans l'article [W]. Ces derniers précisent ceux de Howe et Harish-Chandra que l'on désigne parfois sous l'appellation (impropre) de « conjecture de Howe pour les algèbres de Lie ».

Soit $\mathrm{C} \subset g$ un sous-ensemble compact. Notons $\mathscr{D}_{\mathrm{C}}$ l'espace des formes linéaires sur $\mathrm{C}_c^\infty(g)$ invariantes par l'action coadjointe de G, à support contenu dans

$$\{(\mathrm{Ad}\, x)\, \mathrm{X};\, \mathrm{X} \in \mathrm{C},\, x \in \mathrm{G}\}.$$

Soit r un sous-groupe ouvert compact de g. Notons $\mathrm{C}_c(g/r)$ le sous-espace de $\mathrm{C}_c^\infty(g)$ formé des fonctions invariantes par r. Alors Howe et Harish-Chandra ont montré que l'image de $\mathscr{D}_{\mathrm{C}}$ par l'application de restriction $\mathrm{C}_c^\infty(g)^* \to \mathrm{C}_c(g/r)^*$ est de dimension finie. De plus, si C est fixé et r est assez grand, cette image est égale à celle de $\mathscr{D}_{\mathrm{nil}}$, où $\mathscr{D}_{\mathrm{nil}}$ est le sous-espace de $\mathrm{C}_c^\infty(g)^*$ engendré par $\{\Phi_n;\, n \in \mathcal{O}_{\mathrm{nil}}\}$.

Dans l'article [W], nous décrivons, pour certains C, un sous-groupe r, sans doute le plus petit possible, pour lequel cette dernière propriété est vraie. Ces résultats seront rappelés au § 4.

1.5. Je remercie M. Raynaud pour son aide occulte. Je remercie particulièrement G. Laumon dont l'aide m'a été précieuse pour la mise au point des démonstrations du § 2. Béni soit son nom.

2. Les objets

2.1. Soit donc F un corps local non archimédien de corps résiduel fini f. On définit p, v_{F} et $\mathfrak{o}$ comme en 1.1, on note $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}$ et ϖ une uniformisante. Considérons les différents ensembles de groupes $\mathbf{G}$ suivants (où il s'agit toujours de groupes réductifs définis sur F). A chaque élément de ces ensembles, on associe deux entiers $d(\mathbf{G})$ et $e(\mathbf{G})$ et un ensemble $\mathrm{P}(\mathbf{G})$ de nombres premiers.

(1) $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_d$ pour $d \in \mathbf{N}$, $d \geqslant 2$; $d(\mathbf{G}) = d$, $e(\mathbf{G}) = 1$, $\mathrm{P}(\mathbf{G})$ est l'ensemble des diviseurs premiers de d.

(2) Soit V un espace de dimension finie d sur F muni d'une forme bilinéaire non dégénérée symétrique ou antisymétrique. On suppose qu'il existe un $\mathfrak{o}$-réseau de V autodual. Si la forme est antisymétrique, on pose $\mathbf{G} = \mathrm{Sp}(\mathrm{V})$. Si la forme est symétrique, on suppose $d \geqslant 3$, on pose $\mathbf{G} = \mathrm{Spin}(\mathrm{V})$. Dans les deux cas, on pose $d(\mathbf{G}) = d$, $e(\mathbf{G}) = 1$, $\mathrm{P}(\mathbf{G}) = \{2\}$.

(3) Soient E une extension quadratique de F, V un espace de dimension finie $d \geqslant 2$ sur E muni d'une forme hermitienne non dégénérée. On suppose qu'il existe un $\mathfrak{o}_{\mathrm{E}}$-réseau de V autodual, où $\mathfrak{o}_{\mathrm{E}}$ est l'anneau des entiers de E. On pose $\mathbf{G} = \mathrm{SU}(\mathrm{V})$, $d(\mathbf{G}) = d$; $e(\mathbf{G})$ est l'indice de ramification de E/F et $\mathrm{P}/\mathbf{G})$ est l'union de $\{2\}$ et de l'ensemble des diviseurs premiers de d.

(4) $\mathbf{G}$ est un tore défini sur F. Soit E la plus petite extension de F sur laquelle $\mathbf{G}$ se déploie. On note $e(\mathbf{G})$ l'indice de ramification de E/F, $d(\mathbf{G}) = 1$, $\mathrm{P}(\mathbf{G})$ est l'ensemble des diviseurs premiers de [E:F].

On note $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_4$ les ensembles de groupes définis en (1), ..., (4) et $\Gamma_0 = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i$. On note Γ l'ensemble des triplets $(\mathbf{G}, (\mathbf{G}_i)_{i\in\mathrm{I}}, \varphi)$ vérifiant les conditions suivantes :

a) $\mathbf{G}$ est un groupe réductif connexe défini sur F;

b) $(\mathbf{G}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille finie d'éléments de Γ_0;

c) φ est un morphisme séparable défini sur F de sorte que l'on ait une suite exacte

$$1 \to \Delta \to \prod_{i=\mathrm{I}} \mathbf{G}_i \xrightarrow{\varphi} \mathbf{G} \to 1$$

où Δ est un sous-groupe fini central de $\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathbf{G}_i$, constant sur une extension non ramifiée de F.

Par abus de notations, on écrira $\mathbf{G} \in \Gamma$ au lieu de $(\mathbf{G},(\mathbf{G}_i)_{i\in\mathrm{I}}, \varphi) \in \Gamma$. Il sera alors tacitement entendu que l'on se donne en plus de $\mathbf{G}$ des objets $(\mathbf{G}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et φ vérifiant les conditions ci-dessus.

Pour $(\mathbf{G},(\mathbf{G}_i)_{i\in\mathrm{I}}, \varphi) \in \Gamma$, on pose $d(\mathbf{G}) = \sup\{d(\mathbf{G}_i)\,;\, i \in \mathrm{I}\}$, $e(\mathbf{G}) = \sup\{e(\mathbf{G}_i)\,;\, i \in \mathrm{I}\}$

$$\mathrm{P}(\mathbf{G}) = \mathrm{P}(\varphi) \cup \Big(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{P}(\mathbf{G}_i)\Big),$$

où $\mathrm{P}(\varphi)$ est l'ensemble des diviseurs premiers de $|\ker \varphi|$.

2.2. Soient $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe sur F et $\mathscr{B}$ l'immeuble de G. On note $\mathrm{S}(\mathscr{B})$, resp. $\mathrm{C}(\mathscr{B})$, l'ensemble des facettes de $\mathscr{B}$ de dimension minimale, resp. maximale. Pour tout $s \in \mathrm{S}(\mathscr{B})$, on introduit le groupe algébrique $\mathbf{G}_s^0$ sur $\mathfrak{o}$ ([T] 3.4.1). C'est l'unique groupe affine lisse sur $\mathfrak{o}$ de fibre générique $\mathbf{G}$ et vérifiant la propriété suivante. Soient F′ une extension non ramifiée de F et $\mathfrak{o}'$ son anneau d'entiers. L'immeuble $\mathscr{B}$ s'identifie à un sous-ensemble de l'immeuble $\mathscr{B}'$ de $\mathbf{G}$ sur F′. Rappelons que $\mathbf{G}(\mathrm{F}')$ agit sur $\mathscr{B}'$. Notons $\mathrm{Fix}_{\mathbf{G}(\mathrm{F}')}(s)$ le groupe des éléments de $\mathbf{G}(\mathrm{F}')$ qui fixent tout point de s. Alors $\mathbf{G}_s^0(\mathfrak{o}') = \mathrm{Fix}_{\mathbf{G}(\mathrm{F}')}(s)$.

Posons $\mathbf{G}_s = \mathbf{G}_s^{\circ} \times_{\mathfrak{o}} f$, notons $\mathrm{R}^u\,\mathbf{G}_s$ le radical unipotent de $\mathbf{G}_s$. Il existe un unique groupe affine lisse $\mathbf{G}_s^{u,\circ}$ de fibre générique $\mathbf{G}$, tel que pour tout $\mathfrak{o}'$ comme ci-dessus, $\mathbf{G}_s^{u,\circ}(\mathfrak{o}')$ soit l'image réciproque de $\mathrm{R}^u\,\mathbf{G}_s(f')$ par l'application de réduction

$$\mathbf{G}_s^{\circ}(\mathfrak{o}') \to \mathbf{G}_s(f'),$$

où f' est le corps résiduel de $\mathfrak{o}'$ (cf. [BLR] 3.2).

On pose $\mathrm{K}_s = \mathbf{G}_s^{\circ}(\mathfrak{o})$, $\mathrm{K}_s^u = \mathbf{G}_s^{u,\circ}(\mathfrak{o})$. Pour $h \in \mathbf{N}$, $h \geqslant 1$, on définit des sous-groupes K_s^h de K_s et $\mathrm{K}_s^{u,h}$ de K_s^u par les suites exactes

$$1 \to \mathrm{K}_s^h \to \mathbf{G}_s^{\circ}(\mathfrak{o}) \to \mathbf{G}_s^{\circ}(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^h) \to 1,$$

$$1 \to \mathrm{K}_s^{u,h} \to \mathbf{G}_s^{u,\circ}(\mathfrak{o}) \to \mathbf{G}_s^{u,\circ}(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^h) \to 1.$$

Pour unifier les notations, on posera parfois $\mathrm{K}_s^{u,0} = \mathrm{K}_s^u$.

On note $\mathbf{g}_s^{\circ}$ et $\mathbf{g}_s^{u,\circ}$ les algèbres de Lie de $\mathbf{G}_s^{\circ}$ et $\mathbf{G}_s^{u,\circ}$ sur $\mathfrak{o}$. Posons $\mathbf{g}_s = \mathbf{g}_s^{\circ} \times_{\mathfrak{o}} f$. C'est l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}_s$. Notons $\mathrm{R}^u\,\mathbf{g}_s$ l'algèbre de Lie de $\mathrm{R}^u\,\mathbf{G}_s$. C'est une sous-algèbre de $\mathbf{g}_s$. On pose $k_s = \mathbf{g}_s^{\circ}(\mathfrak{o})$, $k_s^u = \mathbf{g}_s^{u,\circ}(\mathfrak{o})$. De l'application de restriction à la fibre spéciale se déduit un isomorphisme entre $k_s/\mathfrak{p}k_s$ et $\mathbf{g}_s(f)$.

Lemme. — L'algèbre de Lie k_s^u est l'image réciproque de $\mathrm{R}^u\,\mathbf{g}_s(f)$ *par l'application de restriction à la fibre spéciale.*

Cela résulte aisément de la construction de [BLR] 3.2. □

2.3. Les constructions ci-dessus peuvent être faites pour n'importe quelle facette de $\mathscr{B}$, et non seulement pour celles de dimension minimale. En particulier, soit $c \in \mathrm{C}(\mathscr{B})$. On définit comme ci-dessus des groupes K_c, K_c^u, $\mathrm{K}_c^{u,h}$ et des $\mathfrak{o}$-algèbres k_c, k_c^u. Nous noterons plutôt ces objets B_c, U_c, U_c^h, b_c, n_c. Notons $\mathrm{S}(c)$ le sous-ensemble des éléments de $\mathrm{S}(\mathscr{B})$ contenus dans l'adhérence de c.

Lemme. — On a les égalités $b_c = \bigcap_{s \in \mathrm{S}(c)} k_s$, $n_c = \sum_{s \in \mathrm{S}(c)} k_s^u$.

Remarque. — Si $\mathbf{G} \in \Gamma$, ces égalités se vérifient aisément grâce aux constructions explicites des § 2.6 à 2.10.

Preuve. — On peut remplacer F par une extension non ramifiée et supposer que $\mathbf{G}$ est quasi déployé. On peut ensuite remplacer $\mathbf{G}$ par son groupe dérivé : dans chacune des égalités les réseaux sont sommes directes d'un réseau fixe et de leurs analogues dans le groupe dérivé. Par cette opération les facettes restent des facettes. Pour toute facette σ de $\mathscr{B}$, on note $\mathbf{G}_\sigma$ le groupe lisse sur $\mathfrak{o}$ attaché à σ ([T] 3.4.1).

Fixons un tore déployé maximal $\mathbf{S}$ de $\mathbf{G}$ tel que c appartienne à l'appartement A attaché à $\mathbf{S}$. Notons Φ l'ensemble des racines indivisibles de $(\mathbf{G}, \mathbf{S})$, fixons un sous-ensemble Φ^+ de racines positives. D'après [BT] 3.8.1 et 4.6, il existe :

— un groupe lisse sur $\mathfrak{o}$ noté $\mathbf{Z}^{\circ}$, de fibre générique le commutant de $\mathbf{S}$;

et pour toute facette $\sigma \subset A$, il existe

— pour tout $\alpha \in \Phi$, un groupe lisse sur $\mathfrak{o}$ noté $\mathbf{U}^0_{\sigma,\alpha}$, de fibre générique le sous-groupe radiciel de $\mathbf{G}$ attaché aux multiples de α;

— une application

$$(\prod_{\alpha\in\Phi^+} \mathbf{U}^0_{\sigma,-\alpha}) \times \mathbf{Z}^0 \times (\prod_{\alpha\in\Phi^+} \mathbf{U}^0_{\sigma,\alpha}) \to \mathbf{G}^0_\sigma$$

égale au produit sur la fibre générique, qui soit un isomorphisme du schéma de départ sur un voisinage ouvert de l'unité dans $\mathbf{G}$.

Notons $\mathbf{u}^0_{\sigma,\alpha}$ et $\mathbf{z}^0$ les algèbres de Lie de $\mathbf{U}^0_{\sigma,\alpha}$ et $\mathbf{Z}^0$. On a l'égalité

$$g = \mathbf{z}^0(\mathrm{F}) \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathbf{u}^0_{\sigma,\alpha}(\mathrm{F})$$

et il résulte des propriétés ci-dessus que

$$k = \mathbf{z}^0(\mathfrak{o}) \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathbf{u}^0_{\sigma,\alpha}(\mathfrak{o}). \tag{1}$$

Par ailleurs, il résulte de [BT] 4.6.26 que pour tout $\alpha \in \Phi$, on a

— si σ et σ' sont deux facettes de A,

$$\mathbf{U}^0_{\sigma,\alpha} \subset \mathbf{U}^0_{\sigma',\alpha} \quad \text{ou} \quad \mathbf{U}^0_{\sigma',\alpha} \subset \mathbf{U}^0_{\sigma,\alpha};$$

— si $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_r$ sont de telles facettes et si σ est l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, alors

$$\mathbf{U}^0_{\sigma,\alpha} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathbf{U}^0_{\sigma_i,\alpha}.$$

De ces deux propriétés résulte que dans la situation ci-dessus,

$$\mathbf{u}^0_{\sigma,\alpha}(\mathfrak{o}) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathbf{u}^0_{\sigma_i,\alpha}(\mathfrak{o}). \tag{2}$$

Comme c est l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\mathrm{S}(c)$, la première égalité de l'énoncé résulte de (1) et (2).

Pour toute facette σ, notons $\mathbf{G}^{0,0}_\sigma$ la composante neutre de $\mathbf{G}^0_\sigma$ et $\mathrm{G}^0_\sigma = \mathbf{G}^{0,0}_\sigma \times f$. Il résulte de [BT] 4.6.33 que, si $\sigma \subset \sigma'$, il y a une injection naturelle $\mathbf{G}^{0,0}_{\sigma'} \to \mathbf{G}^{0,0}_\sigma$ et que $\mathbf{G}^{0,0}_{\sigma'}$ s'identifie à l'épaississement, au sens de [BLR] 3.2, d'un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}_{\sigma,\sigma'}$ de $\mathbf{G}^0_\sigma$. *A fortiori* $\mathrm{G}^{u,0}_\sigma \subset \mathrm{G}^0_{\sigma'}$, et $\mathbf{G}^{u,0}_{\sigma'}$ s'identifie à l'épaississement du radical unipotent $\mathbf{U}_{\sigma,\sigma'}$ de $\mathbf{P}_{\sigma,\sigma'}$. Ces relations se transfèrent aux algèbres de Lie : on obtient que

$$\mathrm{p}k_\sigma \subset k^u_\sigma \subset k^u_{\sigma'} \subset k_{\sigma'} \subset k_\sigma,$$

$k_{\sigma'}/k^u_\sigma$ est une sous-algèbre parabolique de k_σ/k^u_σ, notée $\bar{p}_{\sigma,\sigma'}$, et $k^u_{\sigma'}/k^u_\sigma$ en est le radical nilpotent $\bar{n}_{\sigma,\sigma'}$.

Fixons $s \in \mathrm{S}(c)$. Notons $\mathrm{S}(c;s)$ l'ensemble des sommets $s' \in \mathrm{S}(c) - \{s\}$ voisins de s, *i.e.* tels que, si l'on note $\sigma(s,s')$ l'intérieur de l'enveloppe convexe de s et s', $\sigma(s,s')$

soit une facette. Il résulte de [BT] 4.6.33 que, quand s' décrit $S(c;s)$, $\bar{p}_{s,\sigma(s,s')}$ décrit l'ensemble des sous-algèbres paraboliques maximales de k_s/k_s^u qui contiennent $\bar{p}_{s,c}$. Il en résulte que

$$\bar{n}_{s,c} = \sum_{s' \in S(c;s)} \bar{n}_{s,\sigma(s,s')}. \tag{3}$$

Notons que si $S(c)$ n'a qu'un élément, le lemme est immédiat. Supposons donc que $S(c)$ a au moins 2 éléments. Alors $S(c;s) \neq \emptyset$. Fixons $s' \in S(c;s)$. On va montrer

$$k^u_{\sigma(s,s')} = k^u_s + k^u_{s'}. \tag{4}$$

Posons $\sigma = \sigma(s,s')$. On a vu ci-dessus que $k^u_\sigma \supset k^u_s + k^u_{s'}$. Il résulte de la première partie de la démonstration et de [BT] 4.6.10 que pour toute facette $\sigma' \subset A$, on a des décompositions

$$k_{\sigma'} = z \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} n_{\sigma',\alpha},$$

$$k^u_{\sigma'} = z^u \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} n^u_{\sigma',\alpha}$$

où z et z^u sont indépendants de σ'. Soit alors $\alpha \in \Phi$, supposons $n^u_{\sigma,\alpha} \neq n^u_{s,\alpha} + n^u_{s',\alpha}$. *A fortiori* $n^u_{\sigma,\alpha} \neq n^u_{s,\alpha}$. Donc l'image de $n^u_{\sigma,\alpha}$ dans k_s/k^u_s est non nulle. Cette image est incluse dans $\bar{n}_{s,\alpha}$. La racine α intervient donc dans $\bar{n}_{s,\sigma}$ et la racine $-\alpha$ intervient dans k_s/k^u_s mais non dans $\bar{p}_{s,\sigma}$. On a donc

$$n^u_{s,-\alpha} \subsetneq n_{s,-\alpha} \quad \text{et} \quad n_{\sigma,-\alpha} = n^u_{s,-\alpha}.$$

De même

$$n^u_{s',-\alpha} \subsetneq n_{s',-\alpha} \quad \text{et} \quad n_{\sigma,-\alpha} = n^u_{s',-\alpha}.$$

Mais la preuve de la première égalité du lemme démontre aussi que $k_\sigma = k_s \cap k_{s'}$, et on a vu au cours de cette preuve que $n_{s,-\alpha} \subset n_{s',-\alpha}$ ou $n_{s',-\alpha} \subset n_{s,-\alpha}$. Donc $n_{\sigma,-\alpha} = n_{s,-\alpha}$ ou $n_{s',-\alpha}$, ce qui contredit les relations précédentes. Donc

$$n^u_{\sigma,\alpha} = n^u_{s,\alpha} + n^u_{s',\alpha} \text{ pour tout } \alpha, \quad \text{d'où (4).}$$

Comme n_c est l'image réciproque de $\bar{n}_{s,c}$ dans k_s et, pour tout $s' \in S(c;s)$, $k^u_{\sigma(s,s')}$ est l'image réciproque de $\bar{n}_{s,\sigma(s,s')}$, la deuxième égalité du lemme résulte de (3) et (4). □

2.4. Soit $x \in G$. On dit que x est topologiquement unipotent s'il existe $s \in S(\mathscr{B})$ et un sous-groupe unipotent connexe $\mathbf{U}$ de $\mathbf{G}_s$ tels que $x \in K_s$ et que la projection de x dans $\mathbf{G}_s(f)$ appartienne à $\mathbf{U}(f)$.

Lemme. — Soit $x \in G$.

(i) *Si* x *est topologiquement unipotent, on a* $\lim_{n\to\infty} x^{p^n} = 1$.

(ii) *Supposons* $\mathbf{G}$ *semi-simple et simplement connexe et* $\lim_{n\to\infty} x^{p^n} = 1$. *Alors* x *est topologiquement unipotent.*

Preuve. — Si x est topologiquement unipotent, il est contenu dans un pro-p-groupe, d'où (i). Sous les hypothèses de (ii), soit C le sous-groupe fermé (pour la topologie p-adique) engendré par x. Alors C est compact. Donc il existe $s \in \mathrm{S}(\mathscr{B})$ tel que $\mathrm{C} \subset \mathrm{K}_s$ ([T] 3.2). *A fortiori* $x \in \mathrm{K}_s$. Comme $\mathbf{G}$ est simplement connexe, $\mathbf{G}_s$ est connexe. Comme la projection de x dans $\mathbf{G}_s(f)$ est d'ordre une puissance de p, elle est unipotente. □

On note G_{tu} le sous-ensemble des éléments topologiquement unipotents de G.

Soit $\mathrm{X} \in g$. On dit que X est topologiquement nilpotent s'il existe $c \in \mathrm{C}(\mathscr{B})$ tel que $\mathrm{X} \in n_c$. On dit que X est entier s'il existe $s \in \mathrm{S}(\mathscr{B})$ tel que $\mathrm{X} \in k_s$. On note g_{tn}, resp. g_{ent}, le sous-ensemble des éléments topologiquement nilpotents, resp. entiers, de g.

2.5. Soient $\mathbf{G}_1$ et $\mathbf{G}_2$ deux groupes réductifs connexes, $\varphi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ un morphisme séparable, $\Delta \subset \mathbf{G}_1$ un sous-groupe fini central et constant sur une extension non ramifiée de F. Supposons que $|\Delta|$ est premier à p et que la suite

$$1 \to \Delta \to \mathbf{G}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathbf{G}_2 \to 1$$

est exacte (tous les objets sont définis sur F). Indexons par 1 et 2 les objets relatifs à $\mathbf{G}_1$ et $\mathbf{G}_2$. De φ se déduit un isomorphisme

$$\varphi_{\mathscr{B}} : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$$

d'ensembles simpliciaux ([BT] 4.2.15). En particulier $\varphi_{\mathscr{B}}$ définit des bijections, encore notées $\varphi_{\mathscr{B}}$, de $\mathrm{S}(\mathscr{B}_1)$ sur $\mathrm{S}(\mathscr{B}_2)$ et de $\mathrm{C}(\mathscr{B}_1)$ sur $\mathrm{C}(\mathscr{B}_2)$. D'autre part, l'application dérivée $d\varphi$ est un isomorphisme de g_1 sur g_2.

Lemme. — Sous les hypothèses ci-dessus, on a

(i) *soient* $s_1 \in \mathrm{S}(\mathscr{B}_1)$, $s_2 = \varphi_{\mathscr{B}}(s_1)$; *alors* $\varphi^{-1}(\mathrm{K}_{s_2}) = \mathrm{K}_{s_1}$, $\varphi^{-1}(\mathrm{K}^u_{s_2}) = \Delta(\mathrm{F})\,\mathrm{K}^u_{s_1}$ *et pour tout* $h \in \mathbf{N}$, $h \geqslant 1$, $\varphi^{-1}(\mathrm{K}^h_{s_2}) = \Delta(\mathrm{F})\,\mathrm{K}^h_{s_1}$, $\varphi^{-1}(\mathrm{K}^{u,h}_{s_2}) = \Delta(\mathrm{F})\,\mathrm{K}^{u,h}_{s_1}$; *de plus,* $d\varphi(k_{s_1}) = k_{s_2}$, $d\varphi(k^u_{s_1}) = k^u_{s_2}$;

(ii) *soient* $c_1 \in \mathrm{C}(\mathscr{B}_1)$, $c_2 = \varphi_{\mathscr{B}}(c_1)$; *alors* $\varphi^{-1}(\mathrm{B}_{c_2}) = \mathrm{B}_{c_1}$ *et pour tout* $h \in \mathbf{N}$, $\varphi^{-1}(\mathrm{U}^h_{c_2}) = \Delta(\mathrm{F})\,\mathrm{U}^h_{c_1}$; *de plus* $d\varphi(b_{c_1}) = b_{c_2}$ *et* $d\varphi(n_{c_1}) = n_{c_2}$;

(iii) φ *se restreint en une bijection de* $\mathrm{G}_{1,\mathrm{tu}}$ *sur* $\mathrm{G}_{2,\mathrm{tu}}$;

(iv) $d\varphi$ *se restreint en une bijection de* $g_{1,\mathrm{tn}}$ *sur* $g_{2,\mathrm{tn}}$, *resp. de* $g_{1,\mathrm{ent}}$ *sur* $g_{2,\mathrm{ent}}$.

Preuve. — Comme $\varphi_{\mathscr{B}}$ est une bijection de $\mathrm{S}(\mathscr{B}_1)$ sur $\mathrm{S}(\mathscr{B}_2)$ qui entrelace l'action de G_1 sur $\mathscr{B}_1$ avec celle de G_2 sur $\mathscr{B}_2$, on a immédiatement $\varphi^{-1}(\mathrm{K}_{s_2}) = \mathrm{K}_{s_1}$. On a vu en [W], démonstration du lemme 4.1, que φ définissait un morphisme encore noté

$$\varphi : \mathbf{G}^{\circ}_{s_1} \to \mathbf{G}^{\circ}_{s_2}.$$

Notons φ_f la réduction de φ. On a vu en *loc. cit.* que φ_f était séparable et que la suite

$$(1) \qquad 1 \to \Delta \cap \mathbf{G}^{\circ}_{s_1} \to \mathbf{G}^{\circ}_{s_1} \xrightarrow{\varphi_f | \mathbf{G}^{\circ}_{s_1}} \mathbf{G}^{\circ}_{s_1} \to 1$$

était exacte, où, pour $i = 1, 2$, on note $\mathbf{G}^{\circ}_{s_1}$ la composante neutre de $\mathbf{G}_{s_i}$. Il résulte de cela que le morphisme φ est étale. Le lemme de Hensel entraîne la propriété suivante (cf. [EGA] 18.5.11 et 18.5.13) :

(2) Soient $y_1 \in \mathbf{G}_{s_1}(f)$, $x_2 \in \mathbf{G}^{\circ}_{s_2}(\mathfrak{o})$, notons $\bar{x}_2$ l'image de x_2 dans $\mathbf{G}_{s_2}(f)$ et supposons $\varphi_f(y_1) = x_2$; alors il existe $x_1 \in \mathbf{G}^{\circ}_{s_1}(\mathfrak{o})$ de réduction $\bar{x}_1 = y_1$, tel que $\varphi(x_1) = x_2$.

En appliquant ceci à $x_2 = 1$, on voit que $\Delta(\mathrm{F})$ se projette surjectivement sur $(\ker \varphi_f)\ (f)$. On a déjà dit en *loc. cit.* que cette projection est injective, d'où

$$(\ker \varphi_f)\ (f) \simeq \Delta(\mathrm{F}).$$

Il est élémentaire d'en déduire la relation

$$\varphi^{-1}(\mathrm{K}^1_{s_2}) = \Delta(\mathrm{F})\ \mathrm{K}^1_{s_1}. \tag{3}$$

On obtient une relation analogue si l'on remplace F par une extension non ramifiée de F. Soit maintenant $h \in \mathbf{N}$, $h \geqslant 1$. Supposons démontrée la relation

$$\varphi^{-1}(\mathrm{K}^h_{s_2}) = \Delta(\mathrm{F})\ \mathrm{K}^h_{s_1}, \tag{4}$$

ainsi que les relations analogues obtenues en remplaçant le corps de base F par une extension non ramifiée de F. D'après [BLR] 3.2, pour $i = 1, 2$, il existe un unique schéma en groupes $\mathbf{G}^{h,\circ}_{s_i}$ lisse sur $\mathfrak{o}$ de fibre générique $\mathbf{G}_i$ et tel que, pour toute extension F'/F non ramifiée, on ait la suite exacte

$$1 \to \mathbf{G}^{h,\circ}_{s_i}(\mathfrak{o}') \to \mathbf{G}^{\circ}_{s_i}(\mathfrak{o}') \to \mathbf{G}^{\circ}_{s_i}(\mathfrak{o}'/\mathfrak{p}'^h),$$

où $\mathfrak{o}'$ est l'anneau des entiers de F' et $\mathfrak{p}'$ son idéal maximal.

Remarque. — Dans [BLR], la construction est faite pour $h = 1$. Cette construction se généralise au cas $h \geqslant 1$.

Grâce à la relation (4), on peut, dans la démonstration du lemme 4.1 de [W], remplacer $\mathbf{G}^{\circ}_{s_2}$ par $\mathbf{G}^{h,\circ}_{s_2}$ et $\mathbf{G}^{\circ}_{s_1}$ par $\Delta\mathbf{G}^{h,\circ}_{s_1}$. On obtient des résultats analogues, en particulier l'analogue de la relation (3) ci-dessus qui s'écrit

$$\varphi^{-1}(\mathrm{K}^{h,1}_{s_2}) = \Delta(\mathrm{F})\ \mathrm{K}^{h,1}_{s_1},$$

où, pour $i = 1, 2$, on définit $\mathrm{K}^{h,1}_{s_i}$ comme le noyau de l'application

$$\mathbf{G}^{h,\circ}_{s_i}(\mathfrak{o}) \to \mathbf{G}^{h,\circ}_{s_i}(f).$$

On vérifie que $\mathrm{K}^{h,1}_{s_i} = \mathrm{K}^{h+1}_{s_i}$. On obtient alors l'analogue de (4) où h est remplacé par $h + 1$. On obtient une relation analogue en remplaçant F par une extension non ramifiée. Par récurrence cela démontre que (4) est valide pour tout h.

On a déjà vu en *loc. cit.* que $d\varphi(k_{s_1}) = k_{s_2}$.

D'après (1) et comme $|\Delta|$ est premier à p, φ_f se restreint en un isomorphisme

$$\mathrm{R}^u\,\mathbf{G}_{s_1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^u\,\mathbf{G}_{s_2}.$$

On obtient alors

$$\varphi_f^{-1}(\mathrm{R}^u\,\mathbf{G}_{s_2}(f)) = \Delta(\mathrm{F})\,\mathrm{R}^u\,\mathbf{G}_{s_1}(f).$$

Il est élémentaire d'en déduire la relation $\varphi^{-1}(\mathrm{K}_{s_2}^u) = \Delta(\mathrm{F})\,\mathrm{K}_{s_1}^u$. On obtient une relation analogue en remplaçant F par une extension non ramifiée. Mais alors on peut remplacer dans les raisonnements ci-dessus $\mathbf{G}_{s_2}^0$ par $\mathbf{G}_{s_2}^{u,0}$ et $\mathbf{G}_{s_1}^0$ par $\mathbf{G}_{s_1}^{u,0}$. On obtient des résultats analogues, ce qui démontre l'assertion (i) du lemme.

La preuve de (ii) est similaire.

Soit $x_1 \in \mathrm{G}_{1,\mathrm{tu}}$. Choisissons $s_1 \in \mathrm{S}(\mathscr{B}_1)$ et un sous-groupe unipotent connexe $\mathbf{U}_1$ de $\mathbf{G}_{s_1}$ tels que $x_1 \in \mathrm{K}_{s_1}$ et que la réduction $\bar{x}_1$ de x_1 dans $\mathbf{G}_{s_1}(f)$ appartienne à $\mathbf{U}_1(f)$. Posons $s_2 = \varphi_{\mathscr{B}}(s_1)$. Alors $\varphi(x_1) \in \mathrm{K}_{s_2}$ et sa réduction $\overline{\varphi(x_1)}$ appartient à $\varphi_f(\mathbf{U}_1(f))$. Comme $\varphi_f(\mathbf{U}_1)$ est unipotent connexe, on obtient $\varphi(x_1) \in \mathrm{G}_{2,\mathrm{tu}}$.

Inversement, soit $x_2 \in \mathrm{G}_{2,\mathrm{tu}}$, choisissons $s_2 \in \mathrm{S}(\mathscr{B}_2)$ et un sous-groupe unipotent connexe $\mathbf{U}_2$ de $\mathbf{G}_{s_2}$ tels que $x_2 \in \mathrm{K}_{s_2}$ et que la réduction $\bar{x}_2$ de x_2 dans $\mathbf{G}_{s_2}(f)$ appartienne à $\mathbf{U}_2(f)$. Posons $s_1 = \varphi_{\mathscr{B}}^{-1}(s_2)$. Soit $\mathbf{U}_1$ la composante neutre de $\varphi_f^{-1}(\mathbf{U}_2)$. C'est un sous-groupe unipotent connexe de $\mathbf{G}_{s_1}$. D'après (1) φ_f se restreint en un isomorphisme de $\mathbf{U}_1$ sur $\mathbf{U}_2$. Soit $y_1 \in \mathbf{U}_1(f)$ tel que $\varphi_f(y_1) = x_2$. Appliquons (2). L'élément x_1 que l'on en déduit appartient à $\mathrm{G}_{1,\mathrm{tu}}$ et vérifie $\varphi(x_1) = x_2$.

Enfin, soient $x, x' \in \mathrm{G}_{1,\mathrm{tu}}$ tels que $\varphi(x) = \varphi(x')$. Alors il existe $\delta \in \Delta(\mathrm{F})$ tel que $x = \delta x'$. En appliquant le lemme 2.4 (i), on obtient $\lim_{n\to\infty} \delta^{p^n} = 1$ d'où $\delta = 1$ puisque $|\,\Delta\,|$ est premier à p. Cela démontre la troisième assertion du lemme.

La quatrième résulte immédiatement des deux premières. □

2.6. Nous allons expliciter les objets introduits dans les paragraphes précédents dans différents cas particuliers. Soient d'abord d un entier $\geqslant 1$, V un espace vectoriel sur F de dimension d, $\mathbf{G} = \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ vu comme groupe algébrique sur F. On identifie $\mathbf{g}$ à $\mathrm{End}(\mathrm{V})$. Fixons une suite

$$\mathrm{L}_0 \underset{\neq}{\supset} \mathrm{L}_1 \underset{\neq}{\supset} \dots \underset{\neq}{\supset} \mathrm{L}_d = \mathfrak{p}\mathrm{L}_0$$

de réseaux de V. Pour $i \in \{0, \dots, d-1\}$ et $h \in \mathbf{N}$, $h \geqslant 1$, posons

$$\mathrm{K}_i = \{x \in \mathrm{G};\, x(\mathrm{L}_i) \subset \mathrm{L}_i\}, \qquad \mathrm{K}_i^h = \{x \in \mathrm{K}_i;\, (x-1)\,(\mathrm{L}_i) \subset \mathfrak{p}^h\,\mathrm{L}_i\},$$

$$k_i = \{\mathrm{X} \in g;\, \mathrm{X}(\mathrm{L}_i) \subset \mathrm{L}_i\}.$$

Posons aussi

$$\mathrm{B} = \bigcap_{i=0}^{d-1} \mathrm{K}_i, \qquad b = \bigcap_{i=0}^{d-1} k_i,$$

$$\mathrm{U} = \{x \in \mathrm{B};\, \forall\, i \in \{0, \dots, d-1\},\, (x-1)\,(\mathrm{L}_i) \subset \mathrm{L}_{i+1}\},$$

$$\mathrm{U}^h = \{x \in \mathrm{B};\, \forall\, i \in \{0, \dots, d-1\},\, (x-1)\,(\mathrm{L}_i) \subset \mathfrak{p}^h\,\mathrm{L}_{i+1}\},$$

$$n = \{\mathrm{X} \in b;\, \forall\, i \in \{0, \dots, d-1\},\, \mathrm{X}(\mathrm{L}_i) \subset \mathrm{L}_{i+1}\}.$$

On peut choisir une chambre c de $\mathscr{B}$ et une bijection $\mathbf{s}:\{0, \ldots, d-1\} \to S(c)$ de sorte que $B = B_c$, $U = U_c$, etc., et pour tout $i \in \{0, \ldots, d-1\}$, $K_i = K_{\mathbf{s}(i)}$, etc. On a ici $K^u_{\mathbf{s}(i)} = K^1_i$ pour tout i.

Pour $X \in g = \mathrm{End}_F(V)$, on note P_X le polynôme caractéristique de X.

Lemme. — (i) $G_{tu} = \{ xux^{-1}; x \in G, u \in U \} = \{ x \in G; \lim_{n\to\infty} x^{p^n} = 1 \}$.

(ii) $g_{tn} = \{ \mathrm{Ad}(x)\, X; x \in G, X \in n \} = \{ X \in g; \lim_{n\to\infty} X^n = 0 \}$.

(iii) *g_{ent} (resp. g_{tn}) est l'ensemble des $X \in g$ tels que les coefficients de P_X appartiennent à $\mathfrak{o}$ (resp. les coefficients autres que le coefficient dominant appartiennent à $\mathfrak{p}$).*

Preuve. — Les premières égalités de (i) et (ii) sont faciles. La même démonstration qu'en 2.4 prouve la deuxième égalité de (i). Si $X \in g_{tn}$, il est clair que $\lim_{n\to\infty} X^n = 0$. Inversement soit $X \in g$ tel que $\lim_{n\to\infty} X^n = 0$. Soit L un réseau de V. Alors $X^n(L) \subset L$ pour n assez grand. On peut définir un réseau M par

$$M = \sum_{n \in \mathbf{N}} X^n(L).$$

Alors X laisse stable M. De plus la réduction de X dans $M/\mathfrak{p}M$ est nilpotente. On peut donc trouver une suite de réseaux

$$M = M_0 \underset{\neq}{\supset} M_1 \underset{\neq}{\supset} \ldots \underset{\neq}{\supset} M_d = \mathfrak{p}M$$

de sorte que $X(M_i) \subset M_{i+1}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, d-1\}$. Quitte à conjuguer X par un élément de G, on peut supposer qu'il existe $r \in \mathbf{Z}$ tel que $M_i = \mathfrak{p}^r L_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, d-1\}$. Alors $X \in n$.

Si $X \in g_{ent}$, resp. g_{tn}, il est clair que P_X vérifie les propriétés requises. Inversement soit $X \in g$ tel que P_X soit à coefficients entiers. Soit L un réseau de V, posons

$$M = \sum_{n=0}^{d-1} X^n(L).$$

Comme $P_X(X) = 0$, X^d est combinaison linéaire à coefficients entiers des X^n pour $n < d$, donc M est stable par X. A conjugaison près, on peut supposer $M = \mathfrak{p}^r L_0$ pour un $r \in \mathbf{Z}$. Alors $X \in k_0 \subset g_{ent}$. Supposons de plus que les coefficients de P_X autres que le coefficient dominant soient dans $\mathfrak{p}$. La réduction $\overline{X} \in \mathrm{End}_f(L_0/\mathfrak{p}L_0)$ a pour polynôme caractéristique la réduction de P_X, *i.e.* T^d. Donc $\overline{X}$ est nilpotente et on conclut facilement que $X \in g_{tn}$. □

2.7. *Corollaire.* — *Sous les hypothèses précédentes, g_{tn}, resp. G_{tu}, est un sous-ensemble ouvert et fermé de g, resp. G.*

Preuve. — L'application $X \mapsto P_X$ est continue. L'assertion concernant g_{tn} résulte donc du (iii) du lemme précédent. Identifions G à un sous-ensemble de g. D'après (i) et (ii) du lemme précédent, $G_{tu} = 1 + g_{tn}$. L'assertion concernant G_{tu} se déduit donc de celle concernant g_{tn}. □

2.8. Soient toujours d et V comme en 2.6. Considérons maintenant le groupe $\mathbf{G} = \mathrm{SL(V)}$ vu comme groupe algébrique sur F. On identifie $\mathbf{g}$ au sous-espace de End(V) formé des éléments de trace nulle. On fixe une suite de réseaux et l'on définit comme en 2.6 des sous-groupes K_i, B, etc., de G et des sous-modules k_i, n, etc., de g. Ici encore ces groupes et ces modules s'identifient à K_s, B_c, etc., resp. k_s, n_c, etc., pour une chambre c bien choisie et $s \in S(c)$.

Il est bien connu que pour toute suite de réseaux

$$M_0 \underset{\neq}{\supset} M_1 \underset{\neq}{\supset} \dots \underset{\neq}{\supset} M_d = pM_0,$$

de V, il existe $x \in G$, $j \in \{0, \dots, d-1\}$ et $r \in \mathbf{Z}$ tels que pour tout $i \in \{0, \dots, d-1\}$,

$$M_i = \begin{cases} p^r\, x(L_{i+j}), & \text{si } i+j \leqslant d-1, \\ p^{r+1}\, x(L_{i+j-d}), & \text{si } i+j \geqslant d. \end{cases}$$

Grâce à cela, on peut adapter la preuve du lemme 2.6 et démontrer le même énoncé. Le lemme suivant, où l'on note $\mathbf{H} = \mathrm{GL(V)}$, $\mathbf{h} = \mathrm{End(V)}$, en résulte :

Lemme. — On a $G_{tu} = H_{tu} \cap G$, $g_{tn} = h_{tn} \cap g$. □

Le corollaire 2.7 reste donc valable.

2.9. Supposons maintenant $p \neq 2$ et considérons l'une des situations suivantes :

a) V est un espace vectoriel sur F de dimension finie d, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme bilinéaire ε-symétrique sur V, non dégénérée; si $\varepsilon = 1$, on suppose $d \geqslant 3$;

b) E est une extension quadratique de F, V est un espace vectoriel sur E de dimension $d \geqslant 2$, $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme hermitienne sur V, non dégénérée.

Pour unifier les notations, on pose, dans le cas *a)*, E = F.

On note $\mathfrak{o}_E$ l'anneau des entiers de E, $\mathfrak{p}_E$ son idéal maximal, $e = \mathfrak{o}_E/\mathfrak{p}_E$ le corps résiduel. Si L est un $\mathfrak{o}_E$-réseau de V, on pose

$$\tilde{L} = \{ v \in V ;\ \forall\, w \in L,\ \langle v, w \rangle \in \mathfrak{o}_E \}.$$

On suppose vérifiée l'hypothèse suivante.

Hypothèse : il existe un réseau L *de* V *autodual,* i.e. *tel que* $\tilde{L} = L$.

On note **G** le groupe dérivé de la composante neutre du groupe d'isométries de V. *I.e.*

$$G = \{ x \in GL_E(V) ;\ \det x = 1 \ \text{ et } \ \forall\, v, wV,\ \langle xv, xw \rangle = \langle v, w \rangle \}.$$

Définissons un anti-isomorphisme $X \mapsto X^*$ de $\mathrm{End}_E(V)$ par la formule

$$\langle Xv, w \rangle = \langle v, X^* w \rangle \quad \text{pour tous } v, w \in V.$$

Il est linéaire dans le cas *a)*, σ-linéaire dans le cas *b)*, où σ est l'élément non trivial de Gal(E/F). Alors l'algèbre de Lie g s'identifie au F-espace

$$\{ X \in \mathrm{End}_E(V) ;\ \mathrm{trace}\, X = 0 \ \text{ et } \ X = -X^* \}.$$

Fixons une suite de réseaux

$$\text{(1)} \qquad \widetilde{\mathrm{L}}_0 = \mathrm{L}_0 \underset{\neq}{\supset} \mathrm{L}_1 \underset{\neq}{\supset} \dots \underset{\neq}{\supset} \mathrm{L}_r \supset \mathfrak{p}_{\mathrm{E}} \widetilde{\mathrm{L}}_r \underset{\neq}{\supset} \dots \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{p}_{\mathrm{E}} \widetilde{\mathrm{L}}_0 = \mathfrak{p}_{\mathrm{E}} \mathrm{L}_0$$

telle que r soit maximal. Fixons deux objets distincts α et β n'appartenant pas à $\mathbf{N}$. Si V est quadratique, l'espace $\widetilde{\mathrm{L}}_1/\mathrm{L}_1$ est un espace quadratique déployé de dimension 2 sur f. Son sous-espace $\mathrm{L}_0/\mathrm{L}_1$ en est une droite isotrope. On note L_α le sous-réseau de $\widetilde{\mathrm{L}}_1$ tel que $\mathrm{L}_\alpha/\mathrm{L}_1$ soit l'autre droite isotrope de $\widetilde{\mathrm{L}}_1/\mathrm{L}_1$. Si de plus V est déployé et d est pair, on construit de même un réseau L_β tel que $\mathrm{L}_{r-1} \underset{\neq}{\supset} \mathrm{L}_\beta \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{p}\widetilde{\mathrm{L}}_{r-1}$. Si V est hermitien déployé, d est pair et E est ramifiée sur F, $\mathrm{L}_{r-1}/\mathfrak{p}_{\mathrm{E}} \widetilde{\mathrm{L}}_{r-1}$ est encore un espace quadratique déployé de dimension 2 sur f, ce qui permet de construire un réseau L_β.

On appellera suite de réseaux équivalente à la suite (1) toute suite obtenue en remplaçant dans (1) le réseau L_0 par L_α ou le réseau L_r par L_β, dans les cas où ces réseaux L_α ou L_β sont définis.

Si V est quadratique déployé et d est pair, on pose $\mathrm{I} = \{0, \dots, r\} \cup \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{I}' = \{2, \dots, r-2\} \cup \{0, r, \alpha, \beta\}$. Si V est quadratique mais non du type précédent, on pose $\mathrm{I} = \{0, \dots, r\} \cup \{\alpha\}$, $\mathrm{I}' = \{2, \dots, r\} \cup \{0, \alpha\}$. Si V est hermitien déployé, d est pair et E est ramifiée sur F, on pose

$$\mathrm{I} = \{0, \dots, r\} \cup \{\beta\}, \qquad \mathrm{I}' = \{0, \dots, r-2\} \cup \{r, \beta\}.$$

Dans les autres cas, on pose $\mathrm{I} = \mathrm{I}' = \{0, \dots, r\}$.

Pour $i \in \mathrm{I}$, posons

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_i &= \{ x \in \mathrm{G};\, x(\mathrm{L}_i) \subset \mathrm{L}_i \},\\
\mathrm{K}_i^u &= \{ x \in \mathrm{K}_i;\, (x-1)(\mathrm{L}_i) \subset \mathfrak{p}_{\mathrm{E}} \widetilde{\mathrm{L}}_i,\ (x-1)(\widetilde{\mathrm{L}}_i) \subset \mathrm{L}_i \},\\
k_i &= \{ \mathrm{X} \in g;\, \mathrm{X}(\mathrm{L}_i) \subset \mathrm{L}_i \},\\
k_i^u &= \{ \mathrm{X} \in k_i;\, \mathrm{X}(\mathrm{L}_i) \subset \mathfrak{p}_{\mathrm{E}} \widetilde{\mathrm{L}}_i,\ \mathrm{X}(\widetilde{\mathrm{L}}_i) \subset \mathrm{L}_i \},
\end{aligned}$$

et, pour $h \in \mathbf{N}$, $h \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_i^h &= \{ x \in \mathrm{K}_i;\, (x-1)(\mathrm{L}_i) \subset \mathfrak{p}^h \mathrm{L}_i \},\\
\mathrm{K}_i^{u,h} &= \{ x \in \mathrm{K}_i^u;\, (x-1)(\mathrm{L}_i) \subset \mathfrak{p}^h \mathfrak{p}_{\mathrm{E}} \widetilde{\mathrm{L}}_i,\ (x-1)(\widetilde{\mathrm{L}}_i) \subset \mathfrak{p}^h \mathrm{L}_i \}.
\end{aligned}$$

On pose aussi

$$\mathrm{B} = \bigcap_{i=0}^{r} \mathrm{K}_i, \qquad b = \bigcap_{i=0}^{r} k_i,$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{U} = \{ x \in \mathrm{B};\, \forall\, i \in \{0, \dots, r-1\},\ &(x-1)(\mathrm{L}_i) \subset \mathrm{L}_{i+1} \text{ et } (x-1)(\mathrm{L}_r) \subset \mathfrak{p}_{\mathrm{E}} \widetilde{\mathrm{L}}_r \},
\end{aligned}$$

$$n = \{ \mathrm{X} \in b;\, \forall\, i \in \{0, \dots, r-1\},\ \mathrm{X}(\mathrm{L}_i) \subset \mathrm{L}_{i+1} \text{ et } \mathrm{X}(\mathrm{L}_r) \subset \mathfrak{p}_{\mathrm{E}} \widetilde{\mathrm{L}}_r \},$$

et pour $h \in \mathbf{N}$, $h \geqslant 1$,

$$\mathrm{U}^h = \{ x \in \mathrm{B}; \forall\, i \in \{0, \ldots, r-1\}, (x-1)(\mathrm{L}_i) \subset \mathfrak{p}^h \mathrm{L}_{i+1} \text{ et } (x-1)(\mathrm{L}_r) \subset \mathfrak{p}^h \mathfrak{p}_{\mathrm{E}} \widetilde{\mathrm{L}}_r \}.$$

On peut choisir une chambre c de β et une bijection $\mathbf{s} : \mathrm{I}' \to \mathrm{S}(c)$ de sorte que $\mathrm{B} = \mathrm{B}_c$, $b = b_c$, etc., et pour tout $i \in \mathrm{I}'$, $\mathrm{K}_i = \mathrm{K}_{\mathbf{s}(i)}$, etc.

Remarque. — Dans les définitions ci-dessus de B, U, etc., on peut remplacer la suite de réseaux (1) par toute suite équivalente. Par exemple supposons V quadratique, soit $\mathrm{X} \in n$, montrons que $\mathrm{X}(\mathrm{L}_\alpha) \subset \mathrm{L}_1$. Comme $\mathrm{X}(\widetilde{\mathrm{L}}_1) \subset \mathrm{L}_0$ et $\mathrm{X}(\mathrm{L}_0) \subset \mathrm{L}_1$, X définit par réduction un élément nilpotent de l'algèbre de Lie du groupe orthogonal de $\widetilde{\mathrm{L}}_1/\mathrm{L}_1$. Or cette algèbre de Lie n'a pas d'élément nilpotent non nul. Donc la réduction de X est nulle, d'où $\mathrm{X}(\widetilde{\mathrm{L}}_1) \subset \mathrm{L}_1$; *a fortiori* $\mathrm{X}(\mathrm{L}_\alpha) \subset \mathrm{L}_1$.

Pour $\mathrm{X} \in \mathrm{End}_{\mathrm{F}}(\mathrm{V})$, on note P_{X} le polynôme caractéristique de X (P_{X} est à coefficients dans F). On note $\mathbf{H}$ le groupe $\mathrm{GL}_{\mathrm{F}}(\mathrm{V})$, vu comme groupe algébrique sur F.

Lemme. — (i) $\mathrm{G}_{\mathrm{tu}} = \{ xux^{-1}; x \in \mathrm{G}, u \in \mathrm{U} \} = \{ x \in \mathrm{G}; \lim_{n\to\infty} x^{p^n} = 1 \} = \mathrm{H}_{\mathrm{tu}} \cap \mathrm{G}$.

(ii) $g_{\mathrm{tn}} = \{ \mathrm{Ad}(x)\,\mathrm{X}; x \in \mathrm{G}, \mathrm{X} \in n \} = \{ \mathrm{X} \in g; \lim_{n\to\infty} \mathrm{X}^n = 0 \} = h_{\mathrm{tn}} \cap g$.

(iii) *g_{ent} (resp. g_{tn}) est l'ensemble des $\mathrm{X} \in g$ tels que les coefficients de P_{X} appartiennent à $\mathfrak{o}$ (resp. les coefficients autres que le coefficient dominant appartiennent à $\mathfrak{p}$).*

Preuve. — C'est facile. Démontrons seulement les trois points suivants.

a) Soit $x \in \mathrm{G}$ tel que $\lim_{n\to\infty} x^{p^n} = 1$. Alors $x \in \mathrm{G}_{\mathrm{tu}}$.

Soit $\mathrm{N} \in \mathbf{N}$ tel que si $n \geqslant \mathrm{N}$, alors $x^{p^n} \in \mathrm{K}_0$. Pour tout $m \in \mathbf{Z}$, on a $x^{mp^{\mathrm{N}}} \in \mathrm{K}_0$. Posons

$$\mathrm{L} = \bigcap_{m \in \mathbf{Z}} x^m \mathrm{L}_0.$$

On a aussi

$$\mathrm{L} = \bigcap_{m=0}^{p^{\mathrm{N}}-1} x^m \mathrm{L}_0.$$

Donc L est un réseau stable par x et $\mathrm{L} \subset \widetilde{\mathrm{L}}$. Choisissons alors un réseau M stable par x, tel que $\mathrm{M} \subset \widetilde{\mathrm{M}}$ et tel que $[\widetilde{\mathrm{M}}:\mathrm{M}]$ soit le plus petit possible. On a alors $\mathfrak{p}_{\mathrm{E}} \widetilde{\mathrm{M}} \subset \mathrm{M}$: sinon en notant h le plus petit entier tel que $\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^h \widetilde{\mathrm{M}} \subset \mathrm{M}$, le réseau $\mathrm{M}' = \mathrm{M} + \mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{h-1} \widetilde{\mathrm{M}}$ vérifierait les mêmes conditions que M et $[\widetilde{\mathrm{M}}':\mathrm{M}'] < [\widetilde{\mathrm{M}}:\mathrm{M}]$. Donc $\mathfrak{p}_{\mathrm{E}} \widetilde{\mathrm{M}} \subset \mathrm{M} \subset \widetilde{\mathrm{M}}$. Pour un tel réseau, il existe $i \in \mathrm{I}$ tel que M soit conjugué dans G à L_i. On peut donc supposer $x \in \mathrm{K}_i$ pour un $i \in \mathrm{I}$. On peut supposer $i \in \mathrm{I}'$. En effet supposons par exemple V quadratique et $i = 1$. Alors $[\mathrm{K}_1 : \mathrm{K}_1 \cap \mathrm{K}_0] = 2$. Comme $p \neq 2$ et $\lim_{n\to\infty} x^{p^n} = 1$, la relation $x \in \mathrm{K}_1$ implique $x \in \mathrm{K}_0$. Supposons donc $i \in \mathrm{I}'$, et soit $s = \mathbf{s}(i)$. Notons $\mathbf{G}_s^\circ$ la composante neutre de $\mathbf{G}_s$. L'ordre de $\mathbf{G}_s/\mathbf{G}_s^\circ$ est 1 ou 2. Comme ci-dessus, cela implique que la projection $\bar{x}$ de x dans $\mathbf{G}_s(f)$ appartient à $\mathbf{G}_s^\circ(f)$. Comme $\bar{x}$ est d'ordre une puissance de p, il est unipotent et on a bien $x \in \mathrm{G}_{\mathrm{tu}}$.

b) Soit $\mathrm{X} \in g$ tel que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{X}^n = 0$. Alors $\mathrm{X} \in g_{\mathrm{tn}}$.

On montre comme en 2.6 que X stabilise un réseau. On montre alors comme ci-dessus que X stabilise un réseau M tel que $\mathfrak{p}_E \widetilde{M} \subset M \subset \widetilde{M}$. Les quotients $\widetilde{M}/M$ et $M/\mathfrak{p}_E \widetilde{M}$ sont munis de formes non dégénérées. Notons que $\widetilde{M}/M$ est déployée et le noyau anisotrope de $M/\mathfrak{p}_E \widetilde{M}$ est isomorphe à $L_r/\mathfrak{p}_E \widetilde{L}_r$ (cf. [W3] 1.10). Comme X agit dans ces quotients de façon nilpotente, on peut trouver des drapeaux stables par orthogonalité et maximaux de ces espaces tels que les images de X dans les algèbres de Lie des groupes d'isométries de $\widetilde{M}/M$ et $M/\mathfrak{p}_E \widetilde{M}$ appartiennent aux sous-algèbres nilpotentes associées à ces drapeaux. En remontant les termes de ces drapeaux en réseaux de V, on obtient une suite de réseaux

$$\begin{aligned}\widetilde{M} = \widetilde{M}_i \underset{\neq}{\supset} \widetilde{M}_{i-1} \ldots \underset{\neq}{\supset} \widetilde{M}_0 = M_0 \underset{\neq}{\supset} \ldots \underset{\neq}{\supset} M_i \\ = M \underset{\neq}{\supset} M_{i+1} \underset{\neq}{\supset} \ldots \underset{\neq}{\supset} M_r \supset \mathfrak{p}_E \widetilde{M}_r \underset{\neq}{\supset} \ldots \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{p}_E \widetilde{M}_i\end{aligned}$$

telle que X envoie chacun de ses termes dans son successeur. Mais il existe $x \in G$ et une suite de réseaux

$$L'_0 \underset{\neq}{\supset} L'_1 \underset{\neq}{\supset} \ldots \underset{\neq}{\supset} L'_r \supset \mathfrak{p}_E \widetilde{L}'_r \underset{\neq}{\supset} \ldots \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{p}_E \widetilde{L}'_0$$

équivalente à (1) tels que $M_j = x(L'_j)$ pour tout $j \in \{0, \ldots, r\}$. Alors $(\mathrm{Ad}\, x^{-1})(X) \in n$.

c) Soit $X \in g$ tel que les coefficients de P_X appartiennent à $\mathfrak{o}$. Alors $X \in g_{\mathrm{ent}}$.

On montre comme ci-dessus que X stabilise un réseau M tel que $\mathfrak{p}_E \widetilde{M} \subset M \subset \widetilde{M}$. Il existe $x \in G$ et $i \in I$ tel que $M = x(L_i)$. Alors $(\mathrm{Ad}\, x^{-1})(X) \in k_i$. On peut supposer $i \in I'$ (par exemple si V est quadratique, $k_1 \subset k_0$). □

Le corollaire 2.7 reste valide.

2.10. Soit maintenant **G** un tore défini sur F. Notons F^{sep} la clôture séparable de F, $X^*(\mathbf{G})$ et $X_*(\mathbf{G})$ les groupes de caractères, resp. des sous-groupes à un paramètre, de **G** définis sur F^{sep}. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F)$ agit sur $X^*(\mathbf{G})$ et $X_*(\mathbf{G})$. Notons E l'unique extension galoisienne de F telle que $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/E)$ soit le noyau de l'application

$$\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F) \to \mathrm{Aut}(X_*(\mathbf{G})).$$

On note $\mathfrak{o}_E$ l'anneau des entiers de E et $\mathfrak{p}_E$ son idéal maximal. Posons $\Delta = \mathrm{Gal}(E/F)$. On a un isomorphisme canonique

$$(1) \qquad G \simeq (X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} E^*)^{\Delta}.$$

Notons $F[\mathbf{G}]$ l'anneau des fonctions régulières sur **G**, définies sur F. On a l'isomorphisme

$$F[\mathbf{G}] \simeq (\mathrm{Sym}_E\, X^*(\mathbf{G}))^{\Delta}.$$

Notons **I** l'idéal des éléments de $F[\mathbf{G}]$ qui s'annulent au point 1. On définit un accouplement entre I/I^2 et $(X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} E)^{\Delta}$ par la formule

$$\langle \sum_{\chi \in X^*(\mathbf{G})} \lambda_\chi \chi, \sum_{t \in X_*(\mathbf{G})} \mu_t\, t \rangle = \sum_{\chi, t} \lambda_\chi \mu_t \langle \chi, t \rangle$$

où les coefficients λ_χ et μ_t appartiennent à E et le produit $\langle\ ,\ \rangle$ du membre de droite est l'accouplement usuel entre $X^*(\mathbf{G})$ et $X_*(\mathbf{G})$. Comme g est par définition le dual de I/I^2, on en déduit un isomorphisme

$$(2) \qquad g \simeq (X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} E)^{\Delta}.$$

L'ensemble $S(\mathscr{B})$ est réduit à un élément que l'on note s.

On dit que $\mathbf{G}$ est induit si $X_*(\mathbf{G})$ est un $\mathbf{Z}[\Delta]$-module induit, *i.e.* si $\mathbf{G}$ est l'image d'un tore déployé par restriction des scalaires de E à F.

Lemme. — Supposons que $\mathbf{G}$ *est induit ou que* p *ne divise pas* [E:F]. *En identifiant* G, *resp.* g, *à son image par l'isomorphisme* (1), *resp.* (2), *on a* :

(i) $K_s = (X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{o}_E^\times)^{\Delta}$, $K_s^u = (X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} (1 + \mathfrak{p}_E))^{\Delta}$, *et pour tout* $h \in \mathbf{N}$, $h \geq 1$, $K_s^h = (X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} (1 + \mathfrak{p}^h \mathfrak{o}_E))^{\Delta}$, $K_s^{u,h} = (X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} (1 + \mathfrak{p}^h \mathfrak{p}_E))^{\Delta}$;

(ii) $k_s = (X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{o}_E)^{\Delta}$, $k_s^u = (X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{p}_E)^{\Delta}$;

(iii) $G_{tu} = K_s^u$, $g_{tn} = k_s^u$, $g_{ent} = k_s$.

Preuve. — Supposons d'abord que $\mathbf{G}$ est l'image du groupe multiplicatif par restriction des scalaires de E à F. Fixons des isomorphismes de $\mathbf{Z}[\Delta]$-modules

$$z_* : \mathbf{Z}[\Delta] \to X_*(\mathbf{G}), \qquad z^* : \mathbf{Z}[\Delta] \to X^*(\mathbf{G})$$

(Δ agissant sur $\mathbf{Z}[\Delta]$ par multiplication à gauche), de telle sorte que la dualité soit donnée par

$$\langle z^*(\sigma), z_*(\sigma') \rangle = \delta_{\sigma,\sigma'}$$

pour tous $\sigma, \sigma' \in \Delta$. Alors l'application

$$(3) \qquad \begin{aligned} E &\to (X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} E)^{\Delta} \\ \lambda &\mapsto \sum_{\sigma \in \Delta} z_*(\sigma) \otimes \sigma(\lambda) \end{aligned}$$

est un isomorphisme, ainsi que sa restriction

$$(4) \qquad E^\times \to (X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} E^\times)^{\Delta}.$$

Fixons une base $\{e_i; i = 1, \ldots, m\}$ de $\mathfrak{o}_E$ sur $\mathfrak{o}$ et un entier $r \in \{1, \ldots, m\}$ de telle sorte que $e_1 = 1$ et

$$\mathfrak{p}_E = \mathfrak{p}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{p}e_r \oplus \mathfrak{o}e_{r+1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{o}e_m.$$

Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, écrivons

$$e_i\, e_j = \sum_{k=1}^{m} c_{i,j,k}\, e_k.$$

D'après [BT] 4.4 et 1.5.10, l'algèbre A du schéma en groupes $\mathbf{G}_s^0$ est égale à $\mathfrak{o}[T_1, \ldots, T_m, U_1, \ldots, U_m]/J$, où J est l'idéal engendré par les relations

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} T_i\, U_j\, c_{i,j,k} = \delta_{1,k}$$

pour $k \in \{1, \ldots, m\}$. Identifions G à $E^\times$ par (1) et (4). Les fonctions T_i et U_i sont déterminées par les égalités

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} T_i(\lambda)\, e_i, \qquad \lambda^{-1} = \sum_{i=1}^{m} U_i(\lambda)\, e_i \tag{5}$$

pour $\lambda \in E^\times$. Pour $\sigma \in \Delta$, on calcule

$$z^*(\sigma) = \sum_{i=1}^{m} \sigma(e_i)\, T_i.$$

D'autre part, I est l'idéal de $A \otimes_{\mathfrak{o}} F$ engendré par $T_1 - 1, T_2, \ldots, T_m$. Grâce à (2) et (3), on obtient un accouplement entre I/I^2 et E déterminé par

$$\begin{aligned} &\langle T_1 - 1, \lambda \rangle = T_1(\lambda), \\ &\langle T_i, \lambda \rangle = T_i(\lambda) \quad \text{pour } i = 2, \ldots, m, \end{aligned} \tag{6}$$

où les $T_i(\lambda)$, pour $\lambda \in E$, sont encore définis par la formule (5).

Comme $K_s = \mathbf{G}_s^0(\mathfrak{o})$, c'est l'ensemble des $\lambda \in E^\times$ pour lesquels les $T_i(\lambda)$ et les $U_i(\lambda)$ appartiennent à $\mathfrak{o}$. D'après (5), on obtient $K_s = \mathfrak{o}_E^\times$. On vérifie que

$$A \otimes_{\mathfrak{o}} f = f[T_1, \ldots, T_m, U_1, \ldots, U_m]/\bar{J},$$

où $\bar{J}$ est l'idéal engendré par les relations

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} T_i\, U_j\, \bar{c}_{i,j,k} = \delta_{1,k}$$

pour $k \in \{1, \ldots, r\}$, où les $\bar{c}_{i,j,k}$ sont les réductions des $c_{i,j,k}$. Alors $R^u\, \mathbf{G}_s$ est le fermé de $\mathbf{G}_s$ défini par les équations $T_1 = U_1 = 1$, $T_i = U_i = 0$ pour $i \in \{2, \ldots, r\}$. Donc K_s^u est l'ensemble des $\lambda \in \sigma_E^\times$ qui vérifient

$$T_1(\lambda) \equiv U_1(\lambda) \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}, \qquad T_i(\lambda) \equiv U_i(\lambda) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$$
$$\text{pour } i \in \{2, \ldots, r\}, \ i.e.\ K_s^u = 1 + \mathfrak{p}_E.$$

Pour $h \in \mathbf{N}$, $h \geqslant 1$, K_s^h est l'ensemble des $\lambda \in \sigma_E^\times$ sur lesquels les éléments de $I \cap A$ prennent des valeurs dans $\mathfrak{p}^h$. Comme $I \cap A$ est encore engendré par $T_1 - 1, T_2, \ldots, T_m$, on obtient $K_s^h = 1 + \mathfrak{p}^h\, \mathfrak{o}_E$. Grâce à [BLR] 3.2 et aux calculs ci-dessus, l'algèbre A^u de $\mathbf{G}_s^{u,0}$ est égale à

$$\mathfrak{o}\left[\frac{T_1 - 1}{\varpi}, \frac{T_2}{\varpi}, \ldots, \frac{T_r}{\varpi}, T_{r+1}, \ldots, T_m, \frac{U_1 - 1}{\varpi}, \frac{U_2}{\varpi}, \ldots, \frac{U_r}{\varpi}, U_{r+1}, \ldots, U_m\right]\Big/\tilde{J}$$

où $\tilde{J}$ est l'idéal engendré par les mêmes équations que J. On calcule $K_s^{u,h}$ comme on vient de calculer K_s^h. On obtient $K_s^{u,h} = 1 + \mathfrak{p}^h\, \mathfrak{p}_E$.

Par définition, k_s est l'ensemble des éléments de E qui, par l'accouplement (6), envoient $\mathrm{I} \cap \mathrm{A}$ dans $\mathfrak{o}$. On obtient $k_s = \mathfrak{o}_{\mathrm{E}}$. De même k_s^u est l'ensemble des éléments de E qui envoient $\mathrm{I} \cap \mathrm{A}^u$ dans $\mathfrak{o}$. On obtient $k_s^u = \mathfrak{p}_{\mathrm{E}}$.

Via les isomorphismes (3) et (4), cela démontre les assertions (i) et (ii) pour notre groupe $\mathbf{G}$. Notons que (iii) est évident pour n'importe quel tore puisque $\mathrm{S}(\mathscr{B})$ est réduit à un élément.

La généralisation à un tore induit quelconque est immédiate.

Ne supposons plus que $\mathbf{G}$ est induit mais supposons que p ne divise pas [E:F]. Posons $m = [\mathrm{E}:\mathrm{F}]$. Introduisons le tore $\mathbf{G}'$ tel que

$$\mathrm{X}_*(\mathbf{G}') = \mathrm{X}_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\Delta]$$

où Δ agit sur le membre de droite par son action sur $\mathbf{Z}[\Delta]$. On définit des applications

$$\begin{array}{ll} \mathrm{X}_*(\mathbf{G}) \xrightarrow{i_*} \mathrm{X}_*(\mathbf{G}') & \mathrm{X}_*(\mathbf{G}') \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{X}_*(\mathbf{G}) \\ t \mapsto \sum_{\sigma \in \Delta} \sigma(t) \otimes \sigma^{-1} & \sum_{\sigma \in \Delta} t_\sigma \otimes \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in \Delta} \sigma(t_\sigma). \end{array}$$

Elles sont Δ-invariantes et $\pi_* \circ i_*$ est la multiplication par m. Notons $i : \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ et $\pi : \mathbf{G}' \to \mathbf{G}$ les morphismes qui s'en déduisent. Ils sont définis sur F et $\pi \circ i(x) = x^m$ pour tout $x \in \mathrm{G}$.

L'égalité $\mathrm{K}_s = (\mathrm{X}_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{o}_{\mathrm{E}}^\times)^\Delta$ est claire car K_s est l'unique sous-groupe compact maximal de G. On en déduit que $i(\mathrm{K}_s) \subset \mathrm{K}'_s$, $\pi(\mathrm{K}'_s) \subset \mathrm{K}_s$. Cela reste vrai si l'on remplace F par une extension non ramifiée. Alors ([BT] 1.7.6) les morphismes i et π se prolongent en morphismes

(7) $$\mathbf{G}_s^0 \xrightarrow{i} \mathbf{G}_s'^0 \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}_s^0.$$

D'où par réduction des morphismes

$$\mathbf{G}_s \xrightarrow{i_f} \mathbf{G}'_s \xrightarrow{\pi_f} \mathbf{G}_s$$

et, comme l'image par un morphisme d'un groupe unipotent est unipotent, on a $i_f(\mathrm{R}^u \mathbf{G}_s) \subset \mathrm{R}^u \mathbf{G}'_s$, $\pi_f(\mathrm{R}^u \mathbf{G}'_s) \subset \mathrm{R}^u \mathbf{G}_s$. D'après [BLR] 3.2, on a alors le diagramme

(8) $$\mathbf{G}_s^{u,0} \xrightarrow{i} \mathbf{G}_s'^{u,0} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}_s^{u,0}.$$

On déduit de (7) et (8) les égalités

(9) $$\mathrm{K}_s^u = i^{-1}(\mathrm{K}_s'^u) \quad \text{et, pour tout } h \geqslant 1,\ \mathrm{K}_s^h = i^{-1}(\mathrm{K}_s'^h),\ \mathrm{K}_s^{u,h} = i^{-1}(\mathrm{K}_s'^{u,h}).$$

Démontrons par exemple que $\mathrm{K}_s^h = i^{-1}(\mathrm{K}_s'^h)$ pour $h \geqslant 1$. Il résulte de (7) que $i(\mathrm{K}_s^h) \subset \mathrm{K}_s'^h$ et $\pi(\mathrm{K}_s'^h) \subset \mathrm{K}_s^h$. Soit $y \in i^{-1}(\mathrm{K}_s'^h)$. Alors $y^m = \pi \circ i(y) \in \mathrm{K}_s^h$. Or K_s^h est un pro-p-groupe et m est premier à p. Donc il existe $z \in \mathrm{K}_s^h$ tel que $z^m = y^m$. Fixons un tel z. Alors $i(yz^{-1})$ appartient à $\mathrm{K}_s'^h$ et vérifie $i(yz^{-1})^m = 1$. Comme $\mathrm{K}_s'^h$ est un pro-p-groupe, on en déduit $i(yz^{-1}) = 1$ et, puisque i est injectif, $y = z$, donc $y \in K_s^h$. On démontre les autres assertions de (9) de façon analogue.

Il est clair que, via les isomorphismes (1), les morphismes i et π définissent des applications

$$(X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} E^\times)^\Delta \to (X_*(\mathbf{G}') \otimes_{\mathbf{Z}} E^\times)^\Delta \to (X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} E^\times)^\Delta$$

égales à celles qui se déduisent de i_* et π_*. Grâce à (9), les assertions du (*i*) de l'énoncé pour le groupe G se déduisent des assertions analogues pour le groupe G′. Celles-ci sont connues puisque $\mathbf{G}'$ est induit.

On déduit de i et π des morphismes

$$g \xrightarrow{di} g' \xrightarrow{d\pi} g$$

tels que $d\pi \circ di$ soit la multiplication par m et soit donc inversible. D'après (7) et (8), on a les diagrammes

$$k_s \xrightarrow{di} k'_s \xrightarrow{d\pi} k_s, \qquad k_s^u \xrightarrow{di} k_s'^u \xrightarrow{d\pi} k_s^u.$$

On en déduit que $di(k_s) = k'_s \cap di(g)$, $di(k_s^u) = k_s'^u \cap di(g)$. Via les isomorphismes (2), les morphismes di et $d\pi$ définissent des applications

$$(X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} E)^\Delta \to (X_*(\mathbf{G}') \otimes_{\mathbf{Z}} E)^\Delta \to (X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} E)^\Delta$$

égales à celles qui se déduisent de i_* et π_*. On déduit alors les assertions du (ii) de l'énoncé pour le groupe G des assertions analogues pour G′. □

Le corollaire 2.7 reste ici trivialement valide.

3. Exponentielles tronquées

3.1. Soient $\mathbf{G}$ un élément de Γ, a un entier tel que $2 \leqslant a \leqslant p$ et $e : g_{\mathrm{tn}} \to G_{\mathrm{tu}}$ une application. On dit que e est une exponentielle tronquée à l'ordre a si elle vérifie les quatre propriétés suivantes.

(1) e est un isomorphisme de variétés analytiques sur F.

(2) Notons $\bar{F}$ la clôture algébrique de F, soient $x \in \mathbf{G}(\bar{F})$ et $X \in g_{\mathrm{tn}}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Ad}(x)\, X \in g$;
(ii) $\mathrm{Ad}(x)\, X \in g_{\mathrm{tn}}$;
(iii) $xe(X)\, x^{-1} \in G$;
(iv) $xe(X)\, x^{-1} \in G_{\mathrm{tu}}$.

Si elles sont vérifiées, on a $e(\mathrm{Ad}(x)X) = xe(X)\, x^{-1}$.

(3) Soient $c \in C(\mathscr{B})$, $s \in S(c)$. Alors $e(k_s \cap g_{\mathrm{tn}}) = K_s \cap G_{\mathrm{tu}}$ et pour tout $h \in \mathbf{N}$ et tout $X \in n_c$, $e(X + \mathfrak{p}^h n_c) = e(X)\, U_c^h$, $e(X + \mathfrak{p}^h k_s^u) = e(X)\, K_s^{u,h}$.

(4) Soient h, ℓ, m des entiers tels que $0 \leqslant h \leqslant \ell \leqslant m$ et

$$(h(a-1)+\ell-m)\, e(\mathbf{G})\, d(\mathbf{G})+\frac{a}{2} \geqslant 0,$$

soient $c \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$, $\mathrm{X}_1 \in \mathfrak{p}^h\, n_c$, $\mathrm{Y}_1 \in \mathfrak{p}^\ell\, n_c$. Posons $(\mathrm{X}, \mathrm{Y})=(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1)$ ou $(\mathrm{X}, \mathrm{Y})=(\mathrm{Y}_1, \mathrm{X}_1)$. Alors

$$e(\mathrm{X})\, e(\mathrm{Y})\, e(\mathrm{CH}_a(\mathrm{X}, \mathrm{Y}))^{-1} \in \mathrm{U}_c^m,$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}\mathrm{CH}_a(\mathrm{X}, \mathrm{Y})=\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{(-1)^n}{n+1}\, [\Sigma(p_1+q_1+\ldots+q_n+1)^{-1} \\ (p_1!\, q_1! \ldots q_n!)^{-1} \operatorname{ad}^{p_1}(\mathrm{X}) \ldots \operatorname{ad}^{q_n}(\mathrm{Y})\, \mathrm{X} \\ +\Sigma(p_1+q_1+\ldots+p_{n+1}+1)^{-1} \\ (p_1!\, q_1! \ldots p_{n+1}!)^{-1} \operatorname{ad}^{p_1}(\mathrm{X}) \ldots \operatorname{ad}^{p_{n+1}}(\mathrm{X})\, \mathrm{Y}].\end{aligned}$$

Dans la première somme intérieure, on somme sur les $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$ entiers $\geqslant 0$ tels que $p_i+q_i>0$ pour tout i et $p_1+q_1+\ldots+q_n+1 \leqslant a-1$. Dans la seconde somme intérieure, on somme sur les $p_1, q_1, \ldots, q_n, p_{n+1}$ entiers $\geqslant 0$ tels que $p_i+q_i>0$ pour tout $i \leqslant n$ et $p_1+q_1+\ldots+p_{n+1}+1 \leqslant a-1$.

Remarques. — *a)* L'équivalence des conditions (i) et (ii), resp. (iii) et (iv), de (2) n'est pas liée à l'application e et probablement vraie sans hypothèse sur $\mathbf{G}$. Mais nous ne la démontrerons que sous des hypothèses restrictives.

b) La condition (4) est un peu artificielle. Peut-être des applications ultérieures nécessiteraient-elles une autre définition.

3.2. Soient $\mathbf{G}_1$ et $\mathbf{G}_2$ deux éléments de Γ, $\varphi: \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ un morphisme séparable, $\Delta \subset \mathbf{G}_1$ un sous-groupe fini central, constant sur une extension non ramifiée de F. On suppose que $|\Delta|$ est premier à p et que la suite

$$1 \rightarrow \Delta \rightarrow \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2 \rightarrow 1$$

est exacte.

Lemme. — *Sous ces hypothèses, soit a un entier tel que $2 \leqslant a \leqslant p$. Alors il existe une exponentielle tronquée à l'ordre a $e_1: g_{1, \mathrm{tn}} \rightarrow \mathrm{G}_{1, \mathrm{tu}}$ si et seulement s'il existe une telle application $e_2: g_{2, \mathrm{tn}} \rightarrow \mathrm{G}_{2, \mathrm{tu}}$.*

Preuve. — Supposons l'existence d'une exponentielle tronquée à l'ordre a

$$e_1: g_{1, \mathrm{tn}} \rightarrow \mathrm{G}_{1, \mathrm{tu}}.$$

Grâce au lemme 2.5, on définit $e_2: g_{2, \mathrm{tn}} \rightarrow \mathrm{G}_{2, \mathrm{tu}}$ par $e_2=\varphi \circ e_1 \circ(d \varphi)^{-1}$. Toujours grâce à 2.5, e_2 vérifie les propriétés (1), (3) et (4) de 3.1 (notons que les hypothèses entraînent les égalités $e(\mathbf{G}_1) = e(\mathbf{G}_2)$, $d(\mathbf{G}_1) = d(\mathbf{G}_2)$). Vérifions (2). Soient $x_2 \in \mathbf{G}_2(\overline{\mathrm{F}})$ et $\mathrm{X}_2 \in g_{2,\mathrm{tn}}$. Choisissons $x_1 \in \mathbf{G}_1(\overline{\mathrm{F}})$ tel que $\varphi(x_1) = x_2$ et posons $\mathrm{X}_1 = (d\varphi)^{-1}(\mathrm{X}_2)$. Alors $\mathrm{X}_1 \in g_{1,\mathrm{tn}}$ d'après 2.5. Supposons $\mathrm{Ad}(x_2)\,\mathrm{X}_2 \in g_2$. Comme

$$d\varphi(\mathrm{Ad}(x_1)\,\mathrm{X}_1) = \mathrm{Ad}(x_2)\,\mathrm{X}_2,$$

on a $\mathrm{Ad}(x_1)\,\mathrm{X}_1 \in g_1$. En appliquant (2) pour G_1, on en déduit $x_1\,e_1(\mathrm{X}_1)\,x_1^{-1} \in \mathrm{G}_{1,\mathrm{tu}}$. D'où $\varphi(x_1\,e_1(\mathrm{X}_1)\,x_1^{-1}) \in \mathrm{G}_{2,\mathrm{tu}}$, d'après 2.5, *i.e.* $x_2\,e_2(\mathrm{X}_2)\,x_2^{-1}\,\mathrm{G}_{2,\mathrm{tu}}$. Donc (i) $\Rightarrow$ (iv). Supposons maintenant $x_2\,e_2(\mathrm{X}_2)\,x_2^{-1} \in \mathrm{G}_2$. Posons $y_i = x_i\,e_i(\mathrm{X}_i)\,x_i^{-1}$ pour $i = 1, 2$. Comme $\varphi(y_1) = y_2$ et que φ est séparable, y_1 est défini sur une extension séparable F' de F, que l'on peut supposer galoisienne. Il y a un cocycle $\delta : \mathrm{Gal}(\mathrm{F}'/\mathrm{F}) \to \Delta$ tel que pour tout $\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathrm{F}'/\mathrm{F})$, $\gamma(y_1) = \delta(\gamma)\,y_1$. Comme $\lim_{n\to\infty} e_1(\mathrm{X}_1)^{p^n} = 1$, on a aussi $\lim_{n\to\infty} y_1^{p^n} = 1$. Donc $\lim_{n\to\infty} \delta(\gamma)^{p^n} = 1$ pour tout $\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathrm{F}'/\mathrm{F})$. Or $|\,\Delta\,|$ est premier à p. L'équation précédente implique donc $\delta(\gamma) = 1$ pour tout γ, *i.e.* $y_1 \in \mathrm{G}_1$. En appliquant (2) pour G_1, on en déduit $\mathrm{Ad}(x_1)\,\mathrm{X}_1 \in g_{1,\mathrm{tn}}$. Mais alors

$$\mathrm{Ad}(x_2)\,\mathrm{X}_2 = d\varphi(\mathrm{Ad}(x_1)\,\mathrm{X}_1) \in g_{2,\mathrm{tn}}.$$

Donc (iii) $\Rightarrow$ (ii). Comme (ii) $\Rightarrow$ (i) et (iv) $\Rightarrow$ (iii) trivialement, les quatre conditions de (2) sont bien équivalentes. La dernière assertion de (2) se déduit de l'assertion analogue pour G_1.

Inversement, supposons l'existence d'une exponentielle tronquée à l'ordre a $e_2 : g_{2,\mathrm{tn}} \to \mathrm{G}_{2,\mathrm{tu}}$. On définit $e_1 : g_{1,\mathrm{tn}} \to \mathrm{G}_{1,\mathrm{tu}}$ par $e_1 = (\varphi\,|_{\mathrm{G}_{1,\mathrm{tu}}})^{-1} \circ e_2 \circ d\varphi$. On vérifie comme ci-dessus que e_1 possède les propriétés requises. □

3.3. Supposons F de caractéristique nulle et soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe défini sur F. On sait définir l'« application exponentielle » qui est un germe d'application de g dans G au voisinage de 0. Pour cela, on plonge G dans un groupe GL(V) où V est un espace vectoriel sur F, g dans End(V) et on définit l'exponentielle dans un voisinage de 0 dans End(V) par la formule usuelle. Cette application envoie g dans G et son germe est indépendant du plongement choisi. De plus, cette construction est fonctorielle.

Proposition. — *Soient* G *un élément de* Γ *et* a *un entier tel que* $2 \leqslant a \leqslant p$. *Supposons* F *de caractéristique nulle,* $v_{\mathrm{F}}(p) \leqslant (p-1)\,(4e(\mathbf{G})\,d(\mathbf{G}))^{-1}$ *et* $p \notin \mathrm{P}(\mathbf{G})$. *Alors il existe une exponentielle tronquée à l'ordre* $ae : g_{\mathrm{tn}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{tu}}$ *dont le germe en* 0 *est l'application exponentielle.*

Preuve. — Le lemme 3.2 nous ramène au cas où $\mathbf{G}$ est un produit d'éléments de Γ_0. Lequel se ramène aisément à celui où $\mathbf{G} \in \Gamma_0$: il suffit de vérifier que si $\mathbf{G} = \prod_{i\in \mathrm{I}} \mathbf{G}_i$, la condition $(h(a-1) + \ell - m)\,e(\mathbf{G})\,d(\mathbf{G}) + \frac{a}{2} \geqslant 0$ de 3.1 (4) implique

$$(h(a-1) + \ell - m)\,e(\mathbf{G}_i)\,d(\mathbf{G}_i) + \frac{a}{2} \geqslant 0 \quad \text{pour tout } i \in \mathrm{I}.$$

Supposons d'abord $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_d$. Reprenons les notations de 2.8. Pour $t \in \mathbf{Z}$, écrivons $t = u + vd$, avec $u \in \{0, \ldots, d-1\}$, $v \in \mathbf{Z}$. On pose $\mathrm{L}_t = \mathfrak{p}^v \mathrm{L}_u$. Soient alors $\mathrm{X} \in n$, $i \in \{0, \ldots, d-1\}$, $t \in \mathbf{N}$, $t \geqslant 1$. On a $\mathrm{X}^t(\mathrm{L}_i) \subset \mathrm{L}_{i+t}$. Ecrivons $t = u + vd$ comme ci-dessus. Alors

$$(t!)^{-1}\,\mathrm{X}^t(\mathrm{L}_i) \subset \mathfrak{p}^{x(t)}\,\mathrm{L}_{i+u}$$

où $x(t) = v - v_{\mathrm{F}}(t!) = v - v_{\mathrm{F}}(p)\, v_{\mathrm{Q}_p}(t!)$. On sait que $v_{\mathrm{Q}_p}(t!) < \dfrac{t}{p-1}$ (cf. par exemple [Wash], p. 49). Alors

$$x(t) > v - v_{\mathrm{F}}(p)\,\frac{t}{p-1} \geqslant v - \frac{t}{4d} = \frac{v}{3} - \frac{u}{4d}. \tag{1}$$

Donc $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$. Cela démontre la convergence dans $\mathrm{End}(\mathrm{V})$ de la série

$$\sum_{t=0}^{\infty} (t!)^{-1}\,\mathrm{X}^t. \tag{2}$$

Par conjugaison, il en est de même si $\mathrm{X} \in g_{\mathrm{tn}}$. Notons $e(\mathrm{X})$ la limite de la série ci-dessus pour $\mathrm{X} \in g_{\mathrm{tn}}$. Il est bien connu que $e(\mathrm{X}) \in \mathrm{G}$. Revenons au cas $\mathrm{X} \in n$. D'après (1) et comme $x(t)$ est entier, on a $x(t) \geqslant 0$ et même $x(t) \geqslant 1$ si $u = 0$. *A fortiori* $(t!)^{-1}\,\mathrm{X}^t(\mathrm{L}_i) \subset \mathrm{L}_{i+1}$. Donc $e(\mathrm{X}) \in \mathrm{U}$. Par conjugaison, on obtient que $e(\mathrm{X}) \in \mathrm{G}_{\mathrm{tu}}$ si $\mathrm{X} \in g_{\mathrm{tn}}$.

De la même façon, on définit une application $l : \mathrm{G}_{\mathrm{tu}} \to g_{\mathrm{tn}}$ par la formule

$$l(x) = \sum_{t=1}^{\infty} t^{-1}(-1)^{t+1}(x-1)^t$$

et on vérifie que l et e sont inverses l'un de l'autre. Donc e vérifie la propriété (1) de 3.1. L'équivalence des propriétés (i) et (ii), resp. (iii) et (iv) du (2) de 3.1 résulte de 2.6.2, resp. 2.6.1. Supposons que $x \in \mathbf{G}(\overline{\mathrm{F}})$ et $\mathrm{X} \in g_{\mathrm{tn}}$ vérifient $\mathrm{Ad}(x)\,\mathrm{X} \in g_{\mathrm{tn}}$. Il résulte de la formule (2) ci-dessus que $e(\mathrm{Ad}(x)\,\mathrm{X}) = xe(\mathrm{X})\,x^{-1}$. *A fortiori* $xe(\mathrm{X})\,x^{-1} \in \mathrm{G}_{\mathrm{tu}}$. Donc (ii) $\Rightarrow$ (iv) dans le (2) de 3.1. On démontre l'implication inverse en utilisant l'application l. Donc e vérifie la propriété (2) de 3.1. On a déjà montré que $e(n) \subset \mathrm{U}$. On démontre l'inclusion inverse en utilisant l'application l. Si $i \in \{0, \ldots, d-1\}$ et $\mathrm{X} \in k_i \cap g_{\mathrm{tn}}$, resp. $x \in \mathrm{K}_i \cap \mathrm{G}_{\mathrm{tu}}$, il existe $y \in \mathrm{K}_i$ tel que $\mathrm{Ad}(y)\,\mathrm{X} \in n$, resp. $yxy^{-1} \in \mathrm{U}$. Alors $e(\mathrm{Ad}(y)\,\mathrm{X}) \in \mathrm{U} \subset \mathrm{K}_i \cap \mathrm{G}_{\mathrm{tu}}$, resp. $l(yxy^{-1}) \in n \subset k_i \cap g_{\mathrm{tn}}$, et $e(\mathrm{X}) \in \mathrm{K}_i \cap \mathrm{G}_{\mathrm{tu}}$, resp. $l(x) \in k_i \cap g_{\mathrm{tn}}$. Donc $e(k_i \cap g_{\mathrm{tn}}) = \mathrm{K}_i \cap \mathrm{G}_{\mathrm{tu}}$. Soit $h \in \mathbf{N}$. Des calculs analogues à ceux démontrant l'égalité $e(n) = \mathrm{U}$ démontrent que $e(\mathfrak{p}^h\, n) = \mathrm{U}^h$ et, si $h \geqslant 1$, $e(\mathfrak{p}^h\, k_i) = \mathrm{K}_i^h$ pour tout $i \in \{0, \ldots, d-1\}$.

Notons $\mathrm{CH}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ la série formelle en X et Y définie par la même formule que $\mathrm{CH}_a(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ sauf que l'on supprime les conditions de troncature

$$p_1 + q_1 + \ldots + q_n + l \leqslant a - 1$$

et

$$p_1 + q_1 + \ldots + p_{n+1} + l \leqslant a - 1.$$

Soit $t \in \mathbf{N}$, considérons un terme de cette série de degré total t en X et Y. Supposons par exemple que ce soit le terme de la première somme intérieure indexé par n et $p_1, q_1, \ldots, q_n$. On a $p_1 + q_1 + \ldots + q_n + 1 = t$. Comme $n \leqslant p_1 + q_1 + \ldots + q_n$, on en déduit $n + 1 \leqslant t$. De plus $p_1!\, q_1! \ldots q_n!$ divise $(t-1)!$. On déduit de ces relations que le coefficient de notre terme dans la série est un multiple entier de $(t!)^{-2}$. Un calcul analogue à celui démontrant la convergence de l'exponentielle montre que pour $X, Y \in n$ la série $CH(X, Y)$ est absolument convergente et sa somme appartient à n. Mieux : la série $e(CH(X, Y))$ est absolument convergente. La formule de Campbell-Hausdorff affirme l'égalité formelle

$$e(CH(X, Y)) = e(X)\, e(Y).$$

Cette égalité est donc valable pour $X, Y \in n$. Pour démontrer les dernières égalités du (3) de 3.1, il suffit de prouver que

(3) *a)* soient $h \in \mathbf{N}$, $h \geqslant 1$, $X \in n$, $Y \in \mathfrak{p}^h n$; alors $CH(-X, X + Y) \in \mathfrak{p}^h n$ et $CH(X, Y) \in X + \mathfrak{p}^h n$;

b) soient $h \in \mathbf{N}$, $h \geqslant 1$, $i \in \{0, \ldots, d-1\}$, $X \in n$, $Y \in \mathfrak{p}^h k_i$; alors

$$CH(-X, X + Y) \in \mathfrak{p}^h k_i \quad \text{et} \quad CH(X, Y) \in X + \mathfrak{p}^h k_i.$$

Démontrons par exemple la première relation de *b)*. On développe par linéarité chaque terme de la série $CH(-X, X + Y)$. On obtient une somme de termes de la forme

$$c \operatorname{ad}^{t_1}(X) \operatorname{ad}^{t_2}(Y) \ldots \operatorname{ad}^{t_n}(X)\, Y \tag{4}$$

ou

$$c \operatorname{ad}^{t_1}(Y) \operatorname{ad}^{t_2}(X) \ldots \operatorname{ad}^{t_n}(Y)\, X.$$

Les t_j sont des entiers $\geqslant 0$ et, si l'on pose $t = t_1 + \ldots + t_n + 1$, c est un multiple entier de $(t!)^{-2}$. Le terme de degré $t = 1$ se laisse calculer : c'est Y, qui appartient à $\mathfrak{p}^h k_i$. Considérons un terme de degré $t \geqslant 2$. Alors Y intervient effectivement dans l'expression (4) car le seul terme où Y n'intervient pas est $\operatorname{ad}^{t-1}(X)\, X$ qui est nul. En tenant compte du fait que $\mathfrak{p}^h k_i \subset n$, notre terme est somme dans End(V) d'éléments de la forme

$$Z = c X_1 \ldots X_{t'} Y X_{t'+1} \ldots X_{t-1} \tag{5}$$

où les X_j appartiennent à n. Ecrivons $t' = u' + v' d$, $t - t' - 1 = u'' + v'' d$ avec $u', u'' \in \{0, \ldots, d-1\}$, $v', v'' \in \mathbf{Z}$. Alors

$$X_{t'+1} \ldots X_{t-1}(L_i) \subset \mathfrak{p}^{v''} L_{i+u''} \subset \mathfrak{p}^{v''} L_i,$$

$$Y(L_i) \subset \mathfrak{p}^h L_i,$$

$$X_1 \ldots X_{t'}(L_i) \subset \mathfrak{p}^{v'} L_{i+u'} \subset \mathfrak{p}^{v'} L_i.$$

Donc $Z(L_i) \subset \mathfrak{p}^z L_i$, où $z = v' + v'' + v_F(c) + h$. On obtient comme précédemment

$$z > v' + v'' - \frac{t}{2d} + h = \frac{v' + v''}{2} - \frac{u' + u'' + 1}{2d} + h > h - 1.$$

Comme z est entier, on a donc $z \geqslant h$ et $Z(L_i) \subset \mathfrak{p}^h L_i$. Notre terme de départ vérifie donc lui aussi cette relation et appartient à $\mathfrak{p}^h k_i$, ce qui démontre la première relation de (3) *b)*. Les autres relations se démontrent de façon analogue.

Soient maintenant h, ℓ et m des entiers vérifiant les conditions de 3.1 (4) et soient $X \in \mathfrak{p}^h n$, $Y \in \mathfrak{p}^\ell n$. Pour vérifier 3.1 (4), il suffit de montrer que

$$\mathrm{CH}(X, Y) - \mathrm{CH}_a(X, Y) \in \mathfrak{p}^m n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{CH}(Y, X) - \mathrm{CH}_a(Y, X) \in \mathfrak{p}^m n.$$

Le même raisonnement que ci-dessus nous ramène à considérer un entier $t \geqslant a$, un nombre rationnel c multiple entier de $(t!)^{-2}$ et un élément Z de End(V) de la forme (5), où les X_j appartiennent à $\mathfrak{p}^h n$, et à prouver que pour tout $i \in \{0, \ldots, d-1\}$, on a $Z(L_i) \subset \mathfrak{p}^m L_{i+1}$. En écrivant $t = u + vd$, avec $u \in \{0, \ldots, d-1\}$, $v \in \mathbf{Z}$, on a $Z(L_i) \subset \mathfrak{p}^z L_{i+u}$, où $z = v + v_F(c) + h(t-1) + \ell$. On doit montrer que $dz + u \geqslant dm + 1$ et il suffit pour cela que $dz + u - dm > 0$. Or

$$\begin{aligned} dz + u - dm &> t - 2v_F(p)\frac{t\,d}{p-1} + d(h(t-1) + \ell - m) \\ &\geqslant \frac{t}{2} + d(h(t-1) + \ell - m). \end{aligned}$$

Cette dernière expression étant croissante en t, on obtient

$$dz + u - dm > \frac{a}{2} + d(h(a-1) + \ell - m)$$

qui est $\geqslant 0$ par hypothèse. Cela achève la preuve du fait que e est une exponentielle tronquée à l'ordre a.

Supposons maintenant que $\mathbf{G}$ est l'un des groupes introduits en 2.9. On a fixé des réseaux L_i pour $i \in \{0, \ldots, r\}$. Si $2r = d$, on pose $d' = d$ et $L_i = \mathfrak{p}_E L_{2r-i}$ pour $i \in \{r+1, \ldots, d'\}$. Si $2r < d$, on pose $d' = 2r + 1$ et $L_i = \mathfrak{p}_E L_{2r+1-i}$ pour $i \in \{r+1, \ldots, d'\}$. Dans les deux cas, pour $i \in \mathbf{Z}$, on écrit $i = u + vd'$ avec $u \in \{0, \ldots, d'-1\}$ et $v \in \mathbf{Z}$ et l'on pose $L_i = \mathfrak{p}_E^v L_u$. Alors

$$L_0 \underset{\neq}{\supset} L_1 \underset{\neq}{\supset} \cdots \underset{\neq}{\supset} L_{d' e(\mathbf{G})} = \mathfrak{p} L_0,$$

et on a les égalités

$$\begin{aligned} n &= \{ X \in g ; \forall i \in \{0, \ldots, e(\mathbf{G})\, d' - 1\}, X(L_i) \subset L_{i+1} \}, \\ U &= \{ x \in G ; \forall i \in \{0, \ldots, e(\mathbf{G})\, d' - 1\}, (x-1)(L_i) \subset L_{i+1} \}. \end{aligned}$$

La démonstration du cas SL_d s'adapte en utilisant la suite de réseaux ci-dessus en lieu et place de la suite $(L_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ définie précédemment. On obtient le même énoncé que dans le cas SL_d, où d est remplacé par $d' e(\mathbf{G})$. Mais comme $d' \leqslant d$, on voit que ce dernier énoncé est plus fort que celui obtenu en remplaçant encore d' par $d(= d(\mathbf{G}))$. D'où le résultat.

Remarque. — Un seul point de la démonstration diffère ici du cas $\mathbf{G} = SL_d$, c'est la preuve de la dernière égalité de 3.1 (3), car la définition des k_s^u est un peu différente de leur définition dans le cas de SL_d. Mais la preuve du cas de SL_d s'adapte facilement.

Cela démontre la proposition pour $\mathbf{G} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3$: le lemme 2.2 ramène le cas d'un groupe Spin(V) pour V quadratique au cas du groupe SO(V).

Supposons maintenant que $\mathbf{G}$ est l'image du groupe multiplicatif par restriction des scalaires de E à F, où E est une extension finie de F. On utilise la description de 2.10. Pour $X \in g_{tn} \simeq \mathfrak{p}_E$, on définit encore $e(X) \in G_{tu} \simeq 1 + \mathfrak{p}_E$ par la série (2). Les mêmes méthodes que ci-dessus démontrent la proposition pour $v_E(p) \leqslant p - 1$. Notons que l'on a l'égalité $e(X)\, e(Y) = e(X + Y)$ pour tous $X, Y \in g_{tn}$.

Supposons enfin que $\mathbf{G} \in \Gamma_4$. On utilise toujours la description de 2.10. On vient d'introduire l'exponentielle $e : \mathfrak{p}_E \to 1 + \mathfrak{p}_E$. Comme c'est un morphisme de groupes, elle définit par linéarité un morphisme encore noté e :

$$e : X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{p}_E \to X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} (1 + \mathfrak{p}_E).$$

Comme l'action de Δ est continue, on vérifie qu'elle commute à e. On obtient alors une application

$$g_{tn} = (X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{p}_E)^\Delta \to (X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} (1 + \mathfrak{p}_E))^\Delta = G_{tu}$$

dont on vérifie aisément qu'elle possède les propriétés requises.

Cela achève la preuve de la proposition. □

3.4. Plaçons-nous dans la situation de 2.8 où $\mathbf{G} = SL(V)$. On suppose d premier à p. Pour $\lambda \in F$, on note $j(\lambda) \in End(V)$ l'homothétie de rapport λ. On définit le réseau L_i pour $i \in \mathbf{Z}$ comme dans la démonstration précédente. Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, on pose

$$A_k = \{ X \in End(V) ;\ \forall\, i \in \mathbf{Z},\ X(L_i) \subset L_{i+k} \}.$$

La relation suivante est facile à établir :

(1) soient $k \geqslant 1$ et $X \in A_k$; alors

(i) $j \circ trace(X) \in A_k$ et $j \circ det(1 + X) \equiv 1 + j \circ trace(X) \bmod A_{k+1}$;

(ii) si $d \nmid k$, on a même $j \circ trace(X) \in A_{k+1}$.

Fixons un entier $a \in \{2, \ldots, p\}$ et définissons des applications l_1 et $l : \mathrm{G} \to \mathrm{End}(\mathrm{V})$ par

$$l_1(x) = \sum_{i=1}^{a-1} i^{-1}(-1)^{i+1}(x-1)^i,$$
$$l(x) = l_1(x) - d^{-1} j \circ \mathrm{trace}(l_1(x)),$$

pour $x \in \mathrm{G}$. Evidemment $l(x) \in g$.

Lemme. — L'application (1) *définit un isomorphisme analytique de* G_{tu} *sur* g_{tn}.

Preuve. — Si $x \in \mathrm{U}$, $1 - x \in \mathrm{A}_1$ et aussi $l_1(x) \in \mathrm{A}_1$. Donc $j \circ \mathrm{trace}(l_1(x)) \in \mathrm{A}_1$ et aussi $l(x) \in \mathrm{A}_1$. Alors $l(x) \in \mathrm{A}_1 \cap g = n$. Par conjugaison, $l(x) \in g_{\mathrm{tn}}$ pour tout $x \in \mathrm{G}_{\mathrm{tu}}$. Evidemment l est analytique. On va définir une application inverse. Soit $\mathrm{X} \in n$. Nous allons construire par récurrence une suite $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$ d'éléments de G. On pose $x_0 = 1$. Soit $m \in \mathbf{N}$, supposons défini x_m. Supposons que $x_m \in \mathrm{U}$ et que $\mathrm{X} - l(x_m) \in \mathrm{A}_{m+1}$. Posons $\mathrm{X}_m = \mathrm{X} - l(x_m)$. Alors $\mathrm{X}_m \in \mathrm{A}_1$ donc $\det(1 + \mathrm{X}_m) \in 1 + \mathfrak{p}$. Comme d est premier à p, l'élévation à la puissance d-ième est un isomorphisme du groupe $1 + \mathfrak{p}$. Soit $z_m \in \mathfrak{p}$ tel que $(1 + z_m)^d = \det(1 + \mathrm{X}_m)$. On pose $x'_m = j((1 + z_m)^{-1})(1 + \mathrm{X}_m)$ et $x_{m+1} = x_m x'_m$. On a $x'_m \in 1 + \mathrm{A}_1$ et $\det x'_m = 1$, donc $x'_m \in \mathrm{G} \cap (1 + \mathrm{A}_1) = \mathrm{U}$ et $x_{m+1} \in \mathrm{U}$. Comme $\mathrm{X}_m \in \mathrm{A}_{m+1}$, on a $j \circ \det(1 + \mathrm{X}_m) \in 1 + \mathrm{A}_{m+1}$, donc $j(z_m) \in \mathrm{A}_{m+1}$. On en déduit

$$x'_m \equiv 1 + \mathrm{X}_m - j(z_m) \bmod \mathrm{A}_{m+2}.$$

En utilisant la relation $1 - x_m \in \mathrm{A}_1$, on obtient

$$l_1(x_{m+1}) \equiv l_1(x_m) + \mathrm{X}_m - j(z_m) \bmod \mathrm{A}_{m+2}.$$

D'où
$$l(x_{m+1}) \equiv l(x_m) + \mathrm{X}_m - d^{-1} j \circ \mathrm{trace}(\mathrm{X}_m) - j(z_m) + d^{-1} j \circ \mathrm{trace} \circ j(z_m) \bmod \mathrm{A}_{m+2}.$$

Comme $\mathrm{X}_m \in g$, $\mathrm{trace}(\mathrm{X}_m) = 0$. De plus $\mathrm{trace} \circ j(z_m) = dz_m$. D'où

$$l(x_{m+1}) \equiv l(x_m) + \mathrm{X}_m \equiv \mathrm{X} \bmod \mathrm{A}_{m+2}.$$

Donc x_{m+1} vérifie les hypothèses de récurrence.

Comme $x'_m \in \mathrm{G} \cap (1 + \mathrm{A}_{m+1})$ pour tout m, la suite $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$ converge vers un élément de U que l'on note $e(\mathrm{X})$. Notons que l'hypothèse $\mathrm{X} \in n$ n'est pas utilisée dans la construction de la suite $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$. Cette construction se généralise à tout $\mathrm{X} \in g_{\mathrm{tn}}$ et l'on définit ainsi une application $e : g_{\mathrm{tn}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{tu}}$. Par construction, elle est analytique. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient $\mathrm{X} = l \circ e(\mathrm{X})$ pour tout $\mathrm{X} \in g_{\mathrm{tn}}$. Il reste à montrer que l'on a aussi $x = e \circ l(x)$ pour tout $x \in \mathrm{G}_{\mathrm{tu}}$. On peut supposer $x \in \mathrm{U}$. Posons $x' = e \circ l(x)$. On a aussi $x' \in \mathrm{U}$. Si $x' \neq x$, posons $\mathrm{X} = x' - x$ et soit k le plus grand entier tel que $\mathrm{X} \in \mathrm{A}_k$. On vérifie que

$$l_1(x') \equiv l_1(x) + \mathrm{X} \bmod \mathrm{A}_{k+1}.$$

Posons $Y = (1 + X)^{-1} x^{-1} x' - 1$. Alors $Y \in A_{k+1}$ et $x' = x(1 + X)(1 + Y)$. On en déduit $j \circ \det(1 + X) j \circ \det(1 + Y) = 1$, d'où $j \circ \det(1 + X) \in 1 + A_{k+1}$, puis, d'après (1), $j \circ \mathrm{trace}(X) \in A_{k+1}$. Alors

$$l(x') \equiv l(x) + X \bmod A_{k+1}.$$

Mais $l(x') = l(x)$. Donc $X \in A_{k+1}$ ce qui contredit la définition de k et achève la démonstration du lemme. □

3.5. *Lemme.* — *Il existe un polynôme non commutatif* P *en deux variables, à coefficients dans* $\mathbf{Z}_p$, *dont tous les termes monomiaux sont de degré total* $\geqslant a$ *et de degré* $\geqslant 1$ *en chacune des variables, tel que pour tous* $x_1, x_2 \in G$, *on ait l'égalité*

$$l(x_1 x_2) = \mathrm{CH}_a(l(x_1), l(x_2)) + P(x_1 - 1, x_2 - 1) \\ - d^{-1} j \circ \mathrm{trace}\, P(x_1 - 1, x_2 - 1).$$

Preuve. — Considérons les séries formelles

$$L_1(X) = \sum_{n=1}^{a-1} n^{-1}(-1)^{n+1} X^n, \qquad L_0(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(-1)^{n+1} X^n,$$

et, comme en 3.3, $\mathrm{CH}(X, Y)$ définie par la même formule que $\mathrm{CH}_a(X, Y)$ sauf que l'on supprime les conditions de troncature. Notons que, si l'on pose $x_1 - 1 = X$, $x_2 - 1 = Y$, on a $x_1 x_2 - 1 = X + Y + XY$. La formule de Campbell-Hausdorff affirme donc l'égalité formelle

$$L_0(X + Y + XY) = \mathrm{CH}(L_0(X), L_0(Y)).$$

Posons $$P(X, Y) = L_1(X + Y + XY) - \mathrm{CH}_a(L_1(X), L_1(Y)).$$

C'est un polynôme non commutatif à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$. Il est immédiat que ses termes monomiaux de degré $< a$ sont les mêmes que ceux de

$$L_0(X + Y + XY) - \mathrm{CH}(L_0(X), L_0(Y)),$$

qui est nul. D'autre part, pour $Y = 0$, on a $P(X, 0) = L_1(X) - \mathrm{CH}_a(L_1(X), 0) = 0$. Donc P ne contient pas de terme de degré 0 en Y. Idem en échangeant X et Y. Donc P vérifie les premières conditions de l'énoncé. Par définition de P, pour $x_1, x_2 \in G$, on a

$$(1) \qquad l_1(x_1 x_2) = \mathrm{CH}_a(l_1(x_1), l_1(x_2)) + P(x_1 - 1, x_2 - 1).$$

D'où

$$(2) \qquad \mathrm{trace}\, l_1(x_1 x_2) = \mathrm{trace}\, \mathrm{CH}_a(l_1(x_1), l_1(x_2)) + \mathrm{trace}\, P(x_1 - 1, x_2 - 1).$$

Mais pour tous $X, Y \in \mathrm{End}(V)$, on a $\mathrm{trace}\, \mathrm{ad}(X)\, Y = 0$. On calcule donc

$$(3) \qquad \mathrm{trace}\, \mathrm{CH}_a(l_1(x_1), l_1(x_2)) = \mathrm{trace}\, l_1(x_1) + \mathrm{trace}\, l_1(x_2).$$

De même, pour tous X, Y $\in$ End(V) et tout $\mu \in$ F, on a

$$\mathrm{ad}(\mathrm{X} + j(\mu))\,\mathrm{Y} = \mathrm{ad}(\mathrm{X})\,(\mathrm{Y} + j(\mu)) = \mathrm{ad}(\mathrm{X})\,\mathrm{Y}.$$

On obtient alors

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{CH}_a(l(x_1), l(x_2)) = \mathrm{CH}_a(l_1(x_1), l_1(x_2)) - d^{-1} j \circ \mathrm{trace}(l_1(x_1) + l_1(x_2)).$$

Alors l'égalité de l'énoncé résulte des définitions et des égalités (1) à (4). □

3.6. On note $e : g_{\mathrm{tn}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{tu}}$ l'application inverse de $l|_{\mathrm{G}_{\mathrm{tu}}}$.

Lemme. — L'application e est une exponentielle tronquée à l'ordre a.

Preuve. — Montrons que e possède les autre propriétés de 3.1.

(1) résulte du lemme 3.4.

(2) L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) découle de la formule définissant l. L'équivalence de (i) et (ii), resp. (iii) et (iv), résulte de 2.6.2, resp. 2.6.1. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte de la construction de e faite dans la preuve de 3.4 : si $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$, resp. $(x'_m)_{m \in \mathbf{N}}$, sont les suites associées à X, resp. Ad(x) X, on vérifie que, pour tout m, $x'_m = x x_m x^{-1}$; en passant à la limite, on obtient $e(\mathrm{Ad}(x)\,\mathrm{X}) = xe(\mathrm{X})\,x^{-1}$; ce dernier élément appartient donc à G. On vient de montrer du même coup la dernière formule de la propriété (2).

(3) Soient $i \in \{0, \ldots, d-1\}$, $h \in \mathbf{N}$, $h \geqslant 1$, $x \in \mathrm{U}$ et $y \in \mathrm{K}_i^h$. On a déjà vu que $l(x) \in n$. Il résulte de la formule définissant l que $l(y) \in \mathfrak{p}^h k_i$, puis de la formule définissant $\mathrm{CH}_a(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ que $\mathrm{CH}_a(l(x), l(y)) \in l(x) + \mathfrak{p}^h k_i$. Il résulte des propriétés du polynôme P du lemme 3.5 que $\mathrm{P}(x-1, y-1)\,(\mathrm{L}_i) \subset \mathfrak{p}^h \mathrm{L}_i$. On a donc aussi

$$(j \circ \mathrm{trace}\,\mathrm{P}(x-1, y-1))\,(\mathrm{L}_i) \subset \mathfrak{p}^h \mathrm{L}_i.$$

Grâce au lemme 3.5, on obtient alors

$$l(xy) \in l(x) + \mathfrak{p}^h k_i.$$

Donc $l(x\mathrm{K}_i^h) \subset l(x) + \mathfrak{p}^h k_i$. Mais $\mathrm{U}/\mathrm{K}_i^h$ et $n/\mathfrak{p}^h k_i$ ont même nombre d'éléments et on a déjà montré en 3.4 que $l|_{\mathrm{U}}$ est un isomorphisme de U sur n. Les inclusions précédentes sont donc nécessairement des égalités et cela démontre la dernière égalité de (3). La deuxième égalité se prouve de façon analogue. La première se prouve comme en 3.3.

(4) Soient h, ℓ, m vérifiant les hypothèses de cette condition, $x \in \mathrm{U}^h$, $y \in \mathrm{U}^\ell$. Alors $x - 1 \in \mathrm{A}_{hd+1}$, $y - 1 \in \mathrm{A}_{\ell d+1}$. D'après les propriétés du polynôme P du lemme 3.5, on a $\mathrm{P}(x-1, y-1) \in \mathrm{A}_{(a-1)hd+\ell d+a}$, donc aussi $j \circ \mathrm{trace}\,\mathrm{P}(x-1, y-1) \in \mathrm{A}_{(a-1)hd+\ell d+a}$, cf. 3.4 (1). Par hypothèse

$$(a-1)\,hd + \ell d + a \geqslant md + 1.$$

Il résulte alors du lemme 3.5 que

$$l(xy) - \mathrm{CH}_a(l(x), l(y)) \in g \cap \mathrm{A}_{md+1} = \mathfrak{p}^m n.$$

Cela démontre l'une des relations de (4). L'autre se prouve de façon analogue. □

3.7. Plaçons-nous maintenant dans la situation de 2.9. On suppose $p \neq 2$ et, dans le cas hermitien, d premier à p. On fixe un entier $a \in \{2, \ldots, p\}$. On définit une application $l_1 : \mathrm{G} \to \mathrm{End}_{\mathrm{E}}(\mathrm{V})$ par la même formule qu'en 3.4, puis une application $l_2 : \mathrm{G} \to \mathrm{End}_{\mathrm{E}}(\mathrm{V})$ par

$$l_2(x) = \frac{1}{2}\,(l_1(x) - l_1(x)^*)$$

pour tout $x \in \mathrm{G}$, cf. 2.9 pour la définition de $*$. Si V est symplectique ou quadratique, on pose $l = l_2$. Si V est hermitien, on définit $l : \mathrm{G} \to \mathrm{End}_{\mathrm{E}}(\mathrm{V})$ par

$$l(x) = l_2(x) - d^{-1} j \circ \mathrm{trace}\, l_2(x),$$

où $j : \mathrm{E} \to \mathrm{End}_{\mathrm{E}}(\mathrm{V})$ est l'analogue de l'application définie en 3.4. Evidemment $l(x) \in g$ pour tout $x\mathrm{G}$.

Lemme. — L'application l se restreint en un isomorphisme analytique de G_{tu} *sur* g_{tn}.

Preuve. — La démonstration est analogue à celle de 3.4. Indiquons seulement la construction de l'isomorphisme inverse.

On a défini en 3.3 des réseaux L_i pour $i \in \mathbf{Z}$. Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, on pose

$$\mathrm{A}_k = \{ \mathrm{X} \in \mathrm{End}_{\mathrm{E}}(\mathrm{V})\,;\, \forall\, i \in \mathbf{Z},\, \mathrm{X}(\mathrm{L}_i) \subset \mathrm{L}_{i+k} \}.$$

La relation (1) de 3.4 reste vraie à condition de remplacer d par $d' = \inf(d, 2r+1)$. Soit $\mathrm{X} \in n$. Nous allons construire par récurrence une suite $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$ d'éléments de G. On pose $x_0 = 1$. Soit $m \in \mathbf{N}$, supposons défini x_m, supposons que $x_m \in \mathrm{U}$ et que $\mathrm{X} - l(x_m) \in \mathrm{A}_{m+1}$. Posons $\mathrm{X}_m = \mathrm{X} - l(x_m)$. Si V est symplectique ou quadratique, on pose

$$x'_m = \left(1 + \frac{\mathrm{X}_m}{2}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{X}_m}{2}\right)^{-1}.$$

On vérifie que $x'_m \in \mathrm{G}$. Si V est hermitien, comme $\mathrm{X}_m \in \mathrm{A}_{m+1} \subset \mathrm{A}_1$, on a

$$\det\left(1 + \frac{\mathrm{X}_m}{2}\right) \in 1 + \mathfrak{p}_{\mathrm{E}}$$

et il existe un unique $z_m \in \mathfrak{p}_{\mathrm{E}}$ tel que $(1 + z_m)^d = \det\left(1 + \dfrac{\mathrm{X}_m}{2}\right)$. On pose

$$x'_m = j((1 + z_m)^{-1}(1 + \sigma(z_m)))\left(1 + \frac{\mathrm{X}_m}{2}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{X}_m}{2}\right)^{-1},$$

où σ est l'élément non trivial de Gal(E/F). On a encore $x'_m \in \mathrm{G}$. Dans les deux cas, on pose $x_{m+1} = x_m\, x'_m$. On montre comme en 3.4 que x_{m+1} vérifie les hypothèses de récurrence. La fin de la preuve de 3.4 s'adapte à notre situation. □

3.8. On note $e : g_{\mathrm{tn}} \to G_{\mathrm{tu}}$ l'application inverse de 1.

Lemme. — L'application e est une exponentielle tronquée à l'ordre a.

Preuve. — On doit encore vérifier les quatre propriétés de 3.1. La propriété (1) résulte de 3.7, (2) se prouve comme dans le cas du groupe SL_d, la première égalité de (3) se prouve comme en 3.3, la deuxième égalité se prouve comme la troisième que nous allons démontrer. Comme en 3.6, il suffit de prouver :

(1) soient $i \in \mathrm{I}'$, $h \in \mathbf{N}$, $x \in \mathrm{U}$, $y \in \mathrm{K}_i^{u,h}$; alors $l(xy) \in l(x) + \mathfrak{p}^h k_i^u$, cf. 2.9 pour la définition de I'. Rappelons que x stabilise L_i et $\widetilde{\mathrm{L}}_i$ (cf. 2.9, remarque). Posons

$$\mathrm{B} = \{ \mathrm{X} \in \mathrm{End}_{\mathrm{E}}(\mathrm{V}) \,;\, \mathrm{X}(\mathrm{L}_i) \subset \mathfrak{p}_{\mathrm{E}} \widetilde{\mathrm{L}}_i,\, \mathrm{X}(\widetilde{\mathrm{L}}_i) \subset \mathrm{L}_i \}.$$

Comme $y \in \mathrm{K}_i^{u,h}$, on a $y - 1 \in \mathfrak{p}^h\,\mathrm{B}$. Il résulte de la définition de l_1 que l'on a aussi $l_1(y) \in \mathfrak{p}^h\,\mathrm{B}$. Introduisons le polynôme P défini dans la preuve de 3.5. Il vérifie les premières propriétés énoncées dans ce lemme. On a l'égalité

(2) $$l_1(xy) = \mathrm{CH}_a(l_1(x), l_1(y)) + \mathrm{P}(x - 1, y - 1).$$

D'après ce que l'on a dit ci-dessus, $\mathrm{P}(x-1, y-1)$ et les termes de $\mathrm{CH}_a(l_1(x), l_1(y))$ contenant $l_1(y)$ appartiennent à $\mathfrak{p}^h\,\mathrm{B}$. On obtient

$$l_1(xy) \equiv l_1(x) \bmod \mathfrak{p}^h\,\mathrm{B}.$$

Comme B est stable par l'automorphisme $\mathrm{X} \mapsto -\mathrm{X}^*$ de $\mathrm{End}_{\mathrm{E}}(\mathrm{V})$, on obtient

$$l_2(xy) \equiv l_2(x) \bmod \mathfrak{p}^h\,\mathrm{B}.$$

Si V est symplectique ou quadratique, on en déduit immédiatement la relation cherchée. Si V est hermitien, il faut de plus observer que, si $\mathrm{X} \in \mathrm{B}$, alors $\mathrm{trace}(\mathrm{X}) \in \mathfrak{p}_{\mathrm{E}}$ et $j \circ \mathrm{trace}(\mathrm{X}) \in \mathrm{B}$. Cela démontre (1), *i.e.* la propriété (3) de 3.1.

Démontrons maintenant la propriété (4) de 3.1. Soient donc h, ℓ, m des entiers vérifiant les conditions de 3.1 (4), $x \in \mathrm{U}^h$, $y \in \mathrm{U}^\ell$. On introduit l'entier d' et les modules A_k comme dans la preuve de 3.7. On a $x - 1 \in \mathfrak{p}^h\,\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_{hd'e+1}$, où $e = e(\mathbf{G})$ est l'indice de ramification de E/F, et aussi $l_1(x) \in \mathrm{A}_{hd'e+1}$. Je dis que l'on a

(3) $$l_2(x) \equiv l_1(x) \bmod \mathrm{A}_{a(hd'e+1)}.$$

Comme $x^{-1} \in \mathrm{U}^h$, on a aussi $l_1(x^{-1}) \in \mathrm{A}_{hd'e+1}$. Posons $\mathrm{X} = l_1(x^{-1}) + l_1(x)$ et montrons d'abord que $\mathrm{X} \in \mathrm{A}_{a(hd'e+1)}$. Sinon soit k le plus grand entier tel que $\mathrm{X} \in \mathrm{A}_k$. Ecrivons

$$0 = l_1(xx^{-1}) = \mathrm{CH}_a(l_1(x), l_1(x^{-1})) + \mathrm{P}(x - 1, x^{-1} - 1).$$

Le terme $\mathrm{P}(x - 1, x^{-1} - 1)$ appartient à $\mathrm{A}_{a(hd'e+1)}$. En remplaçant $l_1(x^{-1})$ par $-l_1(x) + \mathrm{X}$ dans $\mathrm{CH}_a(l_1(x), l_1(x^{-1}))$, on voit que ce dernier terme est somme de X et de termes de degré total $\geqslant 2$ en X et $l_1(x)$, contenant X. Ces termes sont dans A_{k+1}. On obtient alors la relation

$$\mathrm{X} \in \mathrm{A}_{k+1} + \mathrm{A}_{a(hd'e+1)},$$

ce qui contredit la définition de k. Donc $X \in A_{a(hd'e+1)}$. Mais comme $x \in G$, on a $x^{-1} = x^*$ et, par définition de l_1, $l_1(x^*) = l_1(x)^*$. D'où la relation

$$- l_1(x)^* \equiv l_1(x) \bmod A_{a(hd'e+1)},$$

dont on déduit (3).

On a de même $y - 1 \in A_{\ell d'e+1}$, $l_1(y) \in A_{\ell d'e+1}$, $l_2(y) \equiv l_1(y) \bmod A_{a(\ell d'e+1)}$. Considérons la relation (2). Posons $t = (a-1)\,hd'e + \ell d'e + a$. D'après les propriétés de P, on a $P(x-1, y-1) \in A_t$. D'après (3) et la relation analogue pour y, les termes de $CH_a(l_1(x), l_1(y))$ restent inchangés modulo A_t si l'on remplace $l_1(x)$ par $l_2(x)$ et $l_1(y)$ par $l_2(y)$, à l'exception du terme $l_1(x)$ de degré 1. On obtient donc

$$(4) \qquad l_1(xy) \equiv l_1(x) + CH_a(l_2(x), l_2(y)) - l_2(x) \bmod A_t.$$

Appliquons l'automorphisme $X \mapsto -X^*$ à cette relation. Comme c'est un automorphisme d'algèbres de Lie, on a $-CH_a(X, Y)^* = CH_a(-X^*, -Y^*)$ pour tous $X, Y \in \operatorname{End}_E(V)$. De plus $-l_2(x)^* = l_2(x)$, et de même pour $l_2(y)$. Enfin l'automorphisme conserve A_t. On obtient

$$- l_1(xy)^* \equiv - l_1(x)^* + CH_a(l_2(x), l_2(y)) - l_2(x) \bmod A_t,$$

puis, en sommant avec (4)

$$l_2(xy) \equiv CH_a(l_2(x), l_2(y)) \bmod A_t.$$

Si V est symplectique ou quadratique, on obtient directement

$$(5) \qquad l(xy) \equiv CH_a(l(x), l(y)) \bmod A_t.$$

Si V est hermitien, le même calcul qu'à la fin de la preuve de 3.5, joint à la relation (1) de 3.4 permet encore d'obtenir la relation (5). Notons que l'on a

$$(h(a-1) + \ell - m)\, e\, d' + a \geqslant 1.$$

En effet, si $h(a-1) + \ell - m$ est $\geqslant 0$, c'est clair. Sinon, comme $d' \leqslant d$, le membre de gauche est $\geqslant (h(a-1) + \ell - m)\, e d + a$, qui est $\geqslant a/2 \geqslant 1$ par hypothèse. Donc $t \geqslant m e d' + 1$ et $A_t \subset \mathfrak{p}^m A_1$. La conclusion de 3.14 (4) résulte alors de (5). □

3.9. Supposons maintenant que $\mathbf{G} \in \Gamma_4$ et $p \notin P(\mathbf{G})$. On utilise les notations et résultats de 2.10. En particulier, on identifie G à $(X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} E^\times)^\Delta$ et g à $(X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} E)^\Delta$. On fixe un entier $a \in \{2, \ldots, p\}$ et l'on définit une application $l^E : E \to E$ par

$$l^E(\mu) = \sum_{i=1}^{a-1} i^{-1}(-1)^{i+1}(\mu - 1)^i.$$

Fixons une base B du $\mathbf{Z}$-module $X_*(\mathbf{G})$. Pour $b \in B$, on définit $\mu_b : G \to E^*$ par l'égalité

$$x = \prod_{b \in B} b \otimes \mu_b(x)$$

pour tout $x \in G$. On définit une application $l : G \to g$ par l'égalité

$$l(x) = |\Delta|^{-1} \sum_{\sigma\in\Delta} \sum_{b\in B} \sigma(b) \otimes \sigma \circ l^{E} \circ \mu_b(x)$$

pour tout $x \in G$.

Lemme. — L'application l se restreint en un isomorphisme analytique de G_{tu} sur g_{tn}. L'inverse de ce dernier est une application exponentielle tronquée à l'ordre a.

Preuve. — Dans le cas où $\mathbf{G}$ est l'image du groupe multiplicatif par restriction des scalaires de E à F, l'application l^{E} elle-même vérifie ces propriétés. La démonstration est essentiellement la même que dans le cas $\mathbf{G} = SL_d$. On laisse les détails au lecteur. On note $e^{E} : \mathfrak{p}_E \to 1 + \mathfrak{p}_E$ l'isomorphisme inverse de $l^{E}|_{1+\mathfrak{p}_E}$.

Dans le cas général, il résulte des propriétés de l^{E} et du lemme 2.10 que $l(G_{tu}) \subset g_{tn}$. Soit $X \in g_{tn}$. On construit par récurrence une suite $(x_m)_{m\in\mathbf{N}}$ d'éléments de G_{tu}. On pose $x_0 = 1$. Soit $m \in \mathbf{N}$, supposons défini x_m, supposons que $x_m \in G_{tu}$ et que

$$X - l(x_m) \in (X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{p}_E^{m}).$$

Ecrivons

$$X - l(x_m) = \sum_{b\in B} b \otimes \lambda_b,$$

posons

$$x'_m = \prod_{\sigma\in\Delta} \prod_{b\in B} \sigma(b)\ (1 + |\Delta|^{-1} \sigma(\lambda_b))$$

et $x_{m+1} = x_m x'_m$. Evidemment $x'_m \in (X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} (1 + \mathfrak{p}_E^{m}))^{\Delta}$; *a fortiori* $x'_m \in G_{tu}$ et $x_{m+1} \in G_{tu}$. On a la relation

$$l(x_{m+1}) \equiv l(x_m) + l(x'_m) \bmod (X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{p}_E^{m+1}).$$

Pour tout $\sigma \in \Delta$, soit $(a_{bc}(\sigma))_{b,c\in B}$ la matrice exprimant dans la base B l'automorphisme de $X_*(\mathbf{G})$ défini par σ. Elle est à coefficients entiers. Pour $b \in B$, on calcule

$$\mu_b(x'_m) = \prod_{\sigma\in\Delta} \prod_{c\in B} (1 + |\Delta|^{-1} \sigma(\lambda_c))^{a_{bc}(\sigma)}.$$

Alors

$$l^{E} \circ \mu_b(x'_m) \equiv |\Delta|^{-1} \sum_{\sigma\in\Delta} \sum_{c\in B} a_{bc}(\sigma)\ \sigma(\lambda_c) \bmod \mathfrak{p}_E^{m+1},$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{b\in B} b \otimes l^{E} \circ \mu_b(x'_m) &\equiv |\Delta|^{-1} \sum_{\sigma\in\Delta} \sum_{b,c\in B} a_{bc}(\sigma)\ b \otimes \sigma(\lambda_c) \bmod X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{p}_E^{m+1},\\ &= |\Delta|^{-1} \sum_{\sigma\in\Delta} \sum_{c\in B} \sigma(c) \otimes \sigma(\lambda_c) \bmod X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{p}_E^{m+1},\\ &= |\Delta|^{-1} \sum_{\sigma\in\Delta} \sigma(X - l(x_m)) \bmod X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{p}_E^{m+1},\\ &= X - l(x_m) \bmod X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{p}_E^{m+1}\end{aligned}$$

puisque ce dernier est invariant par Δ. On obtient de même

$$l(x'_m) = X - l(x_m) \bmod X_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{p}_E^{m+1},$$

et finalement

$$l(x_{m+1}) \equiv \mathrm{X} \bmod (\mathrm{X}_*(\mathbf{G}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{m+1}).$$

Alors x_{m+1} vérifie l'hypothèse de récurrence.

La suite $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$ converge vers une limite que l'on note $e(\mathrm{X})$. Cela définit une application $e : g_{\mathrm{tn}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{tu}}$ dont on montre qu'elle est l'inverse de la restriction $l|_{\mathrm{G}_{\mathrm{tu}}}$. Cela démontre la première assertion du lemme. La propriété 3.1 (2) est vide car le groupe est commutatif. Les propriétés 3.1 (3) et 3.1 (4) se déduisent des propriétés analogues pour l'application l^{E}. □

3.10. *Proposition. — Soient* $\mathbf{G}$ *un élément de* Γ *et* a *un entier tel que* $2 \leqslant a \leqslant p$. *Supposons* $p \notin \mathrm{P}(\mathbf{G})$. *Alors il existe une exponentielle tronquée à l'ordre* a $e : g_{\mathrm{tn}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{tu}}$.

Preuve. — On se ramène comme en 3.3 aux cas traités en 3.6, 3.8 et 3.9. □

4. Un résultat sur les distributions invariantes

4.1. Pour tout espace topologique X totalement discontinu, on note $\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{X})$ l'espace des fonctions sur X à valeurs dans $\mathbf{C}$, localement constantes et à support compact. On abandonne l'indice c, resp. l'exposant ∞, si X est compact, resp. discret.

Soient $\mathbf{G}$ un élément de Γ, $\mathscr{B}$ son immeuble et $c \in \mathrm{C}(\mathscr{B})$. Notons $\mathrm{C}_c^\infty(g)^{*\mathrm{G}}$ l'espace des formes linéaires sur $\mathrm{C}_c^\infty(g)$ invariantes par l'action adjointe de G. Pour $h \in \mathbf{N}$, $h \geqslant 1$ et $\mathrm{D} \in \mathrm{C}_c^\infty(g)^*$, considérons la condition suivante :

$(*)_h$ si $s \in \mathrm{S}(c)$ et $f \in \mathrm{C}(\mathfrak{p}^{-h} k_s/b_c)$ sont tels que $\mathrm{D}(f) \neq 0$, alors il existe $s' \in \mathrm{S}(c)$, $x \in \mathrm{G}$ et $\mathrm{X} \in \mathfrak{p}^{1-h} k_{s'}$ tels que $f(\mathrm{Ad}(x)\,\mathrm{X}) \neq 0$.

Posons $\mathscr{D}_h = \{ \mathrm{D} \in \mathrm{C}_c^\infty(g)^{*\mathrm{G}};\ \mathrm{D} \text{ vérifie } (*)_h \}$,

et $\mathscr{D}_{\geqslant 1} = \bigcap_{h \geqslant 1} \mathscr{D}_h$.

Remarque. — Comme toutes les chambres sont dans la même orbite sous l'action de G, l'espace $\mathscr{D}_h$ est indépendant du choix de c. Il en est de même de l'espace $\mathscr{D}_{\geqslant 1}$.

4.2. *Proposition. — Supposons que* $p \notin \mathrm{P}(\mathbf{G})$ *et soit* $\mathrm{D} \in \mathscr{D}_{\geqslant 1}$. *Alors* D *annule* $\mathrm{C}_c(g/b_c)$ *si et seulement si* D *annule* $\sum_{s \in \mathrm{S}(c)} \mathrm{C}(k_s/b_c)$.

Cf. [W] théorème I.3. La preuve se fait par récurrence. On choisit un sommet particulier $s_0 \in \mathrm{S}(c)$. Dans le cas $\mathbf{G} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, il correspond à un réseau autodual. On montre que

(1) si D annule $\sum_{s \in \mathrm{S}(c)} \mathrm{C}(k_s/b_c)$, alors D annule $\mathrm{C}(\mathfrak{p}^{-1} k_{s_0}/b_c)$;

(2) soit $h \in \mathbf{N}$, $h \geqslant 1$; si D annule $\mathrm{C}(\mathfrak{p}^{-h} k_{s_0}/b_c)$, alors D annule $\mathrm{C}(\mathfrak{p}^{-h-1} k_{s_0}/b_c)$.

Les démonstrations utilisent la représentation naturelle de l'algèbre de Lie g et, quoique très techniques, relèvent de l'algèbre linéaire élémentaire.

4.3. Notons $\mathscr{D}_{\mathrm{nil}}$ le sous-espace de $C_c^\infty(g)^*$ engendré par $\{\Phi_n;\ n \in \mathcal{O}_{\mathrm{nil}}\}$, $\mathscr{D}_{\geqslant 1 | C_c(g/b_c)}$ et $\mathscr{D}_{\mathrm{nil} | C_c(g/b_c)}$ les sous-espaces de $C_c(g/b_c)^*$ formés des restrictions à $C_c(g/b_c)$ des éléments de $\mathscr{D}_{\geqslant 1}$, resp. $\mathscr{D}_{\mathrm{nil}}$.

Proposition. — Supposons que $p \notin \mathrm{P}(\mathbf{G})$. *Alors* $\mathscr{D}_{\geqslant 1 | C_c(g/b_c)} = \mathscr{D}_{\mathrm{nil} | C_c(g/b_c)}$.

Cf. [W] théorème I.3. L'idée de la preuve est la suivante. Comme on a évidemment

$$\mathscr{D}_{\mathrm{nil} | C_c(g/b_c)} \subset \mathscr{D}_{\geqslant 1 | C_c(g/b_c)},$$

il suffit de prouver l'égalité des dimensions de ces espaces. D'après 4.2, on peut remplacer $\mathscr{D}_{\geqslant 1 | C_c(g/b_c)}$ par $\mathscr{D}_{\geqslant 1 | C}$, où $C = \sum_{s \in S(c)} C(k_s/b_c)$. Par transformation de Fourier, C s'identifie à

$$\hat{C} = \sum_{s \in S(c)} C(n_c/k_s^u),$$

et l'on montre que $C_c^\infty(g)^{*^G}|_{\hat{C}}$ est de dimension $\leqslant |\mathcal{O}_{\mathrm{nil}}|$. Par exemple si $\mathbf{G} = \mathrm{GL}(n)$, fixons un sommet $s_0 \in S(c)$. Comme tous les sommets sont conjugués, on peut remplacer $\hat{C}$ par $C(n_c/k_{s_0}^u)$, *i.e.* par les fonctions sur le radical nilpotent d'une sous-algèbre de Borel de $\mathrm{GL}(n,f)$. Il est clair que $\dim(C_c^\infty(g)^{*^G}|_{\hat{C}})$ est alors borné par le nombre d'orbites nilpotentes dans $\mathrm{gl}(n,f)$. Celui-ci est le même que celui des orbites nilpotentes dans $\mathrm{gl}(n, \mathrm{F})$, qui n'est autre que $|\mathcal{O}_{\mathrm{nil}}|$.

5. Développement en germes d'intégrales orbitales

5.1. Soit $\mathbf{G}$ un élément de Γ. On adopte les notations de 1.1 et 2. Soient $\mathbf{T} \subset \mathbf{G}$ un sous-tore maximal défini sur F, $\mathbf{t}$ son algèbre de Lie et, comme toujours, $\mathrm{T} = \mathbf{T}(\mathrm{F})$, $t = \mathbf{t}(\mathrm{F})$. On note t_{reg} le sous-ensemble des éléments de t réguliers dans g. Fixons une mesure sur $\mathrm{T}\backslash\mathrm{G}$, invariante par translations à droite. Pour $\mathrm{X} \in t_{\mathrm{reg}}$, on définit $\Phi(\mathrm{X}, .) \in C_c^\infty(g)^*$ par

$$\Phi(\mathrm{X},f) = \int_{\mathrm{T}\backslash\mathrm{G}} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})\,\mathrm{X})\,dx$$

pour toute $f \in C_c^\infty(g)$. On sait qu'à toute $n \in \mathcal{O}_{\mathrm{nil}}$ est associé un germe $\mathbf{\Gamma}_n$ de fonctions sur t_{reg} de sorte que pour toute $f \in C_c^\infty(g)$, on ait l'égalité

$$\Phi(\mathrm{X},f) = \sum_{n \in \mathcal{O}_{\mathrm{nil}}} \mathbf{\Gamma}_n(\mathrm{X})\,\Phi_n(f) \tag{1}$$

pour tout X dans un voisinage de 0 dans t_{reg}. Pour $f \in C_c^\infty(g)$ et $\mu \in \mathrm{F}^\times$, notons f^μ la fonction définie par $f^\mu(\mathrm{X}) = f(\mu\mathrm{X})$. Pour $n \in \mathcal{O}_{\mathrm{nil}}$ et $\mu \in \mathrm{F}^\times$, on a $\mu n \in \mathcal{O}_{\mathrm{nil}}$ et il existe un nombre réel positif $\gamma(n, \mu)$ dépendant des mesures tel que

$$\Phi_n(f^\mu) = \gamma(n, \mu)\,\Phi_{\mu n}(f)$$

pour toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$. En particulier si $\mu \in F^\times$, on a $\mu^2 n = n$ pour tout n. Il est bien connu que l'on a l'égalité $\gamma(n, \mu^2) = |\mu|_F^{-\dim(n)}$ pour tout n, et plus généralement

$$\gamma(n, \lambda\mu^2) = |\mu|_F^{-\dim(n)} \gamma(n, \lambda)$$

pour tous n, λ.

Remarque. — On en déduit que l'on peut normaliser les mesures sur les orbites nilpotentes de sorte que $\gamma(n, \mu) = |\mu|_F^{-\dim(n)/2}$ pour tous n, μ.

On déduit de (1) et de ce qui précède l'égalité

$$\mathbf{\Gamma}_{\mu n}(\mu X) = \gamma(n, \mu)\, \mathbf{\Gamma}_n(X)$$

pour tous $n \in \mathcal{O}_{\text{nil}}$, $\mu \in F^\times$ et X dans un voisinage de 0. Il existe alors pour tout $n \in \mathcal{O}_{\text{nil}}$ une unique fonction Γ_n sur $\mathfrak{t}_{\text{reg}}$ telle que le germe de Γ_n soit $\mathbf{\Gamma}_n$ et telle que l'on ait encore la relation

$$\Gamma_{\mu n}(\mu X) = \gamma(n, \mu)\, \mathbf{\Gamma}_n(X)$$

pour tous $n \in \mathcal{O}_{\text{nil}}$, $\mu \in F^\times$ et $X \in \mathfrak{t}_{\text{reg}}$.

5.2. En appliquant à $\mathbf{T}$ les définitions de 2.4, on définit les réseaux $\mathfrak{t}_{\text{ent}}$ et $\mathfrak{t}_{\text{tn}}$ de $\mathfrak{t}$.

Lemme. — Supposons $p \notin P(\mathbf{G})$. On a les égalités $\mathfrak{t}_{\text{ent}} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\text{ent}}$, $\mathfrak{t}_{\text{tn}} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\text{tn}}$.

Preuve. — Introduisons les données $(\mathbf{G}_i)_{i \in I}$ et φ associées à $\mathbf{G}$, cf. 2.1. Soit $\mathbf{T}'$ la composante neutre de $\varphi^{-1}(\mathbf{T})$. Alors $\mathbf{T}'$ est un sous-tore maximal de $\prod_{i \in I} \mathbf{G}_i$ défini sur F. Le lemme 2.5 appliqué aux morphismes φ et $\varphi|_{\mathbf{T}'}$ nous ramène au cas où $\mathbf{G} = \prod_{i \in I} \mathbf{G}_i$. Ce dernier se ramène au cas où $\mathbf{G} \in \Gamma_0$. Si $\mathbf{G}$ est un tore, $\mathbf{T} = \mathbf{G}$ et le lemme est trivial. Le lemme 2.5 ramène le cas du groupe Spin(V) au cas de SO(V). On peut donc supposer que $\mathbf{G}$ est l'un des groupes considérés en 2.8 ou 2.9. Montrons que l'on a alors :

(1) les assertions du lemme 2.10 sont valides pour $\mathbf{T}$.

Supposons $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_d$. Pour toute extension séparable F′ de F, notons $\mathbf{T}_{F'}$ l'image du groupe multiplicatif par restriction des scalaires de F′ à F. La norme de F′/F et l'injection naturelle de F dans F′ définissent des morphismes de $\mathbf{T}_{F'} \to \mathbf{T}_F$ et de $\mathbf{T}_F \to \mathbf{T}_{F'}$. Il existe des extensions séparables $F'_1, \ldots, F'_n$ de F telles que $\sum_{i=1}^{n} [F'_i : F] = d$ et, si l'on note $\mathbf{T}' = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{T}_{F'_i}$ et $N : \mathbf{T}' \to \mathbf{T}_F$ le produit des normes, on ait $\mathbf{T} = \ker N$. Notons $j : \mathbf{T}_F \to \mathbf{T}'$ le produit des injections naturelles et

$$\pi : \mathbf{T}' \to \mathbf{T}'$$
$$t \mapsto t^d j \circ N(t)^{-1}.$$

On a $\pi(\mathbf{T}') \subset \mathbf{T}$. Notons $i : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ l'injection naturelle. Alors $\pi \circ i(t) = t^d$ pour tout $t \in \mathrm{T}$. Comme d est premier à p, le même raisonnement qu'à la fin de la preuve de 2.10 ramène le cas du tore $\mathbf{T}$ à celui de $\mathbf{T}'$. Mais les assertions sont connues pour $\mathbf{T}'$ car $\mathbf{T}'$ est produit de tores induits.

Si $\mathbf{G}$ est symplectique ou spécial orthogonal, $\mathbf{T}$ est produit de tores induits et de tores de la forme suivante. On considère une extension séparable F′ de F, une extension quadratique E′ de F′ et le morphisme norme $\mathrm{N} : \mathbf{T}_{\mathrm{E}'} \to \mathbf{T}_{\mathrm{F}'}$. Alors $\mathbf{T} = \ker \mathrm{N}$. On note $j : \mathbf{T}_{\mathrm{F}'} \to \mathbf{T}_{\mathrm{E}'}$ l'injection naturelle, $\pi : \mathbf{T}_{\mathrm{E}'} \to \mathbf{T}_{\mathrm{E}'}$ le morphisme défini par $\pi(t) = t^2 j \circ \mathrm{N}(t)^{-1}$. Alors $\pi(\mathbf{T}_{\mathrm{E}'}) \subset \mathbf{T}$. Notons $i : \mathbf{T} \to \mathbf{T}_{\mathrm{E}'}$ l'injection naturelle. Alors $\pi \circ i(t) = t^2$ pour tout $t \in \mathrm{T}$. Comme $p \neq 2$, on ramène encore le cas du tore $\mathbf{T}$ à celui de $\mathbf{T}_{\mathrm{E}'}$ qui est connu.

On note $\mathbf{T}_{\mathrm{E}'/\mathrm{F}'}$ le tore construit ci-dessus.

Si $\mathbf{G}$ est unitaire comme en 2.9, il existe des extensions séparables $\mathrm{E}'_1, \ldots, \mathrm{E}'_n$ de E et des extensions séparables $\mathrm{F}'_1, \ldots, \mathrm{F}'_m$ de F disjointes de E telles que, si l'on note $\mathbf{T}' = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{T}_{\mathrm{E}'_i} . \prod_{j=1}^{m} \mathbf{T}_{\mathrm{EF}'_j/\mathrm{F}'_j}$ et $\mathrm{N} : \mathbf{T}' \to \mathbf{T}_{\mathrm{E}/\mathrm{F}}$ l'application définie ci-dessous, on ait $\mathbf{T} = \ker \mathrm{N}$. L'application N est produit des applications

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}_{\mathrm{E}_i} \to \mathbf{T}_{\mathrm{E}/\mathrm{F}} \\ &\quad t \mapsto \mathrm{Norm}_{\mathrm{E}'_i/\mathrm{E}}(t)\ \sigma(\mathrm{Norm}_{\mathrm{E}'_i/\mathrm{E}}(t))^{-1} \end{aligned}$$

où σ est l'élément non trivial de Gal(E/F), et des applications

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}_{\mathrm{EF}'_j/\mathrm{F}_j} \to \mathbf{T}_{\mathrm{E}/\mathrm{F}} \\ &\quad t \mapsto \mathrm{Norm}_{\mathrm{EF}'_j/\mathrm{E}}(t). \end{aligned}$$

Notons $j : \mathbf{T}_{\mathrm{E}/\mathrm{F}} \to \mathbf{T}'$ le produit des injections naturelles et

$$\begin{aligned} &\pi : \mathbf{T}' \to \mathbf{T}' \\ &\quad t \mapsto t^d j \circ \mathrm{N}(t)^{-1}. \end{aligned}$$

On a $\pi(\mathbf{T}') \subset \mathbf{T}$. Notons $i : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ l'injection naturelle. Alors $\pi \circ i(t) = t^d$ pour tout $t \in \mathbf{T}$. Comme d est premier à p, on ramène ainsi le cas du tore $\mathbf{T}$ à celui de $\mathbf{T}'$ qui est produit de tores déjà traités.

Cela démontre (1).

Considérons la représentation de $\mathbf{T}$ dans V (où V est l'espace considéré en 2.8 ou 2.9, vu comme espace sur F) obtenue par composition des injections $\mathbf{T} \to \mathbf{G}$ et $\mathbf{G} \to \mathrm{GL}_{\mathrm{F}}(\mathrm{V})$. Soient $\chi_1, \ldots, \chi_{d'}$ les caractères de $\mathbf{T}$ (définis sur une extension séparable de F) qui interviennent dans cette représentation, où $d' = d$ dans les cas linéaires symplectique et orthogonal, $d' = 2d$ dans le cas unitaire. Comme la représentation est fidèle, ces caractères engendrent $\mathrm{X}^*(\mathbf{T})$. Considérons la représentation $\rho : t \to \mathrm{End}_{\mathrm{F}}(\mathrm{V})$

déduite de la représentation précédente. Identifions t à $(X^*(\mathbf{T}) \otimes_Z E)^\Delta$ où l'on note ici E l'extension qui déploie $\mathbf{T}$. Tout élément $\chi \in X^*(\mathbf{T})$ définit une application encore notée $\chi : t \to E$. Pour $X \in t$, les valeurs propres de $\rho(X)$ sont les $\chi_i(X)$ pour $i \in \{1, \ldots, d'\}$. Il résulte de 2.8 et 2.9 que $X \in t \cap g_{\text{ent}}$, resp. $X \in t \cap g_{\text{tn}}$, si et seulement si $\chi_i(X) \in \mathfrak{o}_E$, resp. $\mathfrak{p}_E$, pour tout $i \in \{1, \ldots, d'\}$. Comme les χ_i engendrent $X^*(\mathbf{T})$, c'est équivalent à $X \in (X_*(\mathbf{T}) \otimes_Z \mathfrak{o}_E)$, resp. $X \in (X_*(\mathbf{T}) \otimes_Z \mathfrak{p}_E)$. Il reste à appliquer (1). □

5.3. *Proposition. — Supposons $p \notin P(\mathbf{G})$. Soient $c \in C(\mathscr{B})$, $f \in C_c(g/b_c)$ et $X \in t_{\text{ent}} \cap t_{\text{reg}}$. Alors on a l'égalité*

$$\Phi(X,f) = \sum_{n \in \mathcal{O}_{\text{nil}}} \Gamma_n(X)\, \Phi_n(f).$$

Preuve. — Comme $X \in t_{\text{ent}} \cap t_{\text{reg}}$, la distribution $\Phi(X, .)$ appartient à $\mathscr{D}_{\geqslant 1}$. D'après 4.3, il existe donc pour tout $n \in \mathcal{O}_{\text{nil}}$ une fonction Γ'_n sur $t_{\text{ent}} \cap t_{\text{reg}}$ de sorte que l'on ait l'égalité

$$\Phi(X,f) = \sum_{n \in \mathcal{O}_{\text{nil}}} \Gamma'_n(X)\, \Phi_n(f) \tag{2}$$

pour tout $X \in t_{\text{ent}} \cap t_{\text{reg}}$ et toute $f \in C_c(g/b_c)$. Les éléments de l'ensemble $\{\Phi_{n\,|\,C_c(g/b_c)}\,;\, n \in \mathcal{O}_{\text{nil}}\}$ sont linéairement indépendants, cf. [W] 2.6.2. Fixons $n \in \mathcal{O}_{\text{nil}}$ et $f \in C_c(g/b_c)$ telle que $\Phi_{n'}(f) = \delta_{n,n'}$ pour tout $n' \in \mathcal{O}_{\text{nil}}$. Alors $\Gamma'_n(X) = \Phi(X,f)$ pour tout $X \in t_{\text{ent}} \cap t_{\text{reg}}$. En comparant avec l'égalité (1) de 5.1, on obtient que le germe de Γ'_n au voisinage de 0 est Γ_n. Soit $\mu \in \mathfrak{o}$, $\mu \neq 0$. Alors $f^{\mu^2} \in C_c(g/b_c)$ et $\mu^2 X \in t_{\text{ent}} \cap t_{\text{reg}}$. De plus $\Phi(X,f^{\mu^2}) = \Phi(\mu^2 X,f)$. En appliquant (2) aux couples (X,f^{μ^2}) et $(\mu^2 X,f)$, on obtient l'égalité

$$\Gamma'_n(\mu^2 X) = |\mu|_F^{-\dim(n)}\, \Gamma'_n(X).$$

Mais alors $\Gamma'_n = \Gamma_n$. □

5.4. Conservons les mêmes hypothèses. Notons $\bar{F}$ la clôture algébrique de F; $\mathscr{A}(T)$ l'ensemble des $x \in \mathbf{G}(\bar{F})$ tels que $x^{-1}\mathbf{T}x$ soit défini sur F ainsi que l'isomorphisme $y \mapsto x^{-1}yx$ de $\mathbf{T}$ sur $x^{-1}\mathbf{T}x$; $\theta(T)$ le quotient $\mathbf{T}(\bar{F})\backslash\mathscr{A}(T)/G$. Pour $x \in \mathscr{A}(T)$, on note $\mathbf{T}^x = x^{-1}\mathbf{T}x$. La conjugaison par x permet de déduire une mesure sur $T^x\backslash G$ de notre mesure sur $T\backslash G$. Pour $X \in t_{\text{reg}}$, on définit $\Phi(\mathrm{Ad}(x^{-1})X, .) \in C_c^\infty(g)^*$ par

$$\Phi(\mathrm{Ad}(x^{-1})X,f) = \int_{T^x\backslash G} f(\mathrm{Ad}(y^{-1}x^{-1})X)\,dy$$

pour toute $f \in C_c^\infty(g)$. Elle ne dépend que de l'image de x dans $\theta(T)$. Soit alors κ une fonction sur $\theta(T)$ à valeurs complexes. Pour $X \in t_{\text{reg}}$, on pose

$$\Phi^\kappa(X, .) = \sum_{x \in \theta(T)} \kappa(x)\, \Phi(\mathrm{Ad}(x^{-1})X, .).$$

Pour $n \in \mathcal{O}_{\text{nil}}$ et $X \in t_{\text{reg}}$, on pose

$$\Gamma_n^\kappa(X) = \sum_{x \in \theta(T)} \kappa(x) \, \Gamma_n(\mathrm{Ad}(x^{-1}) \, X)$$

(avec l'abus de notation suivant : dans la somme ci-dessus Γ_n désigne la fonction sur t_{reg}^x associée à n).

Proposition. — Supposons $p \notin P(\mathbf{G})$. *Soient* $c \in C(\mathscr{B})$, $f \in C_c(g/b_c)$ *et* $X \in t_{\text{ent}} \cap t_{\text{reg}}$. *Alors on a l'égalité*

$$\Phi^\kappa(X, f) = \sum_{n \in \mathcal{O}_{\text{nil}}} \Gamma_n^\kappa(X) \, \Phi_n(f).$$

Preuve. — Pour déduire ce résultat du précédent, il suffit de prouver que, pour tout $x \in \mathscr{A}(T)$, on a $\mathrm{Ad}(x^{-1}) \, X \in t_{\text{ent}}^x$. Grâce à 5.2, il suffit de prouver que, si $Y \in g_{\text{ent}}$, $x \in \mathbf{G}(\bar{F})$ sont tels que $\mathrm{Ad}(x) \, Y \in g$, alors $\mathrm{Ad}(x) \, Y \in g_{\text{ent}}$. Le lemme 2.5 nous ramène au cas où $\mathbf{G}$ est produit d'éléments de Γ_0, lequel se ramène au cas $\mathbf{G} \in \Gamma_0$. Le cas d'un tore est trivial. Le cas d'un groupe Spin(V) se ramène à celui de SO(V) par 2.5. Dans le cas de l'un des groupes considérés en 2.8 ou 2.9, la propriété résulte de la caractérisation de g_{ent} démontrée dans ces paragraphes : le polynôme caractéristique est invariant par conjugaison géométrique. □

5.5. Conservons les mêmes hypothèses. On note T_{reg} l'ensemble des éléments réguliers de T. Pour $\gamma \in T_{\text{reg}}$, on définit des distributions $\Phi(\gamma, .)$ et $\Phi^\kappa(\gamma, .) \in C_c(G)^*$ par des formules analogues à celles des paragraphes précédents. Pour $s \in S(\mathscr{B})$, notons 1_{K_s}, resp. 1_{k_s}, les fonctions caractéristiques de K_s dans G, resp. k_s dans g.

Proposition. — Supposons $p \notin P(\mathbf{G})$ *et supposons donnée une application exponentielle* $e : g_{\text{tn}} \to G_{\text{tu}}$ *tronquée à l'ordre 2. Alors pour tout* $s \in S(\mathscr{B})$ *et tout* $X \in t_{\text{reg}} \cap g_{\text{tn}}$, *on a l'égalité*

$$\Phi^\kappa(e(X), 1_{K_s}) = \sum_{n \in \mathcal{O}_{\text{nil}}} \Gamma_n^\kappa(X) \, \Phi_n(1_{k_s}).$$

Remarque. — Si $X \in t_{\text{reg}}$, on a $e(X) \in T_{\text{reg}}$ car le commutant de $e(X)$ est le même que celui de X d'après 3.1 (2) et est donc égal à T.

Preuve. — Il résulte de la définition des exponentielles tronquées que

$$\Phi^\kappa(e(X), 1_{K_s}) = \Phi^\kappa(X, 1_{k_s}).$$

Il reste à appliquer la proposition précédente. □

6. Développement en germes de caractères

6.1. Soit $\mathbf{G}$ un élément de Γ. On adopte les notations de 1.1 et 2. On fixe un caractère $\psi : F \to \mathbf{C}^\times$ et l'on définit une transformation de Fourier dans $C_c^\infty(g)$ comme en 1.3.

Soit π une représentation admissible irréductible de G dans un espace V. Notons $\Theta_\pi \in C_c(G)^*$ son caractère. Ce chapitre est consacré à la preuve de la proposition suivante.

Proposition. — *Soient* $a \in \{2, \ldots, p\}$, $h \in \mathbf{N}$. *On suppose donnée une application exponentielle* $e : g_{\mathrm{tn}} \to G_{\mathrm{tu}}$, *tronquée à l'ordre a. On suppose de plus que*

(i) $p \notin P(\mathbf{G})$,

(ii) $(h(a-1) - d(\mathbf{G}) - 1)\, d(\mathbf{G})\, e(\mathbf{G}) + \frac{a}{2} \geqslant \sup(0, d(\mathbf{G})\, e(\mathbf{G})\, (d(\mathbf{G}) - h))$,

(iii) *il existe* $s \in S(\mathscr{B})$ *tel que l'espace des invariants* $V^{K_s^{u,h}}$ *soit non nul.*

Alors il existe une famille $(c_n)_{n \in \mathcal{O}_{\mathrm{nil}}}$ *de nombres complexes telle que, pour toute* $f \in C_c^\infty(g)$ *à support dans* $\mathfrak{p}^h g_{\mathrm{tn}}$, *on ait l'égalité*

$$\Theta_\pi(f \circ e^{-1}) = \sum_{n \in \mathcal{O}_{\mathrm{nil}}} c_n \Phi_n(\hat{f}),$$

où l'on note $f \circ e^{-1}$ *la fonction sur* G *nulle hors de* G_{tu} *et égale à* $f \circ e^{-1}$ *dans* G_{tu}.

Remarques. — (1) Pour $h = 0$, la condition (ii) est vérifiée si $a \geqslant a(\mathbf{G})$, où

$$a(\mathbf{G}) = 2d(\mathbf{G})\, e(\mathbf{G})\, (2d(\mathbf{G}) + 1).$$

Si $p \geqslant a(\mathbf{G})$, on peut appliquer la proposition pour une exponentielle tronquée à l'ordre a avec $a(\mathbf{G}) \leqslant a \leqslant p$.

(2) Si h est assez grand, l'hypothèse (iii) est vérifiée et (ii) l'est pour tout a, par exemple $a = 2$. On obtient le développement de Θ_π au voisinage de l'élément neutre en supposant que $p \notin P(\mathbf{G})$.

6.2. Fixons donc des entiers a et h, une représentation π et une application e vérifiant les hypothèses de la proposition. Notons que la conclusion de cette proposition est indépendante du choix de la transformation de Fourier. Normalisons cette dernière de la façon suivante. On suppose que ψ est de conducteur $\mathfrak{p}$. Pour tout réseau R de g, notons $\hat{R} = \{X \in g ; \forall\, Y \in R,\ B(X, Y) \in \mathfrak{p}\}$. Si $\mathbf{G}$ appartient à Γ_1 ou Γ_2, resp. Γ_3, on choisit pour B la restriction à g de la forme sur $\mathrm{End}_F(V)$, resp. $\mathrm{End}_E(V)$, définie par

$$B(X, Y) = \text{trace}\, XY, \text{ resp. } \text{trace}_{E/F}(\text{trace}\, XY).$$

On vérifie que

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{pour tout } s \in S(\mathscr{B}),\ \hat{k}_s = k_s^u, \\ \text{pour tout } c \in C(\mathscr{B}),\ \hat{b}_c = n_c. \end{cases}$$

Si $\mathbf{G} \in \Gamma_4$, on choisit B de sorte que pour l'unique $s \in S(\mathscr{B})$, on ait $\hat{k}_s = k_s^u$ (on a donc aussi $\hat{b}_c = n_c$ pour l'unique $c \in C(\mathscr{B})$). Dans le cas général, on introduit les groupes $(\mathbf{G}_i)_{i \in \{1, \ldots, n\}}$ et le morphisme $\varphi : \prod_{i=}^{n} \mathbf{G}_i \to \mathbf{G}$ qui font partie des données d'un élément de Γ. On définit B sur chaque g_i comme ci-dessus, puis par produit sur $\prod_{i=1}^{n} g_i$. On transporte cette dernière à g par l'isomorphisme $d\varphi$. Les relations (1) restent vérifiées.

Pour $f \in C_c^\infty(g)$, on définit une fonction $f^! \in C_c^\infty(g)$ par

$$f^!(X) = \hat{f}(\varpi^{-h} X)$$

et une fonction $\tilde{f}$ sur G par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin G_{tu}, \\ f^!(X), & \text{si } x = e(X) \text{ avec } X \in g_{tn}. \end{cases}$$

Comme g_{tn} est fermé dans g et que e est un isomorphisme analytique de g_{tn} sur G_{tu}, $\tilde{f}$ appartient à $C_c^\infty(G)$. On définit $D \in C_c(g)^*$ par $D(f) = \Theta_\pi(\tilde{f})$. Il est clair que $D \in C_c^\infty(g)^{*G}$. On montrera en 6.7 que $D \in \mathscr{D}_{\geqslant 1}$. Admettons ce résultat. Fixons une chambre $c_0 \in C(\mathscr{B})$. D'après 4.3, il existe une famille $(c'_n)_{n \in \mathcal{O}_{nil}}$ de nombres complexes telle que les restrictions à $C_c(g/b_{c_0})$ de D et de

$$\sum_{n \in \mathcal{O}_{nil}} c'_n \Phi_n$$

soient égales. Comme il s'agit de distributions invariantes, il en est de même de leurs restrictions à $C_c(g/b_c)$ pour n'importe quelle chambre c. Soient alors $f \in C_c^\infty(g)$ à support dans $\mathfrak{p}^h g_{tn}$. Comme

$$\mathrm{Supp}(f) \subset \bigcup_{c \in C(\mathscr{B})} \mathfrak{p}^h n_c,$$

on peut effectuer une partition de l'unité et écrire $f = \sum_{c \in C(\mathscr{B})} f_c$, où la famille (f_c) est presque nulle et pour tout c, $\mathrm{Supp}(f_c) \subset \mathfrak{p}^h n_c$. Pour $\varphi \in C_c^\infty(g)$, notons $\varphi^{-!} \in C_c^\infty(g)$ la fonction définie par

$$\varphi^{-!}(X) = \hat{\varphi}(-\varpi^{-h} X) \, |\varpi|_F^{-h \dim g}.$$

Alors pour tout c, $f_c^{-!} \in C_c(g/b_c)$. D'où

$$D(f^{-!}) = \sum_{n \in \mathcal{O}_{nil}} c'_n \Phi_n(f^{-!}).$$

Or $(f^{-!})^! = f$, donc $(f^{-!})^\sim$ n'est autre que $f \circ e^{-1}$ et $D(f^{-!}) = \Theta_\pi(f \circ e^{-1})$. Pour $n \in \mathcal{O}_{nil}$, on a $\Phi_n(f^{-!}) = \gamma(n, -\varpi^{-h}) \, |\varpi|_F^{-h \dim g} \Phi_{-\varpi^{-h} n}(\hat{f})$ avec les notations de 5.1. Il suffit de poser $c_n = \gamma(-\varpi^h n, \varpi^{-h}) \, |\varpi|_F^{-h \dim g} c'_{-\varpi^h n}$ pour obtenir la formule de la proposition. □

6.3. Sous les hypothèses de la proposition, fixons $c \in C(\mathscr{B})$. Pour $s \in S(c)$, remarquons que $V^{K_s^{u,h}}$ est stable par l'action de U_c^h car $K_s^{u,h}$ est distingué dans U_c^h. On note $\pi[c, s, h]$ la représentation ainsi définie de U_c^h dans $V^{K_s^{u,h}}$. Donnons-nous maintenant deux représentations (π_1, V_1) et (π_2, V_2) de G. Fixons a, h et une application e. Supposons les hypothèses de 6.1 vérifiées pour π_1 comme pour π_2. On note $(c_n(\pi_i))$, $n \in \mathcal{O}_{\text{nil}}$, la famille définie par la proposition pour la représentation π_i, pour $i = 1, 2$.

Corollaire. — Sous ces hypothèses, fixons $c \in \mathrm{C}(\mathscr{B})$ et supposons que, pour tout $s \in \mathrm{S}(c)$, les représentations $\pi_1[c, s, h]$ et $\pi_2[c, s, h]$ soient isomorphes. Alors $c_n(\pi_1) = c_n(\pi_2)$ pour tout $n \in \mathcal{O}_{\text{nil}}$.

Preuve. — Notons D_1 et D_2 les distributions définies au paragraphe précédent relatives à π_1 et π_2. Pour $i \in \{1, 2\}$, il résulte de la construction de la famille $(c_n(\pi_i))$, $n \in \mathcal{O}_{\text{nil}}$, et de la proposition 4.2 que cette famille est déterminée par la restriction de D à $\sum_{s \in \mathrm{S}(c)} \mathrm{C}(k_s/b_c)$. Mais si $s \in \mathrm{S}(c)$ et $f \in \mathrm{C}(k_s/b_c)$, $\widetilde{f}$ est à support dans U_c^h et est invariante par $\mathrm{K}_s^{u,h}$. Donc

$$\Theta_{\pi_i}(\widetilde{f}) = \Theta_{\pi_i[c,s,h]}(\widetilde{f}).$$

On déduit alors des hypothèses du corollaire que les restrictions à $\sum_{s \in \mathrm{S}(c)} \mathrm{C}(k_s/b_c)$ de D_1 et D_2 sont égales. D'où la conclusion. □

6.4. On aura besoin du lemme suivant. Dans ce lemme, m désigne une algèbre de Lie sur $\mathbf{Z}_p$, finie, M un groupe fini, $e : m \to \mathrm{M}$ une bijection. Le groupe M agit sur lui-même par conjugaison. Via e, il agit aussi sur m par une action que l'on note Ad. On note m^{D} le groupe des homomorphismes de m dans le groupe T des nombres complexes de module 1. Le groupe M agit encore dans m^{D} par une action que l'on note encore Ad. On pose $m_1 = m$ et on définit m_i pour $i > 1$ par la relation de récurrence : m_i est le sous-$\mathbf{Z}_p$-module de m engendré par les termes $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ pour $\mathrm{X} \in m$ et $\mathrm{Y} \in m_{i-1}$. Cet ensemble m_i est un idéal de m.

Lemme. — Soient $a \in \{2, \ldots, p\}$, m une algèbre de Lie sur $\mathbf{Z}_p$, M un groupe fini, $e : m \to \mathrm{M}$ une bijection. On suppose que

(i) $m_a = 0$,

(ii) *pour tous $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in m$, on a l'égalité $e(\mathrm{X})\, e(\mathrm{Y}) = e(\mathrm{CH}_a(\mathrm{X}, \mathrm{Y}))$. Alors il existe une bijection $\gamma \mapsto \sigma_\gamma$ de l'ensemble des M-orbites dans m^{D} sur l'ensemble des représentations irréductibles de M de sorte que, pour toute M-orbite γ et tout $\mathrm{X} \in m$, on ait l'égalité*

$$\operatorname{trace} \sigma_\gamma(e(\mathrm{X})) = |\gamma|^{-1/2} \sum_{\varphi \in \gamma} \varphi(\mathrm{X}).$$

Ce lemme est dû à R. Howe. Il résulte de [Ho]. Comme il n'est pas énoncé sous cette forme dans [Ho], nous allons en reprendre la démonstration.

Preuve. — On fixe donc a, m, M et e vérifiant les conditions de l'énoncé.

Remarques. — (1) Il résulte de (ii) que, pour tous $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in m$, on a

$$\mathrm{Ad}(e(\mathrm{X}))\, \mathrm{Y} = \sum_{i=0}^{a-2} (i!)^{-1}\, \mathrm{ad}^i(\mathrm{X})\, \mathrm{Y}.$$

(2) Il résulte de la remarque précédente et de (i) que, pour tout $X \in m$, l'élément $\mathrm{Ad}(e(X)) - 1$ de $\mathrm{End}_{Z_p}(m)$ s'écrit $\mathrm{ad}(X)\,\tau(X)$ où $\tau(X) \in \mathrm{Aut}_{Z_p}(m)$.

(3) Il résulte de (ii) que si $m' \subset m$ est une sous-$\mathbf{Z}_p$-algèbre de Lie de m, alors $M' = e(m')$ est un sous-groupe de M.

A $\varphi \in m^{\mathrm{D}}$, on associe

$$R_\varphi = \{ x \in M; \mathrm{Ad}(x)\,\varphi = \varphi \}, \qquad r_\varphi = \{ X \in m; \forall\, Y \in m, \varphi([X, Y]) = 1 \}$$

et la forme bilinéaire f_φ sur m définie par

$$f_\varphi(X, Y) = \varphi([X, Y]).$$

Cette forme se quotiente en une forme bilinéaire antisymétrique et non dégénérée sur m/r_φ.

Remarques. — (4) On a $R_\varphi = e(r_\varphi)$. En effet, pour $X \in m$, on a $\mathrm{Ad}(e(X))\,\varphi = \varphi$ si et seulement si $\varphi(\mathrm{Ad}(e(-X))\,Y - Y) = 1$ pour tout $Y \in m$, ou encore

$$\varphi(\mathrm{ad}(X)\,(-\tau(-X)\,Y)) = 1$$

pour tout $Y \in m$. Comme $Y \mapsto -\tau(-X)\,Y$ est une bijection de m sur elle-même, la condition est équivalente à $X \in r_\varphi$. Notons que r_φ est une sous-algèbre de m.

(5) Supposons $r_\varphi = m$. Alors la fonction φ_M définie sur M par $\varphi_M(e(X)) = \varphi(X)$ pour tout $X \in m$ est un caractère de M. Cela résulte de (ii).

6.5. *Lemme.* — *Soit $\varphi \in m^{\mathrm{D}}$. Alors il existe une sous-$\mathbf{Z}_p$-algèbre s de m telle que*

(i) $s \supset r_\varphi$,
(ii) $[m : s] = [s : r_\varphi]$,
(iii) $f_{\varphi | s \times s} = 1$.

Preuve. — Notons i_φ le plus grand idéal contenu dans $\ker(\varphi)$. On raisonne par récurrence sur $[m : i_\varphi]$. Si ce nombre est 1, le résultat est évident. Supposons $i_\varphi \neq m$. Si m/i_φ est abélien, on a $r_\varphi = m$ et le résultat est encore évident. Supposons m/i_φ non abélien, posons

$$z_1 = \{ X \in m; \forall\, Y \in m, [X, Y] \in i_\varphi \}, \qquad z_2 = \{ X \in m; \forall\, Y \in m, [X, Y] \in z_1 \}.$$

Ce sont des idéaux de m, on a $i_\varphi \subset z_1 \subset z_2$. Comme m/i_φ n'est pas abélien, $z_1 \neq m$. Comme m est nilpotente, on a $i_\varphi \neq z_1 \neq z_2$. Fixons $Z \in z_2 - z_1$ tel que $pZ \in z_1$, posons

$$m' = \{ X \in m; [X, Z] \in i_\varphi \}.$$

C'est une sous-algèbre de m et l'on a $m' \neq m$ puisque $Z \notin z_1$. Notons $\varphi' \in m'^{\mathrm{D}}$ la restriction de φ à m'. Evidemment $i_{\varphi'} \supset i_\varphi$ et l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Soit donc s' une sous-$\mathbf{Z}_p$-algèbre de m' satisfaisant les conditions (i), (ii) et (iii) relatives à m' et φ'.

Notons que $\ker(\varphi) \cap z_1 = i_\varphi$. En effet, si $X \in \ker(\varphi) \cap z_1$, $Z_p X + i_\varphi$ est un idéal de m contenu dans $\ker(\varphi)$, donc égal à i_φ. On en déduit

(1) $\qquad r_\varphi \subset m'.$

En effet, si $X \in r_\varphi$, on a $[X, Z] \in z_1$, car $Z \in z_2$ et $[X, Z] \in \ker(\varphi)$ car $X \in r_\varphi$.

(2) $\qquad [m : m'] = p.$

En effet l'application

$$\begin{aligned} m &\to \mathbf{T} \\ X &\mapsto \varphi([X, Z]) \end{aligned}$$

a m' pour noyau et prend ses valeurs dans les racines p-ièmes de l'unité puisque $pZ \in z_1$. On a donc $[m : m'] = 1$ ou p. Mais on sait que $m' \neq m$.

Il résulte de (1) que $r_\varphi \subset r_{\varphi'}$. Montrons que

(3) $\qquad [r_{\varphi'} : r_\varphi] = p.$

Fixons $Z' \in m - m'$. L'application

$$\begin{aligned} r_{\varphi'} &\to \mathbf{T} \\ X &\mapsto \varphi([X, Z']) \end{aligned}$$

a r_φ pour noyau et prend ses valeurs dans les racines p-ièmes de l'unité puisque $pZ' \in m'$. On a donc $[r_{\varphi'} : r_\varphi] = 1$ ou p. Mais $Z \in r_{\varphi'}$ et $Z \notin r_\varphi$ d'après la preuve de (2).

Il résulte de (1), (2) et (3) que s' satisfait aux conditions de l'énoncé. $\square$

6.6. Soit $\varphi \in m^D$. Introduisons une sous-algèbre s de m satisfaisant aux conditions du lemme précédent. Posons $S = e(s)$. C'est un sous-groupe de M. Définissons une fonction φ_S sur S par $\varphi_S(e(X)) = \varphi(X)$. D'après 6.4, remarque (5), appliquée au groupe S, φ_S est un caractère de S. On note σ_φ la représentation de M induite par ce caractère de S. On a la formule bien connue

$$\operatorname{trace} \sigma_\varphi(x) = \sum_{y \in M/S,\, y^{-1}xy \in S} \varphi_S(y^{-1} xy)$$

pour tout $x \in M$, *i.e.*

(1) $$\operatorname{trace} \sigma_\varphi(x) = \sum_{y \in M/S} \varphi_S^!(y^{-1} xy)$$

où $\varphi_S^!$ est la fonction sur M égale à φ_S sur S et nulle hors de S. Remarquons que

(2) $\qquad \{ \operatorname{Ad}(y)\, \varphi ; y \in S/R_\varphi \}$ est l'ensemble des éléments de m^D dont la restriction à s est égale à celle de φ.

Le premier ensemble est inclus dans le second d'après 6.4 remarque (4), appliquée au groupe S. Or les deux ensembles ont même nombre d'éléments d'après 6.5 (ii).

D'après (2),

$$\varphi_S^!(e(X)) = [S : R_\varphi]^{-1} \sum_{y \in S/R_\varphi} \operatorname{Ad}(y)\, \varphi(X)$$

pour tout $X \in m$. On obtient grâce à (1)

$$\operatorname{trace} \sigma_\varphi(e(X)) = [S : R_\varphi]^{-1} \sum_{y \in M/R_\varphi} \operatorname{Ad}(y)\, \varphi(X)$$

pour tout $X \in m$. Notons γ la M-orbite de φ. Cela s'écrit encore

(3) $$\operatorname{trace} \sigma_\varphi(e(X)) = |\gamma|^{-1/2} \sum_{\varphi' \in \gamma} \varphi'(X).$$

Il en résulte que σ_φ ne dépend que de γ. On note désormais cette représentation σ_γ. Notons maintenant Γ l'ensemble des M-orbites dans m^D et $\widehat{M}$ l'ensemble des représentations irréductibles de M. On déduit de (3) que

(4) $$\sum_{\gamma \in \Gamma} (\operatorname{trace} \sigma_\gamma(1)) \operatorname{trace} \sigma_\gamma$$

est le caractère de la représentation régulière. Ce dernier est égal à

(5) $$\sum_{\sigma \in \widehat{M}} (\operatorname{trace} \sigma(1)) \operatorname{trace} \sigma.$$

Comme tout σ_γ est somme directe d'éléments de $\widehat{M}$, il est facile de déduire de l'égalité de (4) et (5) que $\sigma_\gamma \in \widehat{M}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et que $\{\sigma_\gamma ; \gamma \in \Gamma\} = \widehat{M}$. Cela démontre le lemme 6.4.

6.7. Reprenons les hypothèses et notations de 6.2. Pour démontrer la proposition 6.1, il nous reste à prouver que $D \in \mathscr{D}_{\geqslant 1}$. Soit donc $\ell \in \mathbf{N}$, $\ell \geqslant 1$, montrons que $D \in \mathscr{D}_\ell$. Soient $c \in C(\mathscr{B})$, $s \in S(c)$ et $f \in C(\mathfrak{p}^{-\ell} k_s/b_c)$. Alors $f^! \in C(\mathfrak{p}^h n_c/\mathfrak{p}^{h+\ell} k_s^u)$ et f est une fonction sur U_c^h bi-invariante par $K_s^{u, h+\ell}$. Pour tout sous-groupe compact K de G, notons $\widehat{K}$ l'ensemble de ses représentations lisses irréductibles. Décomposons la restriction de π à U_c^h sous la forme

$$\pi|_{U_c^h} = \bigoplus_{\sigma \in \widehat{U}_c^h} m(\sigma)\, \sigma.$$

Alors $$D(f) = \sum_{\sigma \in \widehat{U}_c^h} m(\sigma) \operatorname{trace} \sigma(\tilde{f}).$$

Supposons $D(f) \neq 0$. Il existe alors $\sigma \in \widehat{U}_c^h$ tel que $m(\sigma) > 0$ et $\operatorname{trace} \sigma(\tilde{f}) \neq 0$. Fixons une telle σ. Comme $\tilde{f}$ est invariante par $K_s^{u, h+\ell}$, σ est triviale sur ce groupe.

Premier cas. — Supposons

$$(h(a-1) - \ell - 1)\, e(\mathbf{G})\, d(\mathbf{G}) + \frac{a}{2} \geqslant 0.$$

Alors l'algèbre $m = \mathfrak{p}^h n_c/\mathfrak{p}^{h+\ell} k_s^u$, le groupe $M = U_c^h/K_s^{u, h+\ell}$ et l'application de m dans M déduite de e vérifient les hypothèses du lemme 6.4 (cf. 3.1 (4)). Le bicaractère $\psi \circ B$ de g identifie m^D à $\mathfrak{p}^{-h-\ell} k_s/\mathfrak{p}^{-h} b_c$. Il existe donc une orbite γ de U_c^h dans ce dernier groupe telle que $\sigma = \sigma_\gamma$. En identifiant f à une fonction sur M, on a

$$\operatorname{trace} \sigma(\tilde{f}) = \operatorname{mes}(K_s^{u, h+\ell})\, |\gamma|^{-1/2} \sum_{X \in m,\, Y \in \gamma} \tilde{f}(e(X))\, \psi(B(X, Y)).$$

Si l'on note $\bar{\gamma}$ l'image réciproque de γ dans $\mathfrak{p}^{-h-\ell} k_s$, on obtient

$$\begin{aligned}\operatorname{trace} \sigma(\tilde{f}) &= |\gamma|^{-1/2} \operatorname{mes}(\mathfrak{p}^{-h} b_c)^{-1} \int_g \int_{\bar{\gamma}} f^!(X)\, \psi(B(X, Y))\, dY\, dX \\ &= |\gamma|^{-1/2} \operatorname{mes}(\mathfrak{p}^{-h} b_c)^{-1} \int_{\varpi^h \bar{\gamma}} f(Y)\, dY,\end{aligned}$$

par inversion de Fourier. Donc

(1) la restriction de f à $\varpi^h \bar{\gamma}$ est non nulle.

Par hypothèse, il existe $s' \in S(c)$ tel que la restriction de π à $K_{s'}^{u,h}$ contienne la représentation triviale de ce groupe. Fixons un tel s'. Un raisonnement standard utilisant la réciprocité de Frobenius montre que, pour tout $\sigma' \in \hat{U}_c^h$ tel que $m(\sigma') > 0$, il existe $x \in G$ tel que la restriction de σ' à $U_c^h \cap x K_{s'}^{u,h} x^{-1}$ contienne la représentation triviale. Appliquons ceci à σ et fixons x comme ci-dessus. Posons

$$\begin{aligned} R &= (U_c^h \cap x K_{s'}^{u,h} x^{-1})\, K_s^{u,h+\ell}/K_s^{u,h+\ell}, \\ r &= \mathfrak{p}^h[(n_c \cap \operatorname{Ad}(x)\, k_{s'}^u) + \mathfrak{p}^\ell k_s^u]/\mathfrak{p}^{h+\ell} k_s^u. \end{aligned}$$

La condition précédente s'écrit

$$\sum_{y \in R} \operatorname{trace} \sigma(y) \neq 0,$$

i.e.
$$\sum_{Y \in r} \operatorname{trace} \sigma(e(Y)) \neq 0.$$

On a
$$\sum_{Y \in r} \operatorname{trace} \sigma(e(Y)) = |\gamma|^{-1/2} \sum_{Y \in r} \sum_{X \in \gamma} \psi(B(Y, X)).$$

La non-nullité de cette expression implique que γ coupe l'annulateur de r dans m^D, *i.e.*

$$\gamma \cap \mathfrak{p}^{-h}[(\operatorname{Ad}(x)\, k_{s'} \cap \mathfrak{p}^{-\ell} k_s) + b_c]/\mathfrak{p}^{-h} b_c \neq \emptyset.$$

Comme γ est une orbite pour l'action de U_c^h, on en déduit que, pour tout $Y \in \gamma$, il existe $x_Y \in G$ tel que

$$Y \in \mathfrak{p}^{-h}[(\operatorname{Ad}(x_Y)\, k_{s'} \cap \mathfrak{p}^{-\ell} k_s) + b_c]/\mathfrak{p}^{-h} b_c.$$

En tenant compte de (1), on voit qu'il existe $x' \in G$ et $X \in k_{s'}$ tels que $f(\operatorname{Ad}(x')\, X) \neq 0$. Cela démontre que $D \in \mathscr{D}_\ell$.

Deuxième cas. — Supposons

$$(h(a-1) - \ell - 1)\, e(\mathbf{G})\, d(\mathbf{G}) + \frac{a}{2} < 0.$$

Posons $\ell' = \ell - d(\mathbf{G})$. L'hypothèse 6.1 (ii) implique que $\ell' \geqslant 0$ et $2(h + \ell') \geqslant h + \ell + 1$. On a les inclusions

$$U_c^h \supset K_s^{u,h+\ell'} \supset K_s^{u,h+\ell}$$

et e définit un isomorphisme de groupes de $\mathfrak{p}^{h+\ell'} k_s^u/\mathfrak{p}^{h+\ell} k_s^u$ sur $K_s^{u,h+\ell'}/K_s^{u,h+\ell}$. Toujours d'après 6.1 (ii) et les propriétés des exponentielles tronquées, on a l'égalité

$$e(X)\, e(Y)\, e(\mathrm{CH}_a(X, Y))^{-1} \in K_s^{u,h+\ell}$$

pour tout $X \in \mathfrak{p}^h n_c$ et tout $Y \in \mathfrak{p}^{h+\ell'} k_s^u$. Notons que, dans la formule définissant $\mathrm{CH}_a(X, Y)$, un terme de degré au moins 2 en Y appartient à $\mathfrak{p}^{h+\ell} k_s^u$. On peut donc le supprimer. Il existe alors une famille $(c_t)_{t\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathbf{Z}_p$, presque nulle, telle qu'en posant

$$j_X(Y) = Y + \sum_{t\geqslant 1} c_t\, \mathrm{ad}^t(X)\, Y,$$

on ait $e(X)\, e(Y)\, e(X + j_X(Y))^{-1} \in K_s^{u,h+\ell}$ pour tous X, Y comme ci-dessus.

Notons W l'espace de la représentation σ. Comme $K_s^{u,h+\ell'}/K_s^{u,h+\ell}$ est abélien, on peut fixer une base $\{ w_i ; i \in I \}$ de W formée de vecteurs propres pour l'action de $K_s^{u,h+\ell'}$. A tout $i \in I$, on peut associer un élément $Y_i \in \mathfrak{p}^{-h-\ell} k_s$, de sorte que

$$\sigma(e(Y))\, w_i = \psi(B(Y, Y_i))\, w_i$$

pour tout $Y \in \mathfrak{p}^{h+\ell'} k_s^u$. Notons $\check{W}$ le dual de W, $\check{\sigma}$ la représentation contragrédiente de U_c^h dans $\check{W}$ et $\{ \check{w}_i ; i \in I \}$ la base de $\check{W}$ duale de $\{ w_i ; i \in I \}$. On a

$$\check{\sigma}(e(Y))\, \check{w}_i = \psi(- B(Y, Y_i))\, \check{w}_i$$

pour tout $Y \in \mathfrak{p}^{h+\ell'} k_s^u$ et tout $i \in I$.

Ecrivons

$$\begin{aligned}\mathrm{trace}\, \sigma(\tilde{f}) &= \sum_{x \in U_c^h/K_s^{u,h+\ell'}} \int_{K_s^{u,h+\ell'}} \tilde{f}(xy)\, \mathrm{trace}\, \sigma(xy)\, dy \\ &= \sum_{X \in \mathfrak{p}^h n_c/\mathfrak{p}^{h+\ell'} k_s^u} \int_{\mathfrak{p}^{h+\ell'} k_s^u} \tilde{f}(e(X)\, e(Y))\, \mathrm{trace}\, \sigma(e(X)\, e(Y))\, dY.\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{trace}\, \sigma(\tilde{f}) \neq 0$, il existe $X \in \mathfrak{p}^h n_c$ tel que l'intégrale relative à X dans l'expression ci-dessus soit non nulle. Fixons un tel X. *A fortiori*, il existe $i \in I$ tel que l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{p}^{h+\ell'} k_s^u} \tilde{f}(e(X)\, e(Y)) < \sigma(e(X)\, e(Y))\, w_i, \check{w}_i > dY$$

soit non nulle. Fixons un tel i. L'expression ci-dessus est égale à

$$\text{(2)} \qquad \langle \sigma(e(X))\, w_i, \check{w}_i \rangle \int_{\mathfrak{p}^{h+\ell'} k_s^u} f^1(X + j_X(Y))\, \psi(B(Y, Y_i))\, dY$$

A fortiori, $\langle \sigma(e(X))\, w_i, \check{w}_i \rangle \neq 0$. Soit $Y \in \mathfrak{p}^{h+\ell'} k_s^u$. On a les égalités

$$\begin{aligned}\psi(B(Y, Y_i)) \langle \sigma(e(X))\, w_i, \check{w}_i \rangle &= \langle \sigma(e(X)\, e(Y))\, w_i, \check{w}_i \rangle \\ &= \langle \sigma(e(X))\, w_i, \check{\sigma}(e(- \mathrm{Ad}(e(X))\, Y))\, \check{w}_i \rangle \\ &= \psi(B(\mathrm{Ad}(e(X))\, Y, Y_i)) \langle \sigma(e(X))\, w_i, \check{w}_i \rangle.\end{aligned}$$

D'où l'égalité

$$\psi(B(Y - \mathrm{Ad}(e(X))\, Y, Y_i)) = 1.$$

Comme en 6.4, remarque (2), il existe un automorphisme $\tau(X)$ de $\mathfrak{p}^{h+\ell'} k_s^u$ tel que $Y - \mathrm{Ad}(e(X))\, Y = \mathrm{ad}(X)\, \tau(X)\, Y \bmod \mathfrak{p}^{h+\ell} k_s^u$. L'équation précédente pour tout $Y \in \mathfrak{p}^{h+\ell'} k_s^u$ est donc équivalente à

$$\psi(B(\mathrm{ad}(X)\, Y, Y_i)) = 1$$

pour tout $Y \in \mathfrak{p}^{h+\ell'} k_s^u$. Par conséquent

$$\psi(B(Y, Y_i)) = \psi(B(j_X(Y), Y_i))$$

pour un tel Y. Remarquons que j_X est un automorphisme de $\mathfrak{p}^{h+\ell'} k_s^u$ qui préserve les mesures. En utilisant la relation ci-dessus et le changement de variables $j_X(Y) \mapsto Y$, on déduit de (2) la relation

$$\int_{\mathfrak{p}^{h+\ell'} k_s^u} f^!(X + Y)\, \psi(B(Y, Y_i))\, dY \neq 0$$

puis, par inversion de Fourier

$$\int_{\mathfrak{p}^{-\ell'} k_s} f(\varpi^h Y_i + Z)\, \psi(-B(Y_i, X) - \varpi^{-h} B(Z, X))\, dZ \neq 0.$$

A fortiori

(3) la restriction de f à $\varpi^h Y_i + \mathfrak{p}^{-\ell'} k_s$ est non nulle.

Comme dans le premier cas, il existe $s' \in S(c)$ et $x \in G$ tels que le caractère

$$e(Y) \mapsto \psi(B(Y, Y_i))$$

de $K_s^{u, h+\ell'}$ soit trivial sur $x K_{s'}^{u, h} x^{-1} \cap K_s^{u, h+\ell'}$. *I.e.*

$$Y_i \in \mathrm{Ad}(x)\, \mathfrak{p}^{-h} k_{s'} + \mathfrak{p}^{-h-\ell'} k_s.$$

On fixe de tels s' et x. Alors, d'après (3), la restriction de f à $\mathrm{Ad}(x)\, k_{s'} + \mathfrak{p}^{-\ell'} k_s$ est non nulle. En oubliant les notations précédentes, fixons $X \in \mathfrak{p}^{\ell} \mathrm{Ad}(x)\, k_{s'}$, $Y \in \mathfrak{p}^{d(\mathbf{G})} k_s$ tels que $f(\varpi^{-\ell}(X + Y)) \neq 0$. Rappelons que f est à support dans $\mathfrak{p}^{-\ell} k_s$, donc

$$X \in k_s \cap \mathfrak{p}^{\ell} \mathrm{Ad}(x)\, k_{s'}.$$

On va démontrer l'assertion suivante :

(4) soient $t \in S(\mathscr{B})$, $X' \in k_t \cap \mathfrak{p} g_{\mathrm{ent}}$, $Y' \in \mathfrak{p}^{d(\mathbf{G})} k_t$; alors $X' + Y' \in \mathfrak{p} g_{\mathrm{ent}}$.

Admettons-la pour l'instant. Alors il existe $s'' \in S(c)$ et $x' \in G$ tels que

$$X + Y \in \mathfrak{p}\, \mathrm{Ad}(x')\, k_{s''}.$$

Pour de tels s'', x', la restriction de f à $\mathfrak{p}^{-\ell+1} \mathrm{Ad}(x')\, k_{s''}$ est non nulle. C'est la condition requise pour que $D \in \mathscr{D}_\ell$, et cela achève la preuve de la proposition 6.1.

Démontrons donc (4) pour terminer. On se ramène immédiatement au cas où $\mathbf{G} \in \Gamma_0$. Si $\mathbf{G}$ est un tore, c'est évident. Supposons donc que $\mathbf{G} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Introduisons un espace V sur F (ou sur E si $\mathbf{G} \in \Gamma_3$) comme en 2.8 ou 2.9, et un réseau L de V tel que $k_t = \{ X \in g ;\ X(L) \subset L \}$. Fixons une base de L sur $\mathfrak{o}$ (ou $\mathfrak{o}_E$) et, grâce à cette base, identifions les éléments de g à des matrices. Pour tout $X \in g$, notons

$$P_X(T) = \sum_{i=0}^{d(\mathbf{G})} a_i(X)\, T^{d(\mathbf{G})-i}$$

le polynôme caractéristique de X, à coefficients dans F (ou E). Comme $X' \in k_t$, X' est à coefficients entiers. De même, les coefficients de Y' sont dans $\mathfrak{p}^{d(\mathbf{G})}$ (ou $\mathfrak{p}^{d(\mathbf{G})}\,\mathfrak{o}_E$). On en déduit que, pour tout $i \in \{0, \ldots, d(\mathbf{G})\}$,

$$a_i(X' + Y') \equiv a_i(X') \bmod \mathfrak{p}^{d(\mathbf{G})} \quad (\text{ou } \mathfrak{p}^{d(\mathbf{G})}\,\mathfrak{o}_E).$$

Comme $X' \in \mathfrak{p} g_{\mathrm{ent}}$, $P_{\varpi^{-1}X'}$ est à coefficients entiers (cf. 2.8, 2.9).

Remarque. — Dans le cas d'un groupe unitaire, on a énoncé en 2.9 un critère faisant intervenir le polynôme caractéristique d'un élément X de g vu comme élément de $\mathrm{End}_F(V)$ et non pas comme élément de $\mathrm{End}_E(V)$. Mais ce dernier polynôme n'est autre que $P_X\, \sigma(P_X)$ où σ est l'élément non trivial de Gal(E/F) et on en déduit immédiatement un critère analogue en terme du polynôme P_X.

Donc $a_i(X') \in \mathfrak{p}^i$ (ou $\mathfrak{p}^i\, \mathfrak{o}_E$) pour tout i. Mais alors les coefficients $a_i(X' + Y')$ vérifient la même relation, donc $P_{\varpi^{-1}(X'+Y')}$ est à coefficients entiers et $\varpi^{-1}(X' + Y') \in g_{\mathrm{ent}}$ d'après 2.8 et 2.9. □

BIBLIOGRAPHIE

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Neron models*, Springer Verlag, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **21**, 1990.

[BT] F. Bruhat, J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local II, *Publ. Math. IHES*, **60** (1984), 5-184.

[EGA] J. Dieudonné, A. Grothendieck, Eléments de géométrie algébrique IV, *Publ. Math. IHES*, **32** (1967).

[Ha] T. Hales, Unipotent representations and unipotent classes in SL(n), *Amer. J. Math.*, **115** (1993), 1347-1383.

[Ho] R. Howe, Kirillov theory for compact p-adic groups, *Pacific J. Math.*, **73** (1977), 365-381.

[L] R. P. Langlands, Les débuts d'une formule des traces stable, *Publ. Math. de l'Univ. Paris VII*, **13** (1982).

[T] J. Tits, Reductive groups over local field, in *Automorphic forms, representations and L-functions*, part 1, *Proc. of Symp. in pure Math.*, **33**, AMS 1979, 29-69.

[W] J.-L. Waldspurger, *Quelques résultats de finitude concernant les distributions invariantes sur les algèbres de Lie p-adiques*, prépublication 1993.

[W2] —, Sur les intégrales orbitales tordues pour les groupes linéaires : un lemme fondamental, *J. Can. de Math.*, **43** (1991), 852-896.

[W3] —, Démonstration d'une conjecture de dualité de Howe dans le cas p-adique, $p \neq 2$, in *Festschrift in honor of I. Piatetski-Shapiro*, I, the Weizmann sc. press of Israël, 1990, 267-324.

[Wash] L. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, Graduate texts in Math., **83**, Springer Verlag, 1982.

Université Paris VII
UFR de Mathématiques
URA 748 du CNRS
2, place Jussieu
75251 Paris Cedex 05

Manuscrit reçu le 8 juin 1993.