PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

ZOGHMAN MEBKHOUT

Le théorème de comparaison entre cohomologies de de Rham d'une variété algébrique complexe et le théorème d'existence de Riemann

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 69 (1989), p. 47-89

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1989__69__47_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

LE THÉORÈME DE COMPARAISON ENTRE COHOMOLOGIES DE DE RHAM D'UNE VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE COMPLEXE ET LE THÉORÈME D'EXISTENCE DE RIEMANN

par ZOGHMAN MEBKHOUT

SOMMAIRE

0. INTRODUCTION

Soit X/k une variété algébrique non singulière définie sur un corps k. Notons $\mathbf{DR}(\mathcal{O}_X)$ son complexe de de Rham $0 \to \mathcal{O}_{X/k} \to \Omega^1_{X/k} \to \ldots \Omega^n_{X/k} \to 0$ et $H^\bullet_{DR}(X) := \mathbf{H}^\bullet(X; \mathbf{DR}(\mathcal{O}_X))$ sa cohomologie de de Rham où $n := \dim(X)$. Si le corps de base k est le corps des nombres complexes, notons de même $\mathbf{DR}(\mathcal{O}_{X^h})$ le complexe de de Rham de la variété transcendante X^h associée à X et $H^\bullet_{DR}(X^h) := \mathbf{H}^\bullet(X^h; \mathbf{DR}(\mathcal{O}_{X^h}))$ sa cohomologie de de Rham, isomorphe à la cohomologie de Betti $H^\bullet(X^h; \mathbf{C}_{X^h})$ en vertu du lemme de Poincaré. On a des morphismes naturels

$$(*) \qquad H^\bullet_{DR}(X) \to H^\bullet_{DR}(X^h).$$

Motivé par une bonne théorie des formes différentielles de seconde espèce d'Atiyah-Hodge [A-H] et une définition purement algébrique des nombres de Betti d'une variété algébrique non singulière sur un corps de caractéristique nulle, Grothendieck a démontré le théorème suivant :

Théorème [G_1]. — *Les morphismes* $(*)$ *sont des* isomorphismes.

Dans l'article d'Atiyah-Hodge *(loc. cit.)*, il était signalé que la clé de la démonstration de ce type de théorème devait être le théorème de résolution des singularités démontré par Hironaka [H]. En vertu du théorème GAGA de Serre [S_1], Grothendieck démontre que l'obstruction pour que $(*)$ soient des isomorphismes est l'hypercohomologie d'un certain complexe de faisceaux de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels pour la topologie transcendante [G_1]. En s'appuyant sur le théorème d'Hironaka [H], il a ensuite montré que ce complexe est nul [G_1].

Plus généralement, on peut considérer un fibré vectoriel $\mathscr{E}$ sur X muni d'une connexion intégrable. Soit $\mathbf{DR}(\mathscr{E})$ son complexe de de Rham; notons $H^{\bullet}_{DR}(X, \mathscr{E}) := \mathbf{H}^{\bullet}(X; \mathbf{DR}(\mathscr{E}))$ la cohomologie de de Rham de X à valeur dans $\mathscr{E}$ et $H^{\bullet}_{DR}(X^h, \mathscr{E}^h) := \mathbf{H}^{\bullet}(X; \mathbf{DR}(\mathscr{E}^h))$ la cohomologie de de Rham de X^h à valeur dans le fibré transcendant $\mathscr{E}^h$ associé à $\mathscr{E}$. On a encore des morphismes naturels

$$(**) \qquad H^{\bullet}_{DR}(X, \mathscr{E}) \to H^{\bullet}_{DR}(X^h, \mathscr{E}^h)$$

et Grothendieck a demandé si les morphismes $(**)$ sont encore des isomorphismes [G_1]. Comme l'a remarqué Deligne [D], la réponse est en général négative : si $\dim(X) = 1$, la différence entre la caractéristique d'Euler-Poincaré des espaces vectoriels gradués $H^{\bullet}_{DR}(X^h, \mathscr{E}^h)$ et $H^{\bullet}_{DR}(X, \mathscr{E})$ est égale à la somme des irrégularités du fibré à connexion $\mathscr{E}$ aux points à l'infini de X, qui en général est non nulle ([D], II, 6.20). Il faut donc imposer une condition de régularité à l'infini; de fait, Deligne a montré le théorème suivant :

Théorème [D]. — *Avec les notations précédentes, si l'image inverse de* $\mathscr{E}$ *sur toute courbe non singulière au-dessus de* X *n'a que des singularités régulières à l'infini, les morphismes* $(**)$ *sont des* isomorphismes.

L'image inverse du fibré trivial $\mathcal{O}_X$ muni de la connexion naturelle sur une courbe non singulière au-dessus de X n'a pas de singularités à l'infini : on voit ainsi que le théorème de Deligne généralise celui de Grothendieck. La démonstration de Deligne s'appuie aussi sur le théorème d'Hironaka, mais utilise en plus le théorème d'existence de Riemann [D].

Les deux théorèmes précédents ont joué un rôle considérable aussi bien dans le développement des propriétés de la cohomologie de de Rham des variétés algébriques en toute caractéristique qu'en théorie des $\mathscr{D}_X$-modules. Par exemple, à partir de ces théorèmes on obtient par dévissage ([Me_2], 3.4.2, p. 87) le résultat suivant. Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module holonome (cf. définition dans le § 1) notons

$$\mathbf{DR}(\mathscr{M}^h) := \mathbf{R}\,hom_{\mathscr{D}_{X^h}}(\mathcal{O}_{X^h}, \mathscr{M}^h)$$

son complexe de de Rham transcendant.

Théorème. — *Soient* $\mathscr{M}_1$ *et* $\mathscr{M}_2$ *deux* $\mathscr{D}_X$*-modules holonomes tels que leurs images inverses sur toute courbe non singulière au-dessus de* X *n'ont que des singularités régulières à distance finie et infinie. Alors les morphismes naturels :*

$$(***) \qquad \mathrm{Ext}^{\bullet}_{\mathscr{D}_X}(X; \mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) \to \mathrm{Ext}^{\bullet}_{\mathscr{D}_{X^h}}(X^h; \mathscr{M}_1^h, \mathscr{M}_2^h) \to \mathrm{Ext}^{\bullet}_{\mathbf{C}_{X^h}}(X^h; \mathbf{DR}(\mathscr{M}_1^h), \mathbf{DR}(\mathscr{M}_2^h))$$

sont des isomorphismes.

Un fibré à connexion intégrable est un $\mathcal{D}_X$-module holonome qui n'a pas de singularité à distance finie. En ce sens, le théorème précédent généralise encore le théorème de comparaison de Grothendieck-Deligne.

Le cœur des démonstrations de tous ces théorèmes *restait* le théorème d'Hironaka. D'un autre côté, nous pensons que le théorème d'Hironaka *était* un obstacle pour une compréhension plus précise et plus simple de la cohomologie de de Rham des variétés algébriques sur un corps de caractéristique nulle; en particulier, cela ne rendait pas compte des phénomènes de ramification non modérée; or, la transformation de Fourier ne respecte pas la ramification modérée. Ceci a sans doute empêché un développement substantiel de la cohomologie de de Rham des variétés algébriques définies sur un corps de caractéristique positive, faute de ne pas disposer de la résolution des singularités dans ce contexte.

Dans ce travail, on se propose de développer une nouvelle méthode de démonstration des théorèmes de comparaison du type précédent et du théorème d'existence de Riemann. Cette méthode est plus précise et *n'utilise pas le théorème d'Hironaka*. Elle se fonde sur le théorème de positivité de l'irrégularité d'un $\mathcal{D}_X$-module holonome le long d'un diviseur [Me_4].

Par exemple, sachant *a priori* que le complexe qui intervient dans la démonstration de Grothendieck [G_1] est un *faisceau pervers* (cf. § 2), pour montrer qu'il est nul on procède par récurrence sur la dimension de X, et ceci ne requiert ni le théorème d'Hironaka ni le théorème d'existence de Riemann autrement que pour les courbes. Outre que c'est là une démonstration plus élémentaire, elle pourra se transposer en caractéristique positive à chaque fois que l'on disposera de l'analogue du faisceau d'irrégularité pour des coefficients donnés. C'est un exemple très important de propriété de la cohomologie des variétés algébriques où le théorème de résolution des singularités n'est pas au fond du problème, contrairement à une opinion courante (cf. [G_3]). De là, on passe au théorème de comparaison pour les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers et au théorème de comparaison pour les cycles évanescents de [S.G.A. 7], XIV, 4.13, 4.15. On en déduit avec Malgrange [M_3] que le théorème de rationalité des zéros du polynôme de Bernstein-Sato d'un germe de fonction holomorphe est équivalent au théorème de monodromie locale (cf. par exemple [L_2]). Remarquons que la démonstration de Le procède aussi par récurrence.

Une fois acquis le théorème de comparaison, on montre que le théorème d'existence de Riemann est une conséquence du théorème de prolongement des faisceaux analytiques cohérents de Frisch-Guenot [F-G] et Siu ([Si_1], [Si_2]) (voir aussi [S_2] et [Ta]) et ne requiert pas non plus le théorème d'Hironaka. Prenons par exemple le cas d'un système local $\mathcal{F}_U$ d'espaces vectoriels complexes de dimension finie sur le complémentaire $U := X\text{-}Z$ d'un diviseur Z d'une variété analytique complexe. Si l'on fixe une section $\sigma : \mathbf{C}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ de la projection naturelle, la théorie élémentaire des équations différentielles à points singuliers réguliers permet d'étendre le fibré plat $\mathcal{O}_U \otimes_{\mathbf{C}_U} \mathcal{F}_U$ en un fibré analytique cohérent $\mathcal{L}_W^\sigma$ sur le complémentaire $W := X\text{-sing}(Z)$ du lieu singulier sing(Z) de Z (cf. [D]). On montre à partir du théorème de prolongement des faisceaux analytiques cohérents que l'image directe $i_* \mathscr{L}^\sigma_W$ par l'inclusion canonique de W dans X est un faisceau analytique cohérent. Pour cela, il suffit de montrer que le fibré $\mathscr{L}^\sigma_W$ est prolongeable en faisceau analytique cohérent au voisinage de chaque point lisse du lieu singulier de Z. Ceci ne requiert que le théorème de résolution plongée des singularités d'une courbe plane (cf. 5.2). Pour passer au cas d'un système local sur un ouvert de Zariski lisse d'un espace analytique, il faut en plus le théorème de résolution des singularités d'une surface complexe où l'on dispose des méthodes naturelles et canoniques de Jung et de Zariski ([Z], [Li]). De là, on passe au cas des coefficients constructibles par le dévissage habituel [Me_2]. On peut espérer que ce procédé « canonique » permettra de mieux comprendre le théorème d'existence de Riemann dans le cas de systèmes locaux particuliers sur le complémentaire de singularités particulières. Cette méthode de démonstration du théorème d'existence de Riemann à l'aide du théorème de prolongement des faisceaux analytiques cohérents qui relève donc de la théorie des fonctions à plusieurs variables complexes s'apparente à la démonstration de Grauert-Remmert [$G\text{-}R_2$] du théorème d'existence de Riemann pour les revêtements topologiques étales finis d'une variété algébrique complexe non singulière. Elle a l'avantage de fournir une méthode d'attaque du théorème d'existence de Birkhoff pour les singularités irrégulières en dimension supérieure (cf. [M_6]).

Le théorème de positivité qui est à la base de ce qui précède est dû en dimension un à Malgrange ([M_1], [M_2]), et sa motivation en dimension supérieure est le théorème de semi-continuité de l'irrégularité d'une famille d'équations différentielles [Me_3], analogue au théorème de Deligne sur la semi-continuité du conducteur de Swan. On a là une illustration du principe selon lequel il est plus naturel et plus simple d'obtenir les propriétés de la régularité comme cas particuliers des propriétés de l'irrégularité. Inversement, le cas de singularités régulières permet de cerner les difficultés du cas des singularités irrégulières. Il apparaît que pour la démonstration du théorème d'existence de Birkhoff pour les singularités irrégulières, le cas crucial est celui de la dimension deux [M_6]. Ceci, comme nous l'a fait remarquer Malgrange, suggère des énoncés de théorèmes de type Lefschetz-Zariski pour les groupes de Galois différentiels locaux.

Voici le contenu de ce travail. Dans le § 1 nous rappelons quelques résultats généraux de la théorie des $\mathscr{D}_X$-modules. Dans le § 2 nous rappelons le théorème de positivité et ses conséquences immédiates. Dans le § 3 nous montrons le théorème de comparaison pour la cohomologie de de Rham. Dans le § 4 nous en déduisons le théorème de comparaison pour la cohomologie de de Rham des cycles évanescents. Enfin, dans le dernier paragraphe, nous montrons le théorème d'existence de Riemann.

Pour réaliser ce travail nous avons bénéficié de l'aide de B. Malgrange, H. Hamm, Le D. T., M. Merle, L. Narvaez, B. Teissier, G. Trautmann et de M. Vaquié. Nous voudrions les remercier. De même nous remercions Mmes L. Barenghi et C. Roussel pour l'aide matérielle qu'elles nous ont apportée. Les résultats de cet article ont été annoncés dans une Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences : C.R.A.S., Paris, t. 305, série I, p. 549-552 (1987).

1. RAPPELS DE QUELQUES RÉSULTATS

On désigne par $(X, \mathcal{O}_X)$ soit une variété algébrique non singulière sur un corps de caractéristique nulle soit une variété analytique complexe. On note $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini à coefficient dans $\mathcal{O}_X$. C'est un faisceau cohérent (cf. [M_3]) d'anneaux non commutatifs muni d'une filtration $\mathcal{D}_k$ ($k \in \mathbf{N}$) par les faisceaux des opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant k$. Une bonne filtration $\mathcal{M}_\ell$ ($\ell \in \mathbf{N}$) d'un $\mathcal{D}_X$-module (à gauche) $\mathcal{M}$ est une filtration exhaustive par des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents telle que $\mathcal{D}_k \mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{M}_{k+\ell}$ pour tous k et ℓ appartenant à $\mathbf{N}$ avec égalité dès que ℓ est assez grand. Un $\mathcal{D}_X$-module est cohérent si et seulement si il admet localement une bonne filtration (cf. [M_3]). Le faisceau gradué $\mathrm{gr}(\mathcal{M}) := \bigoplus_k \mathcal{M}_{k+1}/\mathcal{M}_k$ associé à une bonne filtration est un faisceau cohérent sur le gradué $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_X)$ associé à la filtration $\mathcal{D}_k$ et définit un cycle positif du fibré cotangent $T^* X$ de X qui ne dépend pas de la bonne filtration choisie (cf. *loc. cit.*). Donc, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent, son cycle caractéristique $\mathrm{CCh}(\mathcal{M})$ et sa variété caractéristique $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$, son support, sont globalement définis. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent non nul, la dimension de sa variété caractéristique est au moins égale à la dimension de X en vertu de l'inégalité de Bernstein (cf. [M_3]). En fait, l'inégalité de Bernstein est aussi une conséquence du théorème de l'involutivité des caractéristiques (cf. [Ga]) mais elle est bien plus élémentaire. On dit alors qu'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$ est holonome si $\dim(\mathrm{Ch}(\mathcal{M})) = \dim(X)$ ou s'il est nul. On note $\mathrm{Mh}(\mathcal{D}_X)$ la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes. C'est une sous-catégorie pleine, stable par extension de la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules. On note comme d'habitude $D(\mathcal{D}_X)$ la catégorie dérivée de la catégorie abélienne des $\mathcal{D}_X$-modules et $D^b_h(\mathcal{D}_X)$ la catégorie des complexes à cohomologie bornée et holonome. La catégorie $D^b_h(\mathcal{D}_X)$ est alors une sous-catégorie pleine et triangulée de la catégorie $D(\mathcal{D}_X)$.

Soit Z un sous-espace de X défini par un idéal $\mathcal{I}_Z$. On définit deux foncteurs de la catégorie $D^b(\mathcal{D}_X)$ en posant

$$\mathbf{R}\mathcal{M}(*Z) := \mathbf{R} \varinjlim_k hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}^k_Z, \mathcal{M})$$

et

$$\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Z(\mathcal{M}) := \mathbf{R} \varinjlim_k hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^k_Z, \mathcal{M}),$$

où $\mathcal{M}$ est un complexe de la catégorie $D^b(\mathcal{D}_X)$. On a un triangle distingué de la catégorie $D^b(\mathcal{D}_X)$:

$$\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Z(\mathcal{M}) \to \mathcal{M} \to \mathrm{R}\mathcal{M}(*Z) \to.$$

Il résulte de la théorie du polynôme de Bernstein-Sato ([B], [K_4]) (voir aussi [N-M]) que si $\mathcal{M}$ est un complexe de la catégorie $D^b_h(\mathcal{D}_X)$ le triangle précédent est un triangle distingué de la catégorie $D^b_h(\mathcal{D}_X)$. On en déduit facilement que si f est un morphisme $X \to X'$ de variétés non singulières l'image inverse d'un complexe $\mathcal{M}'$ de la catégorie $D^b(\mathcal{D}_{X'})$

$$\mathcal{M} := \mathbf{L}f^*\mathcal{M}' := \mathcal{O}_X \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{O}_{X'}} f^{-1}\mathcal{M}'$$

appartient à $D^b_h(\mathscr{D}_X)$ si $\mathscr{M}'$ appartient à $D^b_h(\mathscr{D}_{X'})$. D'autre part, on a un morphisme canonique pour toute sous-variété Z′ de X′

$$\mathscr{O}_X \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathscr{O}_{X'}} f^{-1}\,\mathbf{R}\mathscr{M}'(*Z') \to \mathbf{R}\mathscr{M}(*Z)$$

qui est un isomorphisme ([Me$_2$], 2.2.2, p. 72) où $Z := f^{-1}Z'$. Si on pose $\mathscr{D}_{X\to X'} := \mathbf{L}f^*\,\mathscr{D}_{X'} = f^*\,\mathscr{D}_{X'}$, alors $\mathscr{D}_{X\to X'}$ est un $(\mathscr{D}_X, f^{-1}\,\mathscr{D}_{X'})$-bimodule et le complexe $\mathscr{M}$ est isomorphe au complexe $\mathscr{D}_{X\to X'} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathscr{D}_{X'}} f^{-1}\mathscr{M}'$ parce que tout $\mathscr{D}_{X'}$-module plat reste plat en tant que $\mathscr{O}_{X'}$-module. De cette façon la structure de complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche sur le complexe $\mathscr{M}$ est plus explicite (cf. [K$_1$], [M$_5$]).

2. LE THÉORÈME DE POSITIVITÉ ET LE FAISCEAU D'IRRÉGULARITÉ

2.1. Perversité

Si X est une variété complexe non singulière munie de la topologie transcendante on note $D^b_c(\mathbf{C}_X)$ la catégorie des complexes de faisceaux d'espaces vectoriels complexes algébriquement constructibles si X est algébrique et analytiquement constructibles si X est analytique. Si $\mathscr{F}$ est un complexe on note $h^i(\mathscr{F})$ son i-ième faisceau de cohomologie.

Définition **(2.1.1).** — *On dit qu'un complexe constructible $\mathscr{F}$ a la propriété de* support *si $h^i(\mathscr{F})$ est nul pour $i \notin [0, \dim(X)]$ et si la dimension du support du faisceau $h^i(\mathscr{F})$ est inférieure ou égale à $\dim(X) - i$ pour tout $i \in [0, \dim(X)]$.*

Définition **(2.1.2).** — *On dit qu'un complexe constructible $\mathscr{F}$ a la propriété de* co-support *si le complexe dual $\mathscr{F}^\vee := \mathbf{R}\,hom_{\mathbf{C}_X}(\mathscr{F}, \mathbf{C}_X)$ a la propriété de support.*

Si $\mathscr{M}$ est un complexe de $\mathscr{D}_X$-modules ($\in D^b(\mathscr{D}_X)$) notons

$$\mathbf{DR}(\mathscr{M}) := \mathbf{R}\,hom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{O}_X, \mathscr{M})$$

son complexe de de Rham transcendant et $\mathbf{S}(\mathscr{M}) := \mathbf{R}\,hom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X)$ son complexe des solutions holomorphes. En vertu du théorème de constructibilité [K$_2$], les complexes $\mathbf{DR}(\mathscr{M})$ et $\mathbf{S}(\mathscr{M})$ sont constructibles si $\mathscr{M}$ est un complexe holonome ($\in D^b_h(\mathscr{D}_X)$) et ils ont la propriété de support si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module holonome ([K$_2$], prop. 4.1). En vertu du théorème de dualité locale ([Me$_1$], théorème 1.1) les complexes $\mathbf{DR}(\mathscr{M})$ et $\mathbf{S}(\mathscr{M})$ s'échangent par dualité si $\mathscr{M}$ est un complexe holonome :

$$\mathbf{DR}(\mathscr{M}) \cong \mathbf{R}\,hom_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}), \mathbf{C}_X).$$

Il en résulte que si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module holonome les complexes $\mathbf{DR}(\mathscr{M})$ et $\mathbf{S}(\mathscr{M})$ ont la propriété de co-support.

Définition **(2.1.3).** — *On dit qu'un complexe constructible $\mathscr{F}$ est un* faisceau pervers *s'il a les propriétés de support et de co-support.*

Donc si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module holonome les complexes $\mathbf{DR}(\mathscr{M})$ et $\mathbf{S}(\mathscr{M})$ sont des faisceaux pervers. On note $\mathrm{Perv}(\mathbf{C}_X)$ la catégorie des faisceaux pervers sur X qui est alors une sous-catégorie pleine et abélienne de la catégorie des complexes constructibles [B-B-D]. De plus, un triangle distingué de la catégorie $D^b_c(\mathbf{C}_X)$ donne naissance, à côté de la suite longue de cohomologie usuelle, à une suite longue de cohomologie perverse [B-B-D]. Si Z est une sous-variété de X, un complexe constructible $\mathscr{F}$ sur Z est un faisceau pervers sur Z si le complexe $\mathscr{F}[-\operatorname{codim}_X(Z)]$ vu comme complexe constructible sur X est un faisceau pervers sur X. On note $\mathrm{Perv}(\mathbf{C}_Z)$ la catégorie des faisceaux pervers sur Z qui est alors une sous-catégorie pleine et abélienne de la catégorie des complexes constructibles sur Z. Si $\mathscr{F}$ est un complexe constructible on note ${}^p h^i(\mathscr{F})$ son i-ième faisceau de cohomologie perverse.

2.2. Irrégularité

Si Z est une sous-variété d'une variété complexe non singulière X notons i l'inclusion canonique de Z dans X et j l'inclusion (transcendante) canonique de $U := X - Z$ dans X. Pour tout complexe $\mathscr{M}$ de la catégorie $D^b(\mathscr{D}_X)$ on définit les complexes $\mathbf{IR}_Z(\mathscr{M})$ et $\mathbf{IR}^\vee_Z(\mathscr{M})$ sur Z en posant

$$\mathbf{IR}_Z(\mathscr{M}) := i^! \, \mathbf{DR}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z)) \, [1]$$
$$\mathbf{IR}^\vee_Z(\mathscr{M}) := i^{-1} \, \mathbf{S}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z)) \, [\operatorname{codim}_X(Z)].$$

Par construction on a deux triangles distingués de la catégorie $D^b(\mathbf{C}_X)$:

$$\mathbf{IR}_Z(\mathscr{M}) \, [-1] \to \mathbf{DR}(\mathscr{M}(*Z)) \to \mathbf{R}j_* j^{-1} \, \mathbf{DR}(\mathscr{M}) \to$$

et
$$j_! j^{-1} \, \mathbf{S}(\mathscr{M}) \to \mathbf{S}(\mathscr{M}(*Z)) \to \mathbf{IR}^\vee_Z(\mathscr{M}) \, [-\operatorname{codim}_X(Z)] \to.$$

En vertu du théorème de constructibilité les complexes $\mathbf{IR}_Z(\mathscr{M})$ et $\mathbf{IR}^\vee_Z(\mathscr{M})$ sont constructibles sur Z si $\mathscr{M}$ est un complexe holonome et en vertu du théorème de dualité locale ils s'échangent par dualité :

$$\mathbf{IR}_Z(\mathscr{M}) \, [-1] \cong \mathbf{R} \, hom_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{IR}^\vee_Z(\mathscr{M}) \, [-\operatorname{codim}_X(Z)], \mathbf{C}_X).$$

On définit ainsi un foncteur exact covariant et un foncteur exact contravariant entre catégories triangulées :

$$\mathbf{IR}_Z : D^b_h(\mathscr{D}_X) \to D^b_c(\mathbf{C}_Z),$$
$$\mathbf{IR}^\vee_Z : D^b_h(\mathscr{D}_X) \to D^b_c(\mathbf{C}_Z).$$

On a alors le théorème fondamental de positivité qui est à la base de ce travail [Me_4] :

Théorème **(2.2.1)**. — *Avec les notations précédentes si* Z *est une hypersurface (définie localement par une équation) et si* $\mathscr{M}$ *est un* $\mathscr{D}_X$*-module holonome les complexes* $\mathbf{IR}_Z(\mathscr{M})$ et $\mathbf{IR}^\vee_Z(\mathscr{M})$ *sont des* faisceaux pervers *sur* Z.

Définition **(2.2.2).** — *Pour toute sous-variété* Z *de* X *et tout complexe holonome* $\mathscr{M}$, *on appelle complexe d'irrégularité de* $\mathscr{M}$ *le long de* Z *le complexe* $\mathbf{IR}_Z(\mathscr{M})$ *ou le complexe* $\mathbf{IR}_Z^\vee(\mathscr{M})$ *; pour toute hypersurface* Z *de* X *et tout* $\mathscr{D}_X$*-module holonome* $\mathscr{M}$, *on appelle faisceau d'irrégularité de* $\mathscr{M}$ *le long de* Z *le faisceau* $\mathbf{IR}_Z(\mathscr{M})$ *ou le faisceau* $\mathbf{IR}_Z^\vee(\mathscr{M})$.

Il résulte du théorème de positivité et de la suite longue de cohomologie perverse que les foncteurs entre les catégories abéliennes $\mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X)$ et $\mathrm{Perv}(\mathbf{C}_Z)$ $\mathbf{IR}_Z$ et $\mathbf{IR}_Z^\vee$ sont exacts. En particulier dans une suite exacte courte de $\mathscr{D}_X$-modules holonomes le faisceau d'irrégularité le long d'une hypersurface du terme médian est nul si et seulement si les faisceaux d'irrégularité des termes extrêmes sont nuls.

On déduit du théorème (2.2.1) le corollaire suivant [Me₄] :

Corollaire **(2.2.3).** — *Si* $\mathscr{M}$ *est un complexe holonome et* Z *une hypersurface de* X *on a alors les* isomorphismes *de faisceaux pervers* $\mathbf{IR}_Z(h^i(\mathscr{M})) \cong {}^ph^i(\mathbf{IR}_Z(\mathscr{M}))$ *pour tout* i.

En vertu du corollaire (2.2.3) si $\mathscr{M}$ est un complexe holonome et Z une hypersurface, le complexe $\mathbf{IR}_Z(\mathscr{M})$ est nul si et seulement si les faisceaux $\mathbf{IR}_Z(h^i(\mathscr{M}))$ sont nuls pour tout i.

Notons ω_X le faisceau des formes différentielles sur X de degré maximum et $\mathscr{M}^*$ le complexe dual d'un complexe $\mathscr{M}$ de la catégorie $\mathrm{D^b}(\mathscr{D}_X)$:

$$\mathscr{M}^* := hom_{\mathscr{O}_X}(\omega_X, \mathbf{R}\, hom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{D}_X))\,[\dim(X)].$$

Si $\chi(\mathscr{F})$ désigne la fonction d'Euler-Poincaré d'un complexe constructible $\mathscr{F}$, on a le théorème suivant [Me₄] :

Théorème **(2.2.4).** — *Pour tout complexe holonome* $\mathscr{M}$ *et toute sous-variété* Z, *on a l'égalité entre fonctions constructibles* $\chi(\mathbf{IR}_Z(\mathscr{M})) = \chi(\mathbf{IR}_Z(\mathscr{M}^*))$.

On déduit des théorèmes (2.2.1) et (2.2.4) le corollaire suivant :

Corollaire **(2.2.5).** — *Si* $\mathscr{M}$ *est un* $\mathscr{D}_X$*-module holonome et* Z *une hypersurface, le faisceau* $\mathbf{IR}_Z(\mathscr{M})$ *est nul si et seulement si le faisceau* $\mathbf{IR}_Z(\mathscr{M}^*)$ *est nul.*

En effet, un faisceau pervers est nul si et seulement si sa fonction d'Euler-Poincaré est nulle.

Soit $p : X \to X'$ un morphisme lisse de variétés lisses et $\mathbf{DR}_p(\mathscr{M})$ le complexe de de Rham relatif d'un complexe de la catégorie $\mathrm{D^b}(\mathscr{D}_X)$. Le complexe $\mathbf{R}p_*\,\mathbf{DR}_p(\mathscr{M})$ est un complexe de la catégorie $\mathrm{D^b}(\mathscr{D}_{X'})$. Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module admettant une bonne filtration globale et si le morphisme p est propre sur le support de $\mathscr{M}$, il résulte du théorème des images directes des faisceaux algébriques ou analytiques cohérents par un morphisme propre que les faisceaux de cohomologie de $\mathbf{R}p_*\,\mathbf{DR}_p(\mathscr{M})$ sont $\mathscr{D}_{X'}$-cohérents (cf. [K₈], [M₅]). De plus, si $\mathscr{M}$ est holonome ces faisceaux de cohomologie sont holonomes (cf. *loc. cit.*). On a alors le théorème suivant ([Me₂], théorème 4.3.1, p. 59) :

Théorème **(2.2.6).** — *Avec les notations précédentes si* $\mathscr{M}$ *est un complexe holonome tel que le morphisme* p *est propre sur les supports de ses faisceaux de cohomologie, on a l'isomorphisme suivant entre complexes d'irrégularité pour toute sous-variété* Z' *de* X' *où* $Z := p^{-1}(Z')$:

$$\mathbf{IR}_{Z'}(\mathbf{R}p_* \, \mathbf{DR}_p(\mathscr{M})) \cong \mathbf{R}p_* \, \mathbf{IR}_Z(\mathscr{M}).$$

La preuve du théorème (2.2.6) résulte de la commutation des foncteurs de cohomologie locale algébrique avec un morphisme propre et de la formule de projection.

Plus généralement, si $f: X \to X'$ est morphisme entre variétés non singulières et si on pose $\mathscr{D}_{X' \leftarrow X} := \omega_X \otimes_{\mathscr{O}_X} f^* \, hom_{\mathscr{O}_{X'}}(\omega_{X'}, \mathscr{D}_{X'})$ qui est un $(f^{-1} \mathscr{D}_{X'}, \mathscr{D}_X)$-bimodule, alors le foncteur image directe pour les complexes de $\mathscr{D}_X$-modules est défini par

$$\mathscr{M} \to \mathbf{R}f_* \, \mathscr{D}_{X' \leftarrow X} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}.$$

Il se réduit, au décalage près, à l'image directe totale du complexe de de Rham relatif pour un morphisme lisse et a les mêmes propriétés (cf. [K_3], [M_5]).

Remarque **(2.2.7).** — *En vertu du théorème de positivité, si* $\mathscr{M}$ *est un* $\mathscr{D}_X$*-module holonome et* Z *une hypersurface, le cycle caractéristique du faisceau d'irrégularité* $\mathbf{IR}_Z(\mathscr{M})$ *est un cycle lagrangien positif du fibré cotangent* T^*X. *Il est nul si et seulement si* $\mathbf{IR}_Z(\mathscr{M})$ *est nul. D'autre part, il peut se décrire à l'aide du cycle caractéristique de* $\mathscr{M}(*Z)$ *et du cycle du faisceau* $\mathbf{R}j_! \, j^{-1} \, \mathbf{DR}(\mathscr{M})$ [Me_4]. *Cette description garde un sens sur un corps de caractéristique nulle. On a là une définition purement algébrique de l'irrégularité pour les* $\mathscr{D}_X$*-modules holonomes en dimension supérieure sur un corps de base de caractéristique nulle.*

Remarque **(2.2.8).** — *Le théorème de positivité suggère de construire sur un corps de caractéristique nulle, à l'instar de la dimension un, un* $\mathscr{D}_X$*-module holonome à support dans* Z, « *le module d'irrégularité* », *qui contient toute l'information de la ramification de* $\mathscr{M}$ *le long de* Z *et qui a un analogue pour les faisceaux* ℓ*-adiques en caractéristique positive. Cependant, des exemples simples montrent que la théorie des cycles évanescents, parallèle à la théorie* ℓ*-adique de* [S.G.A. 7], *est insuffisante pour construire le module d'irrégularité.*

Nous allons déduire du théorème de positivité que sur une variété analytique complexe X, le foncteur qui, à une connexion méromorphe le long d'une hypersurface Z génériquement régulière, associe son système local des sections horizontales sur $U := X - Z$, est pleinement fidèle. On appelle connexion méromorphe le long de Z un $\mathscr{D}_X$-module holonome lisse sur U tel que $\mathscr{M} \cong \mathscr{M}(*Z)$. Il revient au même de dire que c'est un $\mathscr{O}_X(*Z)$-module cohérent muni d'une action de $\mathscr{D}_X$. On dit qu'une connexion méromorphe $\mathscr{M}$ le long de Z est génériquement régulière si la codimension dans Z du support du faisceau $\mathbf{IR}_Z(\mathscr{M})$ est au moins égale à un.

Théorème **(2.2.9).** — *Le foncteur* $\mathscr{M} \to hom_{\mathscr{D}_U}(\mathscr{O}_U, \mathscr{M}_U)$ *qui, à une connexion méromorphe et génériquement régulière le long de* Z, *associe son système local des sections horizontales sur* U, *est pleinement fidèle.*

Preuve de (2.2.9). — Soient $\mathcal{M}_i$ $(i = 1, 2)$ deux telles connexions. Si j désigne l'inclusion canonique de U dans X, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) & \cong & \mathbf{DR}(\mathcal{M}_1^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R}j_* j^{-1}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) & \cong & \mathbf{R}j_* j^{-1}\, \mathbf{DR}(\mathcal{M}_1^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_2). \end{array}$$

Il apparaît que le cône du premier morphisme vertical est égal par définition au complexe $\mathbf{IR}_Z(\mathcal{M}_1^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_2)$ qui est un faisceau pervers sur Z en vertu du théorème (2.2.1). Mais il passe par tout point de Z, en dehors d'un ensemble de codimension un, une courbe non singulière et non caractéristique pour les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes $\mathcal{M}_1^*(*Z)$, $\mathcal{M}_2(*Z)$ et $\mathcal{M}_1^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_2(*Z)$ (voir 3.2.1). Ceci a pour conséquence que si les faisceaux $\mathbf{IR}_Z^\vee(\mathcal{M}_1^*)$, $\mathbf{IR}_Z^\vee(\mathcal{M}_2)$ sont à support de codimension au moins égale à un dans Z, il en est de même pour le faisceau $\mathbf{IR}_Z^\vee(\mathcal{M}_1^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_2)$ en vertu du théorème de Cauchy-Kowalewski. Donc le faisceau $\mathbf{IR}_Z^\vee(\mathcal{M}_1^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_2)$ est concentré cohomologiquement entre les degrés 1 et $\dim(Z)$. Il en résulte que l'on a l'isomorphisme

$$hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \cong j_* j^{-1}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2).$$

En prenant les sections globales dans cet isomorphisme on trouve le théorème (2.2.9). On remarquera que ce raisonnement remplace avantageusement celui de Deligne basé sur le phénomène de Hartogs [D].

Terminons ce paragraphe avec la suite de Mayer-Vietoris qui nous sera très utile par la suite.

Proposition **(2.2.10).** — *Soient* Z_1 *et* Z_2 *deux sous-espaces de* X *(algébriques ou analytiques selon la situation) et* $\mathcal{M}$ *un complexe holonome. On a alors le triangle distingué de la catégorie* $D_c^b(\mathbf{C}_X)$:

$$\mathbf{IR}_{Z_1 \cap Z_2}(\mathcal{M}) \to \mathbf{IR}_{Z_1}(\mathcal{M}) \oplus \mathbf{IR}_{Z_2}(\mathcal{M}) \to \mathbf{IR}_{Z_1 \cup Z_2}(\mathcal{M}) \to.$$

Preuve de (2.2.10). — Cela résulte immédiatement de la définition du complexe d'irrégularité.

Soient Z une sous-variété de X définie par p équations $g_1, \ldots, g_p$, Z_1 la sous-variété définie par l'équation g_1 et Z_2 la sous-variété définie par les équations $g_2, \ldots, g_p$. Alors $Z = Z_1 \cap Z_2$ et $Z_1 \cup Z_2$ est définie par les équations $g_1 g_2, \ldots, g_1 g_p$. Raisonnant par récurrence sur p et utilisant la suite de Mayer-Vietoris on trouve que le complexe d'irrégularité d'un complexe holonome le long de tout diviseur est nul si et seulement si le complexe d'irrégularité d'un complexe holonome le long de toute sous-variété est nul.

Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome dont le faisceau d'irrégularité le long de *tout* diviseur est *nul*, T une sous-variété de X et Z un diviseur de X. Notons $i : Z \to X$

et $j : \mathrm{T} \to \mathrm{X}$ les inclusions canoniques. En vertu de ce qui précède on a l'isomorphisme $\mathbf{S}(\mathbf{R}\ \mathrm{alg}\ \Gamma_{\mathrm{T}}(\mathscr{M}(*\mathrm{Z})) \cong j^{-1}\ \mathbf{S}(\mathscr{M}(*\mathrm{Z}))$ et donc les isomorphismes :

$$\begin{aligned} i^{-1}\ \mathbf{S}(\mathbf{R}\ \mathrm{alg}\ \Gamma_{\mathrm{T}}(\mathscr{M})\ (*\mathrm{Z})) &\cong i^{-1}\ \mathbf{S}(\mathbf{R}\ \mathrm{alg}\ \Gamma_{\mathrm{T}}(\mathscr{M}(*\mathrm{Z})) \\ &\cong i^{-1} j^{-1}\ \mathbf{S}(\mathscr{M}(*\mathrm{Z})) \cong j^{-1} i^{-1}\ \mathbf{S}(\mathscr{M}(*\mathrm{Z})) = 0. \end{aligned}$$

Le complexe $\mathbf{IR}^{\vee}_{\mathrm{Z}}(\mathbf{R}\ \mathrm{alg}\ \Gamma_{\mathrm{T}}(\mathscr{M}))$ est nul et par (2.2.3) le faisceau $\mathbf{IR}^{\vee}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{alg}\ \mathbf{H}^{\bullet}_{\mathrm{T}}(\mathscr{M}))$ est nul.

3. LE THÉORÈME DE COMPARAISON

3.1. Enoncés

Nous énonçons les théorèmes du § 3 et démontrons leurs corollaires en 3.1. Nous démontrons les théorèmes du § 3 en 3.2. Nous commençons par le cas analytique et nous examinerons par la suite les changements qu'il faut apporter dans le cas algébrique.

Soient X une variété analytique complexe et Z un diviseur de X. Nous utilisons le mot diviseur comme synonyme du mot hypersurface.

Théorème **(3.1.1)**. — *Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_{\mathrm{X}}$-module holonome lisse sur* $\mathrm{X} - \mathrm{Z}$, *le faisceau* $\mathbf{IR}_{\mathrm{Z}}(\mathscr{M})$ *est nul si et seulement si la codimension dans* Z *de son support est au moins égale à un.*

Voyons comment le théorème (3.1.1) entraîne le théorème de comparaison de Grothendieck [G_1]. Soit donc une variété algébrique complexe non singulière Y. Il s'agit de montrer que sa cohomologie de de Rham algébrique est isomorphe à sa cohomologie de Betti. Pour cela la suite spectrale de Čech nous réduit à supposer que Y est affine [G_1]. Notons $\overline{\mathrm{Y}}$ l'adhérence de Y dans un espace projectif $\mathbf{P}^m$. Alors l'obstruction au théorème de Grothendieck est égale à l'hypercohomologie du faisceau $\mathbf{IR}_{\overline{\mathrm{Y}}-\mathrm{Y}}(\mathrm{H}^p_{\overline{\mathrm{Y}}}(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^m}))$ où $p := m - \dim(\mathrm{Y})$, *loc. cit.* En vertu de (3.1.1) $\mathbf{IR}_{\mathrm{Z}}(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^m})$ est nul pour tout diviseur Z de $\mathbf{P}^m$ car son support est contenu dans le lieu singulier de Z qui est au moins de codimension un dans Z. Un argument combinatoire de type Mayer-Vietoris entraîne que le complexe $\mathbf{IR}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{H}^{\bullet}_{\mathrm{T}}(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^m}))$ est nul pour toutes les sous-variétés T, Z de $\mathbf{P}^m$ (cf. (2.2.10)).

Soient maintenant Y une sous-variété fermée de X et Z une sous-variété fermée de Y définie localement par une équation et contenant le lieu singulier de Y.

Théorème **(3.1.2)**. — *Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_{\mathrm{X}}$-module holonome de support contenu dans* Y *et lisse sur* $\mathrm{Y} - \mathrm{Z}$, *le faisceau* $\mathbf{IR}_{\mathrm{Z}}(\mathscr{M})$ *est nul si et seulement si la codimension dans* Z *de son support est au moins égale à un.*

Voyons comment le théorème (3.1.2) entraîne le théorème de comparaison de Deligne [D]. Soient donc une variété algébrique complexe non singulière Y et $\mathscr{E}$ un fibré à connexion intégrable sur Y. Il s'agit de montrer que la cohomologie de de Rham de Y à valeur dans $\mathscr{E}$ est isomorphe à la cohomologie de la variété transcendante Y^{h}, à valeur dans le système local des sections horizontales du fibré $\mathscr{E}^{\mathrm{h}}$ associé à $\mathscr{E}$, si l'image inverse de $\mathscr{E}$ sur toute courbe non singulière au-dessus de Y n'a que des singularités régulières à l'infini. La question étant locale pour la topologie de Zariski, on peut supposer que Y est affine. Soit $\overline{Y}$ l'adhérence de Y dans un espace projectif P^m. L'obstruction au théorème de Deligne est égale à l'hypercohomologie du faisceau $\mathbb{R}_{\overline{Y}-Y}(\bar{\mathscr{E}})$ où $\bar{\mathscr{E}}$ est le $\mathscr{D}_{P^m}$-module image directe de $\mathscr{E}$ par l'inclusion de Y dans P^m. Il suffit alors de montrer en vertu du théorème (3.1.2) que la codimension dans $\overline{Y} - Y$ du support du faisceau $\mathbb{R}_{\overline{Y}-Y}(\bar{\mathscr{E}})$ est au moins égale à un. Si $\overline{Y}$ est normale on voit que c'est bien le cas, en vertu du théorème de Cauchy-Kowalewski, en faisant passer une courbe non singulière par un point générique du diviseur à l'infini. Dans le cas général, on se réduit au cas précédent en prenant la normalisation projective de $\overline{Y}$. En fait, on peut démontrer directement par récurrence sur la dimension de Y, comme dans la démonstration du théorème (3.1.2) (cf. 3.2), que le support du faisceau $\mathbb{R}_{\overline{Y}-Y}(\bar{\mathscr{E}})$ est de codimension au moins un dans $\overline{Y} - Y$ sans recourir à la normalisation.

Scholie **(3.1.2)'**. — *Soit un triplet* X, Z, $\mathscr{M}$ *comme dans le théorème* (3.1.2); *le faisceau* $\mathbb{R}_Z(\mathscr{M})$ *est nul* si et seulement si *le faisceau* $\mathbb{R}_{Z\cup T}(\mathscr{M})$ *est nul pour tout diviseur* T.

Preuve. — En effet, pour tout diviseur T distinct de Z le $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}$ n'a pas de singularité au point générique de T. On applique alors le théorème (3.1.2).

L'irrégularité *n'est pas stable* par image inverse. Cependant, nous allons déduire du théorème de comparaison que la régularité *est stable* par image inverse. Soient $f: X' \to X$ un morphisme de variétés analytiques complexes et $\mathscr{M}$ un complexe de la catégorie $D^b_h(\mathscr{D}_X)$. Notons $\mathscr{M}'$ son image inverse par f qui est alors un complexe de la catégorie $D^b_h(\mathscr{D}_{X'})$ (cf. § 1).

Corollaire **(3.1.3)**. — *Avec les notations précédentes, si le complexe* $\mathbb{R}_Z(\mathscr{M})$ *est nul pour tout diviseur* Z *de* X *alors le complexe* $\mathbb{R}_{Z'}(\mathscr{M}')$ *est nul pour tout diviseur de* X'.

Preuve. — En factorisant f par une immersion suivie d'une projection il suffit de montrer (3.1.3) dans le cas d'une immersion puis dans le cas d'une projection. Si f est une immersion on a l'isomorphisme

$$f_* \mathbb{R}_{Z'}(\mathscr{M}')\,[\dim(X')] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{Z'}(\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_{X'}(\mathscr{M}))\,[\dim(X)].$$

Si le faisceau $\mathbb{R}_Z(\mathscr{M})$ est nul pour tout diviseur Z de X, la suite de Mayer-Vietoris montre que le complexe $\mathbb{R}_{Z'}(\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_{X'}(\mathscr{M}))$ est nul pour toutes sous-variétés X', Z' de X. D'où (3.1.3) dans le cas d'une immersion. Si f est une projection on peut supposer que $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module holonome. Soit Y le support de $\mathscr{M}$. On raisonne par récurrence sur dim(Y). Si dim(Y) = 0, $\mathscr{M}'$ n'a pas de singularité et (3.1.3) est vrai. Sinon il existe toujours un diviseur T (la question est locale) dont la trace sur Y est un diviseur qui contient le lieu singulier de Y et en dehors duquel $\mathscr{M}$ est lisse. On a alors une suite exacte de $\mathscr{D}_X$-modules :

$$0 \to \operatorname{alg}\Gamma_T(\mathscr{M}) \to \mathscr{M} \to \mathscr{M}(*T) \to \operatorname{alg} H^1_T(\mathscr{M}) \to 0.$$

En vertu du scholie (3.1.2)′ le faisceau d'irrégularité le long du tout diviseur de $\mathcal{M}(*\mathrm{T})$ est nul et donc les faisceaux d'irrégularité le long de tout diviseur des $\mathcal{D}_{\mathrm{X}}$-modules alg $\Gamma_{\mathrm{T}}(\mathcal{M})$ et alg $\mathrm{H}^1_{\mathrm{T}}(\mathcal{M})$ sont nuls. L'hypothèse de récurrence montre que (3.1.3) est vrai pour les $\mathcal{D}_{\mathrm{X}}$-modules alg $\Gamma_{\mathrm{T}}(\mathcal{M})$ et alg $\mathrm{H}^1_{\mathrm{T}}(\mathcal{M})$. Si (3.1.3) est vrai pour $\mathcal{M}(*\mathrm{T})$ il est vrai pour $\mathcal{M}$. Notons T′ l'image inverse de T par f. D'après le scholie (3.1.2)′ il suffit de voir que le faisceau $\mathbf{IR}^{\vee}_{\mathrm{T}}(\mathcal{M}')$ est nul. Mais f étant une projection, le faisceau $\mathbf{IR}^{\vee}_{\mathrm{T}}(\mathcal{M}')$ est l'image inverse du faisceau $\mathbf{IR}^{\vee}_{\mathrm{T}}(\mathcal{M})$ qui est nul par hypothèse.

Comme corollaire de (3.1.3) on trouve que si le faisceau d'irrégularité le long de tout diviseur d'un $\mathcal{D}_{\mathrm{X}}$-module holonome est nul, son image inverse sur tout disque complexe n'a que des singularités régulières. Ceci a une réciproque :

Théorème **(3.1.4).** — *Le faisceau d'irrégularité d'un $\mathcal{D}_{\mathrm{X}}$-module holonome le long de tout diviseur est nul* si et seulement si *son image inverse (ordinaire) sur tout disque complexe au-dessus de* X *n'a que des singularités régulières.*

La démonstration de (3.1.4) est parallèle à la démonstration du théorème (3.1.2) (cf. le § 3.2).

Corollaire **(3.1.5).** — *Le complexe d'irrégularité d'un complexe holonome le long de tout sous-espace de* X *est nul* si et seulement si *son image inverse (totale) sur tout disque complexe au-dessus de* X *n'a que des singularités régulières.*

On déduit bien entendu (3.1.5) pour un $\mathcal{D}_{\mathrm{X}}$-module de (3.1.4), puis par récurrence sur l'amplitude du complexe holonome.

Corollaire **(3.1.6).** — *Soient $\mathcal{M}_i$ $(i = 1, 2)$ deux $\mathcal{D}_{\mathrm{X}}$-modules holonomes. Si l'irrégularité le long de tout diviseur de* X *de $\mathcal{M}_i$ $(i = 1, 2)$ est nulle, l'irrégularité le long de tout diviseur de* X *du produit tensoriel total $\mathcal{M}_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathcal{M}_2$ est nulle.*

Preuve. — En effet, si $f : \mathrm{D} \to \mathrm{X}$ est un disque sur X, on a l'isomorphisme :

$$\mathbf{L}f^* \mathcal{M}_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathrm{D}}} \mathbf{L}f^* \mathcal{M}_2 \to \mathbf{L}f^*(\mathcal{M}_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathcal{M}_2).$$

Mais en vertu de (3.1.3) $\mathbf{L}f^* \mathcal{M}_i$ $(i = 1, 2)$ n'a que des singularités régulières et le produit $\mathbf{L}f^* \mathcal{M}_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathrm{D}}} \mathbf{L}f^* \mathcal{M}_2$ n'a que des singularités régulières. Donc l'image inverse totale de $\mathcal{M}_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathcal{M}_2$ par f n'a que des singularités régulières. Le corollaire (3.1.5) entraîne le corollaire (3.1.6).

Soient X_i $(i = 1, 2)$ une variété analytique complexe et $\mathcal{M}_i$ un $\mathcal{D}_{\mathrm{X}_i}$-module holonome $(i = 1, 2)$. Posons $\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2 := p_1^* \mathcal{M}_1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} p_2^* \mathcal{M}_2$ où p_i sont les projections de $\mathrm{X} := \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ sur X_i.

Corollaire **(3.1.7).** — *Si le faisceau d'irrégularité de $\mathcal{M}_i$ $(i = 1, 2)$ le long de tout diviseur de X_i est nul, le faisceau d'irrégularité de $\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2$ le long de tout diviseur de $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ est nul.*

Preuve. — C'est une conséquence de (3.1.5) et de (3.1.6).

Le complexe d'irrégularité d'un $\mathcal{D}_X$-module holonome le long d'une sous-variété de X n'est pas en général un faisceau pervers [Me_4]. Cependant, la suite de Mayer-Vietoris montre que le complexe d'irrégularité est nul le long de toute sous-variété si et seulement si le faisceau d'irrégularité le long de tout diviseur est nul. En particulier, le complexe d'irrégularité le long de tout point est nul si le faisceau d'irrégularité le long de tout diviseur est nul. Ceci a une réciproque qui se montre à partir du théorème de comparaison (cf. § 3.2) :

Théorème **(3.1.8).** — *Le faisceau d'irrégularité d'un $\mathcal{D}_X$-module holonome le long de tout diviseur est nul* si et seulement si *son complexe d'irrégularité le long de tout point est nul.*

Si X et $\mathcal{M}$ sont algébriques les théorèmes (3.1.1), (3.1.2), (3.1.8) et les corollaires (3.1.3), (3.1.6), (3.1.7) restent identiques. Cependant, il y a une petite différence dans le théorème (3.1.4) et le corollaire (3.1.5) à cause du diviseur à l'infini.

Si Y est une variété affine complexe non singulière munie d'un plongement dans un espace projectif P^m désignons par $\overline{\mathcal{M}}$ l'image directe d'un complexe de $\mathcal{D}_Y$-modules $\mathcal{M}$ par l'inclusion de Y dans P^m, $\overline{\mathcal{M}}$ est alors un complexe de $\mathcal{D}_{\mathrm{P}^m}$-modules à support dans l'adhérence $\overline{\mathrm{Y}}$ de Y.

Théorème **(3.1.9).** — *Avec les notations précédentes l'image inverse d'un $\mathcal{D}_Y$-module $\mathcal{M}$ holonome sur toute courbe non singulière au-dessus de* Y *n'a que des singularités régulières à distances finie et infinie* si et seulement si *le faisceau d'irrégularité de $\overline{\mathcal{M}}$ le long de tout diviseur de* P^m *est nul.*

Corollaire **(3.1.10).** — *Avec les notations précédentes l'image inverse d'un complexe $\mathcal{M}$ de la catégorie* $\mathrm{D}^b_h(\mathcal{D}_Y)$ *sur toute courbe non singulière au-dessus de* Y *n'a que des singularités régulières à distances finie et infinie si et seulement si le complexe d'irrégularité de $\overline{\mathcal{M}}$ le long de toute sous-variété de* P^m *est nul.*

On passe facilement du cas affine au cas général :

Corollaire **(3.1.11).** — *Soit* X *une variété algébrique complexe non singulière, alors l'image inverse d'un $\mathcal{D}_X$-module holonome (resp. d'un complexe holonome) $\mathcal{M}$ n'a que des singularités régulières à distances finie et infinie sur toute courbe non singulière au-dessus de* X *si et seulement si le faisceau d'irrégularité (resp. le complexe d'irrégularité) de l'image directe dans un plongement projectif de la restriction de $\mathcal{M}$ à tout ouvert affine de* X *est nul le long de tout diviseur (resp. de toute sous-variété) de l'espace projectif.*

Ceci permet de donner une définition commune dans le cas algébrique et analytique des modules réguliers.

Définition **(3.1.12).** — *Un $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ holonome sur une variété algébrique (resp. analytique) complexe non singulière* X *est régulier si son image inverse sur toute courbe non singulière (resp. sur tout disque complexe) au-dessus de* X *n'a que des singularités régulières à distances finie et infinie (resp. n'a que des singularités régulières).*

On note $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X)$ la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules holonomes réguliers et $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ la sous-catégorie des complexes de la catégorie $D^b_h(\mathscr{D}_X)$ dont la cohomologie est dans $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X)$. Dans une suite exacte de la catégorie $\mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X)$ le terme médian est régulier si et seulement si les termes extrêmes sont réguliers. La catégorie $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ est triangulée.

Si f est un morphisme de variétés non singulières algébriques ou analytiques, il résulte de ce qui précède que :

Corollaire **(3.1.13).** — *Les catégories* $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ *sont stables par image inverse totale par* f, *par le foncteur de dualité, par le produit tensoriel total interne sur* $\mathscr{O}_X$ *et par le produit extérieur.*

Corollaire **(3.1.14).** — *Si* f *est un morphisme de variétés algébriques complexes non singulières, les catégories* $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ *sont stables par image directe.*

Preuve. — On peut supposer que f est la projection de $X \times X'$ sur X'. La question étant locale sur X', on peut supposer que X' est affine, puis par (3.1.10) que X' est l'espace projectif $P^{m'}$. De même, si X est affine on peut supposer que X est l'espace projectif P^m. Dans ce cas-là, en vertu de (3.1.10), le corollaire est conséquence du théorème (2.2.6). Dans le cas général considérons un recouvrement de X par des ouverts affines, la suite spectrale de Čech (cf. [D], II, 7.3) nous réduit alors au cas précédent.

Si f est un morphisme propre de variétés analytiques complexes et si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module holonome muni d'une bonne filtration globale, son image directe est régulière si $\mathscr{M}$ l'est. Contrairement au cas algébrique l'existence de bonnes filtrations globales n'est pas automatique. Cependant, nous déduirons dans le § 5 l'analogue analytique de (3.1.14) à partir du théorème d'existence (cf. 5.5.1).

Corollaire **(3.1.15).** — *Soient* X *une variété analytique complexe et* $\mathscr{M}_i$ $(i = 1, 2)$ *deux complexes de* $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$. *Alors le morphisme naturel*

$$\mathbf{DR} : \mathbf{R}\, hom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) \to \mathbf{R}\, hom_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{DR}(\mathscr{M}_1), \mathbf{DR}(\mathscr{M}_2))$$

est un isomorphisme.

Preuve. — Notons Δ la diagonale de $X \times X$ et δ le morphisme diagonal. On a des isomorphismes naturels :

$$\mathbf{R}\, hom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) \xrightarrow{\sim} \mathbf{DR}(\mathscr{M}_1^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_2),$$

$$\mathbf{R}\, hom_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{DR}(\mathscr{M}_1), \mathbf{DR}(\mathscr{M}_2)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\, hom_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{DR}(\mathscr{M}_1) \otimes_{\mathbf{C}_X} (\mathbf{DR}(\mathscr{M}_2))^\vee, \mathbf{C}_X).$$

Pour un complexe $\mathscr{F}$ de la catégorie $D^b(\mathbf{C}_X)$ on note $\mathscr{F}^\vee$ son complexe dual $\mathbf{R}\, hom_{\mathbf{C}_X}(\mathscr{F}, \mathbf{C}_X)$. Prenons les images directes par δ, on trouve les isomorphismes :

$$\delta_* \mathbf{DR}(\mathscr{M}_1^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_2) \xrightarrow{\sim} \mathbf{DR}(\mathbf{R}\ \mathrm{alg}\ \Gamma_\Delta(\mathscr{M}_1^* \boxtimes \mathscr{M}_2))\ [2 \dim(X)],$$

$$\delta_* \mathbf{R}\, hom_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{DR}(\mathscr{M}_1), \mathbf{DR}(\mathscr{M}_2)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\Gamma_\Delta((\mathbf{DR}(\mathscr{M}_1^*)) \boxtimes \mathbf{DR}(\mathscr{M}_2))\ [2 \dim(X)].$$

De sorte que l'obstruction au corollaire (3.1.15) est égale à l'hypercohomologie du complexe $\mathbf{IR}_\Delta(\mathcal{M}_1^* \boxtimes \mathcal{M}_2)$. Si $\mathcal{M}_1$ est régulier, $\mathcal{M}_1^*$ est régulier en vertu de (2.2.5) et (3.1.4). Si, en plus, $\mathcal{M}_2$ est régulier, $\mathcal{M}_1^* \boxtimes \mathcal{M}_2$ est régulier en vertu de (3.1.7) et (3.1.5). Le complexe d'irrégularité de $\mathcal{M}_1^* \boxtimes \mathcal{M}_2$ le long de Δ est alors nul. D'où le corollaire.

Corollaire **(3.1.16)**. — *Soit* X *une variété algébrique complexe non singulière et* $\mathcal{M}_i$ $(i = 1, 2)$ *deux complexes de la catégorie* $D^b_{hr}(\mathcal{D}_X)$. *Alors le complexe* $\mathcal{M}^h$ *est* régulier *si* $\mathcal{M}$ *est un complexe holonome régulier et le morphisme naturel*

$$\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(X; \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \to \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X^h}}(X^h; \mathcal{M}_1^h, \mathcal{M}_2^h)$$

est un isomorphisme.

Preuve. — On peut supposer que $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ sont des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers. La première assersion résulte du scholie (3.1.2)′ en raisonnant par récurrence sur la dimension du support de $\mathcal{M}$. Pour la seconde prenons un recouvrement de X par des ouverts affines, la suite spectrale de Čech nous réduit à supposer que X est affine. Soit $\overline{X}$ l'adhérence de X dans un espace projectif P^m. Notons i l'inclusion de X dans $\overline{X}$. On a les isomorphismes :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(X; \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(\overline{X}; \mathbf{R}i_*\, \mathbf{DR}(\mathcal{M}_1^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_2))\\ &\xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}^h; (\mathbf{R}i_*\, \mathbf{DR}(\mathcal{M}_1^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_2))^h)\end{aligned}$$

où le dernier résulte du théorème GAGA de Serre [S_1], et l'isomorphisme

$$\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X^h}}(X^h; \mathcal{M}_1^h, \mathcal{M}_2^h) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}^h; \mathbf{R}i_*^h\, \mathbf{DR}(\mathcal{M}_1^{*h} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X^h}} \mathcal{M}_2^h)).$$

De sorte que l'obstruction à l'isomorphisme du corollaire (3.1.16) est égale à l'hypercohomologie du complexe d'irrégularité de $\mathcal{M}_1^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_2$ le long du diviseur à l'infini $\overline{X} - X$ de l'espace P^m. Si $\mathcal{M}_1$ est régulier son dual est régulier et donc le produit tensoriel $\mathcal{M}_1^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_2$ l'est aussi. Son complexe d'irrégularité le long de $\overline{X} - X$ est donc nul en vertu de (3.1.6).

Remarque **(3.1.17)**. — *Pour montrer que le complexe d'irrégularité de* $\mathcal{M}_1^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_2$ *le long du diviseur à l'infini est nul on a utilisé non seulement que* $\mathcal{M}_1$ *et* $\mathcal{M}_2$ *n'ont que des singularités régulières à distance infinie mais aussi qu'ils n'ont que des singularités régulières à distance* finie.

Notons $\mathbf{DR}_r$ la restriction du foncteur de de Rham (transcendant) $\mathbf{DR}$ aux catégories $\mathrm{Mhr}(\mathcal{D}_X)$ et $D^b_{hr}(\mathcal{D}_X)$ aussi bien dans le cas algébrique complexe qu'analytique complexe. Le foncteur $\mathbf{DR}_r$ est exact entre les catégories $D^b_{hr}(\mathcal{D}_X)$ et $D^b_c(\mathbf{C}_X)$ et entre les catégories $\mathrm{Mhr}(\mathcal{D}_X)$ et $\mathrm{Perv}(\mathbf{C}_X)$. On déduit bien entendu des corollaires (3.1.15) et (3.1.16) :

Corollaire **(3.1.17)**. — *Le foncteur* $\mathbf{DR}_r$ *est pleinement fidèle.*

En posant $f^! \mathcal{M} := (\mathbf{L}f^* \mathcal{M}^*)^*$ pour un complexe $\mathcal{M}$ de $D^b_h(\mathcal{D}_X)$ et pour un morphisme f de variétés lisses, on déduit de ce qui précède que les catégories $D^b_{hr}(\mathcal{D}_X)$ sont stables par les opérations cohomologiques $f^*, f_*, f^!$, $(\ )^*$, $\otimes_{\mathcal{O}_X}$, $\boxtimes$, avec un grain de sable pour l'image directe par un morphisme analytique propre (cf. 5.5.1).

3.2. Démonstrations

Nous allons démontrer les théorèmes (3.1.1), (3.1.2), (3.1.4), (3.1.8) et (3.1.9).

3.2.1. Démonstration du théorème (3.1.1)

Soit Λ une sous-variété lagrangienne homogène irréductible du fibré cotangent $T^* X$ de la variété analytique X. La variété Λ est l'adhérence du conormal de la partie lisse de sa projection sur X. Supposons que cette projection a une dimension *strictement* positive, puisque Λ est irréductible de dimension dim(X), les fibres de Λ sont de dimension au plus égale à dim(X) — 1. Au-dessus de chaque point de X il existe un ouvert non vide de directions cotangentes non nulles qui ne sont pas dans Λ. Il passe donc, au voisinage de tout point de X, une hypersurface X′ telle que son fibré conormal $T^*_{X'} X$ ne rencontre Λ que le long de la section nulle $T^*_X X$ chaque fois que Λ est réunion *finie* de variétés lagrangiennes irréductibles se projetant sur X en une variété de dimension strictement positive. Appliquons ceci à la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_X$-module holonome; on trouve qu'en dehors d'un ensemble de dimension nulle de X il passe, au voisinage de chaque point de X, une hypersurface lisse X′ non caractéristique pour ce module. Soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent et X′ une hypersurface non caractéristique pour $\mathcal{N}$. Notons f l'immersion de X′ dans X et $\mathcal{N}'$ l'image inverse de $\mathcal{N}$ par f. Alors $\mathcal{N}'$ est un $\mathcal{D}_{X'}$-module cohérent et le morphisme

$$f^{-1}\,\mathbf{S}(\mathcal{N}) \to \mathbf{S}(\mathcal{N}')$$

est un *isomorphisme* en vertu du théorème de Cauchy-Kowalewski (cf. [K₁]).

Soit un $\mathcal{D}_X$-module holonome $\mathcal{M}$ lisse en dehors d'un diviseur Z. Il s'agit de montrer que si la codimension dans Z du support du faisceau d'irrégularité de $\mathcal{M}$ le long de Z est au moins un, ce faisceau est nul. Nous allons raisonner par récurrence sur dim(X).

3.2.1 α) Si dim(X) = 1 les singularités de $\mathcal{M}$ sont toutes régulières par hypothèse.

3.2.1 β) Si dim(X) = 2 on peut supposer, la question étant locale, que X est un voisinage de l'origine dans l'espace complexe de dimension 2 et que Z est une courbe plane ayant l'origine comme unique point singulier. Le procédé canonique et élémentaire de la résolution plongée d'une courbe plane permet d'obtenir un morphisme, comme composé d'un nombre fini d'éclatements de points

$$\pi : \widetilde{X} \to X$$

tel que $\widetilde{Z} := \pi^{-1} Z$ soit un diviseur à croisements normaux. De plus, π est un isomorphisme hors de l'origine. La théorie élémentaire des équations différentielles à points singuliers réguliers (cf. [D]) va nous permettre d'étendre à $\tilde{X}$ le fibré plat $\mathcal{M}_{\tilde{U}}$ sur $\tilde{U} := \tilde{X} - \tilde{Z}$, image inverse par π de la restriction $\mathcal{M}_U$ de $\mathcal{M}$ à $U := X - Z$, en un fibré à connexion logarithmique le long de $\tilde{Z}$. Le faisceau $\mathcal{L}_{\tilde{U}}$ des sections horizontales de $\mathcal{M}_{\tilde{U}}$ est un système local d'espaces vectoriels complexes de dimension r égale au rang du fibré $\mathcal{M}_{\tilde{U}}$. Soit $\sigma : \mathbf{C}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ une section de la projection $\mathbf{C} \to \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ et $\tilde{V}$ un voisinage d'un point de $\tilde{Z}$ où sont définies des coordonnées locales (x_1, x_2) de $\tilde{X}$, telles que $\tilde{Z}$ est définie par $x_1 = 0$ ou par $x_1 x_2 = 0$. Le choix d'un point base sur $\tilde{V} - \tilde{Z}$ permet d'identifier la restriction de $\mathcal{L}_{\tilde{U}}$ à $\tilde{V} - \tilde{Z}$ en une représentation dans $GL(r, \mathbf{C})$, de $\mathbf{Z}$ dans le premier cas ou de $\mathbf{Z}^2$ dans le second cas. Soit A l'image du générateur canonique de $\mathbf{Z}$ dans le premier cas et A_1, A_2 les images des générateurs canoniques de $\mathbf{Z}^2$ dans le second cas. La forme canonique de Jordan permet d'écrire $A = \exp(2\pi \sqrt{-1}\, B)$, $A_1 = \exp(2\pi\sqrt{-1}\, B_1)$, $A_2 = \exp(2\pi\sqrt{-1}\, B_2)$ où les matrices B, B_1, B_2 sont à coefficients complexes, leurs valeurs propres sont dans l'image de σ et B_1 et B_2 commutent. Soit L la fibre de $\mathcal{L}_{\tilde{U}}$ au point base. On définit la connexion logarithmique sur le fibré $\mathcal{O}_{\tilde{V}} \otimes_{\mathbf{C}} L$:

$$\nabla : \mathcal{O}_{\tilde{V}} \otimes_{\mathbf{C}} L \to \mathcal{O}_{\tilde{V}} \otimes_{\mathbf{C}} L \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{V}}} \Omega^1_{\tilde{V}} \langle \tilde{Z} \rangle,$$

par $$\nabla(g \otimes 1) = dg \otimes 1 - g \otimes B1 \otimes dx_1/x_1 \quad \text{dans le premier cas}$$

et $$\nabla(g \otimes 1) = dg \otimes 1 - g \otimes B_1 1 \otimes dx_1/x_1 - g \otimes B_2 1 \otimes dx_2/x_2 \quad \text{dans le second.}$$

Le système local sur $\tilde{V} - \tilde{Z}$ des sections horizontales du fibré $\mathcal{O}_{\tilde{V}} \otimes_{\mathbf{C}} L$ a la monodromie de la restriction de $\mathcal{L}_{\tilde{U}}$ à $\tilde{V} - \tilde{Z}$. Ces deux systèmes locaux sont isomorphes et le fibré $\mathcal{O}_{\tilde{V}} \otimes_{\mathbf{C}} L$ a une matrice fondamentale de la forme $x_1^B := \exp(B \log x_1)$ ou $x_1^{B_1} x_2^{B_2} := \exp[B_1 \log(x_1) + B_2 \log(x_2)]$. Tout fibré à connexion logarithmique le long de $\tilde{Z}$ sur $\tilde{V}$ qui étend le fibré $\mathcal{M}_{\tilde{V}-\tilde{Z}}$ et qui a, dans une base quelconque, une matrice fondamentale de la forme $H(x)\, x_1^C$ ou $H(x)\, x_1^{C_1} x_2^{C_2}$, où $H(x)$ est une matrice holomorphe inversible et où C, C_1 et C_2 sont des matrices à coefficients complexes de valeurs propres contenues dans l'image de la section σ et telles que C_1 et C_2 commutent, est isomorphe au fibré $\mathcal{O}_{\tilde{V}} \otimes_{\mathbf{C}} L$. En effet, la restriction à $\tilde{V} - \tilde{Z}$ d'un tel fibré est de la forme $A(x)\, \mathcal{O}_{\tilde{V}} \otimes_{\mathbf{C}} L$ pour une matrice $A(x)$ holomorphe inversible sur $V - Z$. On a la relation

$$H(x)\, x_1^C = A(x)\, x_1^B$$

ou $$H(x)\, x_1^{C_1} x_2^{C_2} = A(x)\, x_1^{B_1} x_2^{B_2},$$

ce qui entraîne que

$$\exp(2\pi\sqrt{-1}\, C) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\, B),$$
$$\exp(2\pi\sqrt{-1}\, C_1) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\, B_1),$$
$$\exp(2\pi\sqrt{-1}\, C_2) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\, B_2)$$

et $$C = B, \quad C_1 = B_1, \quad C_2 = B_2$$

en vertu de l'unicité du logarithme dans une section σ. Donc $A(x) = H(x)$ et $A(x)$ est un isomorphisme sur $\tilde{V}$. Ceci permet de recoller, pour σ fixé et $\tilde{V}$ variable, les fibrés $\mathcal{O}_{\tilde{V}} \otimes_{\mathbf{C}} L$ pour donner naissance à un fibré $\tilde{\mathcal{M}}^{\sigma}$ sur $\tilde{X}$ qui est un prolongement de $\mathcal{M}_{\tilde{U}}$. Le réseau $\tilde{\mathcal{M}}^{\sigma}$ est contenu dans le $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$-module $\tilde{j}_* \mathcal{M}_{\tilde{U}}$, où $\tilde{j}$ est l'inclusion canonique de $\tilde{U}$ dans $\tilde{X}$. Le $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$-module engendré par $\tilde{\mathcal{M}}^{\sigma}$ est un $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$-module holonome dont le faisceau d'irrégularité le long de $\tilde{Z}$ est nul. Tout ceci est élémentaire car l'assertion est locale : le réseau $\tilde{\mathcal{M}}^{\sigma}$ apparaît alors comme une extension successive de fibré de rang un et on est réduit au cas des équations différentielles du premier ordre à points singuliers réguliers. Prenons l'image directe par π au sens des $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$-modules, on trouve un $\mathcal{D}_X$-module qui a le même système local des sections horizontales que $\mathcal{M}$, mais dont le faisceau d'irrégularité le long de Z est nul en vertu du théorème (2.2.6). Le localisé le long de Z de ce $\mathcal{D}_X$-module est isomorphe à $\mathcal{M}(*Z)$ en vertu du théorème (2.2.9). Donc $\mathbf{IR}_Z(\mathcal{M})$ est nul et le théorème (3.1.1) est démontré dans le cas $\dim(X) = 2$.

3.2.1 γ) Si $\dim(X) \geqslant 3$, appliquons la situation précédente à la variété caractéristique de $\mathcal{M}$, on trouve que localement sur X il passe par tout point, en dehors d'un ensemble de dimension nulle de Z, une hypersurface X' non caractéristique pour $\mathcal{M}(*Z)$. On peut de plus choisir X' de telle sorte qu'elle ne contienne pas le support de $\mathbf{IR}_Z(\mathcal{M})$. Notons f l'inclusion canonique de X' dans X, $Z' := Z \cap X'$ et $\mathcal{M}'$ l'image inverse de $\mathcal{M}$ par f. On obtient un triplet X', Z', $\mathcal{M}'$ à partir du triplet X, Z, $\mathcal{M}$ mais avec $\dim(X') = \dim(X) - 1$. On a $f^* \mathcal{M}(*Z) \cong \mathcal{M}'(*Z')$ (cf. § 1) et le théorème de Cauchy-Kowalewski montre que l'on a l'isomorphisme

$$f^{-1}\,\mathbf{S}(\mathcal{M}(*Z)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}(\mathcal{M}'(*Z')).$$

Le faisceau $\mathbf{IR}^{\vee}_{Z'}(\mathcal{M}')$ a donc un support de codimension dans Z' au moins égale à un. Le triplet X', Z', $\mathcal{M}'$ a les propriétés du triplet X, Z, $\mathcal{M}$. En vertu de l'hypothèse de récurrence sur dim(X) le faisceau $\mathbf{IR}^{\vee}_{Z'}(\mathcal{M}'$ (est nul. Le faisceau $\mathbf{IR}^{\vee}_Z(\mathcal{M})$ est donc nul en dehors d'un ensemble de dimension nulle de Z. Mais le théorème de positivité montre que $\mathbf{IR}^{\vee}_Z(\mathcal{M})$ est un objet de la catégorie $\mathrm{Perv}(\mathbf{C}_Z)$. Donc l'obstruction au théorème (3.1.1) est le faisceau $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}(*Z), \mathcal{O}_X)$ si $n = \dim(X)$. C'est là un faisceau ponctuel, soit o un point de son support et T un diviseur de X passant par ce point. On a la suite exacte de $\mathcal{D}_X$-modules

$$0 \to \mathcal{M}(*Z) \to \mathcal{M}(*Z \cup T)$$

qui donne naissance à une suite exacte

$$\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}(*Z \cup T), \mathcal{O}_X) \to \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}(*Z), \mathcal{O}_X) \to 0,$$

puisque la dimension homologique de $\mathcal{D}_X$ en tout point est égale à dim(X). Pour montrer le théorème (3.1.1) il suffit de construire un diviseur T passant par o tel que l'espace $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}(*Z \cup T), \mathcal{O}_X)_o$ soit nul. On peut supposer que X est une boule assez petite de centre o et de dimension n et que p soit une projection de X sur une boule X' de dimension $n-1$ telle que p soit finie sur Z. Donc $X \cong X' \times \Delta$, où Δ est un disque complexe et on a les inclusions canoniques $X' \times \Delta \subset X' \times C \subset X' \times P^1$. Notons $\tilde{p}$ la projection de $X' \times P^1$ sur X' et Z_∞ le diviseur à l'infini $X' \times P^1 - X' \times C$. Le $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}(*Z)$ est engendré sur X par un faisceau analytique cohérent $\mathscr{L}$ qui coïncide avec $\mathscr{M}$ sur $X - Z$. Le faisceau $\mathscr{L}$, localement libre sur $X - Z$, est muni d'une connexion intégrable et se prolonge donc en un fibré $\tilde{\mathscr{L}}$ sur $X' \times C - Z$ à connexion intégrable. La théorie élémentaire des équations différentielles à points singuliers réguliers permet d'étendre ce fibré en un fibré sur $X' \times P^1 - Z$ pour chaque section $\sigma : \mathbf{C}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$. On obtient alors un faisceau analytique cohérent sur $\tilde{X} := X' \times P^1$ qui prolonge $\tilde{\mathscr{L}}$ et que nous noterons $\tilde{\mathscr{L}}^\sigma$. Ce faisceau engendre un $\mathscr{D}_{\tilde{X}}$-module holonome $\tilde{\mathscr{M}}(*Z)$ qui étend $\mathscr{M}(*Z)$. Si $0, -1, \ldots$ ne sont pas dans l'image de σ le module $\tilde{\mathscr{M}}(*Z)$ est égal à son localisé le long de Z_∞. Le complexe $\mathbf{R}\tilde{p}_* \mathbf{DR}_{\tilde{p}_*}(\tilde{\mathscr{M}}(*Z))$ est un complexe de $\mathscr{D}_{X'}$-modules à cohomologie cohérente, ceci résulte de la cohérence des images directes par le morphisme projectif $\tilde{p}$, projection de $\tilde{X}$ sur X', du faisceau analytique $\tilde{\mathscr{L}}^\sigma$. Par suite, le complexe $\mathscr{M}' := \mathbf{R}\tilde{p}_* \mathbf{DR}_{\tilde{p}}(\tilde{\mathscr{M}}(*Z))$ est un complexe de la catégorie $D^b_h(\mathscr{D}_{X'})$ (cf. § 2). Il existe donc un diviseur T′ en dehors duquel les faisceaux de cohomologie de $\mathscr{M}'$ sont lisses. On peut supposer que le diviseur T, image inverse par p de T′, passe pas le point o. Nous allons voir que ce diviseur convient. En vertu du théorème (2.2.6), le complexe d'irrégularité de $\mathscr{M}'$ le long de T′ est égal à l'image directe par $\tilde{p}$ du faisceau d'irrégularité de $\tilde{\mathscr{M}}(*Z)$ le long du diviseur $\tilde{T}$ image inverse de T′ par $\tilde{p}$. On peut supposer que $\tilde{\mathscr{M}}(*Z)$ est égal à son localisé $\tilde{\mathscr{M}}(*Z \cup Z_\infty)$. Donc le faisceau $\mathbf{IR}^\vee_{\tilde{T}}(\tilde{\mathscr{M}}(*Z))$ est la restriction du faisceau $\mathbf{IR}^\vee_{Z \cup Z_\infty \cup \tilde{T}}(\tilde{\mathscr{M}})$ à $\tilde{T}$. Mais le module $\tilde{\mathscr{M}}(*Z)$ est lisse en dehors du diviseur $Z \cup Z_\infty \cup T$. D'autre part, le faisceau d'irrégularité de $\tilde{\mathscr{M}}(*Z)$ le long de Z est nul au point générique de Z par hypothèse et le faisceau d'irrégularité de $\tilde{\mathscr{M}}(*Z)$ le long de $Z_\infty \cup \tilde{T}$ est nul aux points génériques des diviseurs Z_∞ et $\tilde{T}$ par construction. On est sous les conditions du théorème (3.1.1), l'hypothèse de récurrence sur dim(X) montre que la dimension du support du faisceau $\mathbf{IR}^\vee_{Z \cup Z_\infty \cup \tilde{T}}(\tilde{\mathscr{M}})$ est nulle. Il en sera donc de même de la dimension du support du faisceau $\mathbf{IR}_{\tilde{T}}(\tilde{\mathscr{M}}(*Z))$ et par suite de celle du support de $\mathbf{IR}_{T'}(\mathscr{M}')$. Mais puisque la régularité le long de T′ passe à la cohomologie par (2.2.3), les faisceaux d'irrégularité le long de T′ des faisceaux de cohomologies de $\mathscr{M}'$ sont de dimension nulle. Comme $\dim(X') = \dim(X) - 1$ est au moins égale à deux, l'hypothèse de récurrence appliquée à X′, T′ et aux faisceaux de cohomologie de $\mathscr{M}'$ montre que $\mathbf{IR}_{T'}(\mathscr{M}')$ est nul. Donc $\mathbf{IR}_T(\mathscr{M}(*Z))$ est nul et $\mathscr{E}xt^n_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}(*Z \cup T), \mathscr{O}_X)_o = 0$. Ce qui achève la démonstration du théorème de comparaison (3.1.1).

3.2.2. Démonstration du théorème (3.1.2)

Soient Y une sous-variété fermée de X, Z une sous-variété de Y contenant le lieu singulier de Y définie localement par une équation et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome à support contenu dans Y et lisse hors de Z. Il s'agit de montrer que si le faisceau d'irrégularité de $\mathcal{M}$ le long de Z est de codimension dans Z au moins égale à un, ce faisceau est nul. Si Y est non singulière c'est le théorème (3.1.1). Dans le cas général nous allons raisonner par récurrence sur dim(Y) pour nous ramener au cas précédent.

3.2.2 α) Si $\dim(Y) = 1$ le faisceau $\mathbf{R}_Z(\mathcal{M})$ est nul et le théorème est vrai.

3.2.2 β) Si $\dim(Y) = 2$ le faisceau $\mathbf{R}_Z^\vee(M)$ est à support de dimension nulle et l'obstruction au théorème (3.1.2) est le faisceau $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}(*Z), \mathcal{O}_X)$ si $\dim(X) = n$. Pour montrer que ce faisceau est nul on peut supposer que X est une boule assez petite de dimension n centrée en un point o. Soit p une projection de X sur une boule X′ de dimension deux qui est finie sur Y. L'image directe par p de $\mathcal{M}(*Z)$ est un $\mathcal{D}_{X'}$-module holonome $\mathcal{M}'$. Il existe donc un diviseur Z′ de X′ hors duquel $\mathcal{M}'$ est lisse. Si T est l'image inverse de Z′ par p le faisceau $\mathbf{R}_{Z'}(\mathcal{M}')$ est l'image directe du faisceau ponctuel $\mathbf{R}_T(\mathcal{M}(*Z))$ et est donc ponctuel. Le faisceau $\mathbf{R}_{Z'}(\mathcal{M}')$ est nul en vertu du cas 3.2.1 β). Donc le faisceau $\mathbf{R}_T^\vee(\mathcal{M}(*Z))$ est nul et la suite exacte

$$\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}(*Z \cup T), \mathcal{O}_X) \to \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}(*Z), \mathcal{O}_X) \to 0$$

permet de conclure.

3.2.2 γ) Si $\dim(Y) \geqslant 3$ il passe par tout point de Z, en dehors d'un ensemble de dimension nulle, une hypersurface lisse X′ non caractéristique pour $\mathcal{M}(*Z)$. Notons Y′, Z′, $\mathcal{M}'$ les traces de Y, Z, $\mathcal{M}$ sur X′, on peut supposer que $\dim(Y') = \dim(Y) - 1$, $\dim(Z') = \dim(Z) - 1$ et que la codimension dans Z′ de la trace du support de $\mathbf{R}_Z(\mathcal{M})$ est au moins égale à un. Le théorème de Cauchy-Kowalewski montre que les hypothèses sur X, Y, Z, $\mathcal{M}$ se transmettent à X′, Y′, Z′, $\mathcal{M}'$. Prenons l'image directe de $\mathcal{M}'$ par l'immersion de X′ dans X, on obtient un $\mathcal{D}_X$-module holonome à support dans Y′ lisse en dehors de Z′ et dont le faisceau d'irrégularité le long de Z′ est de codimension au moins égale à un dans Z′. L'hypothèse de récurrence sur dim(Y) montre alors que ce faisceau est nul et donc que la dimension du support du faisceau $\mathbf{R}_Z(\mathcal{M})$ est nulle. On peut supposer que X est une boule assez petite de dimension n, en prenant une projection finie sur Y sur une boule de dimension dim(Y) et l'image directe de $\mathcal{M}(*Z)$ par cette projection, on se ramène d'abord au cas 3.2.1 γ), puis par le raisonnement 3.2.2 β) à montrer que $\mathbf{R}_Z(\mathcal{M})$ est nul.

3.2.3. Démonstration du théorème (3.1.4)

Il s'agit de montrer que si l'image inverse (ordinaire) $f^*\mathcal{M}$ d'un $\mathcal{D}_X$-module holonome $\mathcal{M}$ pour tout morphisme f d'un disque complexe D dans X n'a que des singularités régulières, le faisceau d'irrégularité de $\mathcal{M}$ le long de tout diviseur de X est nul. Soit Y le support de $\mathcal{M}$; nous allons raisonner par récurrence sur la dimension de Y. Si dim(Y) est nul le module $\mathcal{M}$ n'a pas de singularités et (3.1.4) est vrai. Supposons le théorème démontré pour les modules à support de dimension strictement inférieure à dim(Y). Il existe un diviseur Z de Y contenant le lieu singulier de Y (la question étant locale) en dehors duquel $\mathcal{M}$ est lisse. On a la suite exacte

$$0 \to \operatorname{alg} \Gamma_Z(\mathcal{M}) \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}(*Z) \to \operatorname{alg} H^1_Z(\mathcal{M}) \to 0.$$

Si l'image inverse de Z par f est de dimension zéro, les images inverses des $\mathcal{D}_X$-modules alg $\Gamma_Z(\mathcal{M})$ et alg $H^1_Z(\mathcal{M})$ par f n'ont pas de singularités et l'image inverse de $\mathcal{M}(*Z)$ n'a que des singularités régulières. Si l'image inverse de Z est de dimension un, l'image inverse de $\mathcal{M}(*Z)$ est nulle. Donc si $f^* \mathcal{M}$ n'a que des singularités régulières, $f^* \mathcal{M}(*Z)$ n'a que des singularités régulières. Prenant une section assez générale en point de Z assez général et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on montre par la méthode précédente que le faisceau $\mathbf{IR}_Z(\mathcal{M})$ est génériquement nul et donc nul en vertu du théorème de comparaison (3.1.2). En vertu du scholie (3.1.2)', le faisceau d'irrégularité le long de tout diviseur de $\mathcal{M}(*Z)$ est nul. Le faisceau d'irrégularité le long de tout diviseur de alg $H^1_Z(\mathcal{M})$ est donc nul. En vertu du corollaire (3.1.3) l'image inverse totale par f de alg $H^1_Z(\mathcal{M})$ n'a que des singularités régulières. Ceci entraîne que l'image inverse ordinaire par f de alg $\Gamma_Z(\mathcal{M})$ n'a que des singularités régulières et donc en vertu de l'hypothèse de récurrence le faisceau d'irrégularité le long de tout diviseur de alg $\Gamma_Z(\mathcal{M})$ est nul. Donc le faisceau d'irrégularité le long de tout diviseur de $\mathcal{M}$ est nul.

Cette méthode permet d'éviter le recours à la normalisation pour démontrer le théorème de comparaison de Deligne à partir du théorème (3.1.2).

3.2.4. Démonstration du théorème (3.1.9)

Le théorème (3.1.9) est l'analogue algébrique du théorème (3.1.4). Il s'agit de montrer que l'image inverse d'un $\mathcal{D}_Y$-module holonome sur une variété affine Y non singulière, sur toute courbe non singulière au-dessus de Y n'a que des singularités à distances finie et infinie si et seulement si le faisceau d'irrégularité de ce module le long de tout diviseur à distance finie et infinie de Y est nul. Par image directe on peut supposer que Y est l'espace projectif P^m. Soit une courbe non singulière $f: C \to P^m$ et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{P^m}$-module holonome dont le faisceau d'irrégularité le long de tout diviseur est nul. Le morphisme f se prolonge en un morphisme $\bar{f}$ de la compactification lisse de $\bar{C}$ de C sur P^m. Le module $\bar{f}^* \mathcal{M}$ n'a que des singularités régulières. La preuve est identique à la preuve du corollaire (3.1.3). Réciproquement, soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{P^m}$-module holonome dont l'image inverse sur toute courbe $\bar{C}$ au-dessus de P^m n'a que des singularités régulières, alors son faisceau d'irrégularité le long de tout diviseur de P^m est nul. La preuve est identique à la preuve du théorème (3.1.4). Le point est que pour tout $\mathcal{D}_{P^m}$-module holonome il passe, en dehors d'un ensemble de dimension nulle, un hyperplan P^{m-1} non caractéristique au voisinage de tout point pour la topologie transcendante.

3.2.5. Démonstration du théorème (3.1.8)

Il s'agit de montrer que le faisceau d'irrégularité d'un $\mathcal{D}_X$-module holonome le long de tout diviseur est nul si et seulement si son complexe d'irrégularité le long de tout point est nul. Dans un sens c'est une conséquence de la suite de Mayer-Vietoris. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome dont le complexe d'irrégularité le long de tout point est nul, alors $\mathbf{IR}_Z(\mathcal{M})$ est nul pour tout diviseur Z. Nous raisonnons par récurrence sur dim(X). Si dim(X) $= 1$ le théorème est bien entendu vrai. Supposons le théorème démontré pour les variétés de dimension $< \dim(X)$. Nous raisonnons par récurrence sur la dimension du support de $\mathcal{M}$. Si cette dimension est nulle il n'y a pas de singularités. Sinon, il existe un diviseur Z (la question est locale) ne contenant pas le support de $\mathcal{M}$ en dehors duquel $\mathcal{M}$ et son support sont lisses. En dehors d'un ensemble de Z de dimension nulle il passe par tout point de Z une hypersurface lisse X′ non caractéristique pour $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}(*Z)$. Notons $\mathcal{M}'$ la trace de $\mathcal{M}$ sur X′. Le complexe d'irrégularité le long de tout point de X′ de $\mathcal{M}'$ est égal, au décalage près, au complexe d'irrégularité de $\mathcal{M}$ le long de ce même point, il est donc nul par hypothèse. L'hypothèse de récurrence sur dim(X) et le théorème de Cauchy-Kowalewski montrent que $\mathbf{IR}_Z(\mathcal{M})$ est de support de codimension dans Z au moins égale à un. Le théorème de comparaison (3.1.2) montre que le faisceau $\mathbf{IR}_Z(\mathcal{M})$ est nul. On a les deux suites exactes suivantes :

$$0 \to \operatorname{alg} \Gamma_Z(\mathcal{M}) \to \mathcal{M} \to \mathcal{Q} \to 0,$$
$$0 \to \mathcal{Q} \to \mathcal{M}(*Z) \to \operatorname{alg} H^1_Z(\mathcal{M}) \to 0.$$

Le faisceau d'irrégularité le long de tout diviseur de $\mathcal{M}(*Z)$ est nul et par suite le faisceau d'irrégularité de $\mathcal{Q}$ le long de tout diviseur est nul, donc le complexe d'irrégularité de $\mathcal{Q}$ le long de tout point de X est nul, donc le complexe d'irrégularité de alg $\Gamma_Z(\mathcal{M})$ le long de tout point est nul. En vertu de l'hypothèse de récurrence sur la dimension du support, le faisceau d'irrégularité de alg $\Gamma_Z(\mathcal{M})$ le long de tout diviseur est nul. Donc, le faisceau d'irrégularité de $\mathcal{M}$ le long de tout diviseur est nul. C'est le théorème (3.1.8).

4. LE THÉORÈME DE COMPARAISON POUR LA COHOMOLOGIE DE DE RHAM DES CYCLES ÉVANESCENTS

Dans ce paragraphe nous allons montrer à partir du théorème de comparaison du § 3 le théorème de comparaison pour la cohomologie de de Rham des cycles évanescents de ([S.G.A. 7], XIV, 4.13, 4.15). A partir de là, on peut déduire avec Malgrange [M_4] que le théorème de rationalité des zéros du polynôme de Bernstein-Sato d'un germe de fonction holomorphe est *équivalent* au théorème de monodromie locale (cf. [L_2]). Le point clé de ce paragraphe est la *surjectivité* du morphisme variation sur les fonctions multiformes.

4.1. Cycles évanescents topologiques

Soient $f : X \to C$ une fonction complexe sur une variété analytique complexe X et Y l'image inverse de l'origine par f. Considérons le diagramme de [S.G.A. 7], XIV

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{X}^* & \longrightarrow & X^* & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{C}^* & \longrightarrow & C^* & \longrightarrow & C & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

où $\widetilde{C}^* \to C^*$ est un revêtement universel de $C^* := C - \{0\}$. Notons $\bar{j}$ l'application $\widetilde{X}^* \to X$ et $\Psi_f(\mathcal{O}_X) := i^{-1}\,\mathbf{R}\bar{j}_*\,\bar{j}^{-1}\,\mathcal{O}_X \cong i^{-1}\bar{j}_*\,\mathcal{O}_{\widetilde{X}^*}$. Ce dernier faisceau sur Y est un $\mathcal{D}_X$-module à gauche muni d'une action de la monodromie notée T. Il contient comme sous-faisceau de $\mathcal{D}_X$-module le faisceau des germes de fonctions multiformes de détermination finie $\Psi_f^{df}(\mathcal{O}_X)$ dont l'action de T admet un polynôme minimal (cf. [S.G.A. 7], XIV, § 4).

Théorème **(4.1.1).** — *Pour tout complexe* $\mathcal{M}$ *de la catégorie* $D^b_h(\mathcal{D}_X)$ *le morphisme canonique* $\mathbf{R}\,hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Psi_f^{df}(\mathcal{O}_X)) \to \mathbf{R}\,hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Psi_f(\mathcal{O}_X))$ *est un* isomorphisme.

Le théorème (4.1.1) permet de remplacer le complexe $\mathbf{R}\,hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Psi_f(\mathcal{O}_X))$ par $\mathbf{R}\,hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Psi_f^{df}(\mathcal{O}_X))$ qui a de bien meilleures propriétés de finitude du point de vue de la théorie des $\mathcal{D}_X$-modules.

Pour tout polynôme P de $\mathbf{C}[T]$ notons Var_P l'action de P(T) sur le faisceau $\Psi_f(\mathcal{O}_X)$. Si $P(T) = T - 1$ l'action de P(T) est par définition le *morphisme variation.*

Théorème **(4.1.2).** — *Pour tout polynôme non nul* P *le morphisme* Var_P *est surjectif.*

Preuve de (4.1.2). — Il suffit de le montrer pour $P(T) = T - \alpha$ où α est un nombre complexe non nul. Notons p le morphisme $\widetilde{X}^* \to X^*$ et considérons la suite exacte de faisceaux sur X^*

$$0 \to \mathrm{Ker}(T - \alpha) \to p_*\,\mathcal{O}_{\widetilde{X}^*} \to p_*\,\mathcal{O}_{\widetilde{X}^*} \to 0.$$

En effet, le morphisme Var_P est surjectif de façon évidente sur le faisceau $p_*\,\mathcal{O}_{\widetilde{X}^*}$. D'autre part, le faisceau $\mathrm{Ker}(T-\alpha)$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{X^*}$-modules localement libre de rang un. Comme Y est une hypersurface, tout point de Y admet un système fondamental de voisinages de Stein dont la trace sur X^* reste de Stein. En vertu du théorème B de Cartan le faisceau $R^1 j_*\,\mathrm{Ker}(T - \alpha)$ est nul, d'où la suite exacte de faisceaux sur Y

$$0 \to i^{-1} j_*\,\mathrm{Ker}(T - \alpha) \to \Psi_f(\mathcal{O}_X) \to \Psi_f(\mathcal{O}_X) \to 0.$$

Le théorème (4.1.2) en résulte. On en déduit bien sûr que l'action de Var_P sur $\Psi_f^{df}(\mathcal{O}_X)$ est surjective.

Remarque **(4.1.3).** — *Le raisonnement précédent montre que sur tout ouvert du plan complexe stable par la translation* $z \mapsto z + 1$ *l'équation aux différences finies* $G(z + 1) - G(z) = g(z)$ est résoluble *pour toute fonction holomorphe g. C'est là une démonstration bien plus simple que celle que possédaient les Anciens* (Guichard, Picard...) *dans divers cas particuliers, mais qui ne disposaient pas de l'outil cohomologique qui est le* théorème B de Cartan.

Si A désigne l'anneau $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$ alors pour tout complexe L de $D^b(A)$ on a un morphisme canonique

$$\mathbf{R}\,\varinjlim_{P}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}[T]}(\mathbf{C}[T]/\mathbf{C}[T]\,P, L) \to L,$$

où la limite inductive est prise selon l'ensemble filtrant des polynômes non nuls ordonnés par la divisibilité.

Proposition **(4.1.4).** — *Pour tout complexe* L *de* $D^b(A)$ *dont la cohomologie est formée d'espaces vectoriels complexes de dimension finie le morphisme précédent est un* isomorphisme.

Preuve de (4.1.4). — Le lemme du *way-out functor* nous ramène à supposer que L est un espace vectoriel complexe, puis que sa dimension est égale à un, auquel cas la vérification est immédiate.

Preuve de (4.1.1). — On peut supposer que $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome. Parce que $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent on a l'isomorphisme

$$\mathbf{R}\Psi_f(\mathbf{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) \cong \mathbf{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Psi_f(\mathcal{O}_X)).$$

Le complexe $\mathbf{R}\Psi_f(\mathcal{F})$ est défini pour tout complexe $\mathcal{F}$ dans ([S.G.A. 7], XIV). Mais en vertu du théorème de constructibilité le complexe $\mathbf{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ est constructible. En vertu du théorème de fibration de Le [Le$_1$] pour tout point x de Y les espaces de cohomologie du complexe $\mathbf{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Psi_f(\mathcal{O}_X))_x$ sont isomorphes aux espaces de cohomologie de la fibre de Milnor à valeur dans le complexe $\mathbf{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$. Ce sont donc des espaces vectoriels complexes de dimension finie. Pour montrer le théorème (4.1.1) il suffit de prouver que le morphisme

$$\mathbf{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Psi_f^{rdf}(\mathcal{O}_X))_x \to \mathbf{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Psi_f(\mathcal{O}_X))_x$$

est un isomorphisme pour tout point x de Y. Prenons une résolution libre $\mathcal{D}^\bullet$ au voisinage de x de $\mathcal{M}$ par des $\mathcal{D}_X$-modules libres de type fini, il suffit alors de montrer que le morphisme canonique

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_x}(\mathcal{D}_x^\bullet, \Psi_f^{rdf}(\mathcal{O}_X)_x) \to \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_x}(\mathcal{D}_x^\bullet, \Psi_f(\mathcal{O}_X)_x)$$

est un isomorphisme. Notons L le complexe de droite qui a les propriétés de la proposition (4.1.4), est donc isomorphe à $\mathbf{R}\varinjlim_P \mathrm{hom}_{\mathbf{C}[T]}(\mathbf{C}[T]/\mathbf{C}[T]\,P, L)$, puis isomorphe à $\varinjlim_P \mathrm{hom}_{\mathbf{C}[T]}(\mathbf{C}[T]/\mathbf{C}[T]\,P, L)$, en vertu de la proposition (4.1.2). Pour tout polynôme non nul P on a un triangle distingué de la catégorie $D^b(\mathbf{C}_Y)$

$$\mathbf{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathrm{Ker}(P, \Psi_f(\mathcal{O}_X))) \to \mathbf{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Psi_f(\mathcal{O}_X)) \\ \to \mathbf{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Psi_f(\mathcal{O}_X))$$

et $\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_x}(\mathcal{D}_x^\bullet, \mathrm{Ker}(P, \Psi_f(\mathcal{O}_X)_x))$ est isomorphe au complexe $\mathrm{hom}_{\mathbf{C}[T]}(\mathbf{C}[T]/\mathbf{C}[T]\,P, L)$. Prenant la limite inductive, on trouve que le complexe $\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_x}(\mathcal{D}_x^\bullet, \varinjlim_P \mathrm{Ker}(P, \Psi_f(\mathcal{O}_X)_x))$ est isomorphe au complexe $\varinjlim_P \mathrm{hom}_{\mathbf{C}[T]}(\mathbf{C}[T]/\mathbf{C}[T]\,P, L)$. Mais par définition on a $\Psi_f^{rdf}(\mathcal{O}_X) := \varinjlim_P \mathrm{Ker}(P, \Psi_f(\mathcal{O}_X))$. D'où le théorème (4.1.1).

4.2. Cycles évanescents topologiques modérés

On conserve les notations du 4.1. Choisissons une coordonnée t sur le plan complexe C et une fonction $\mathrm{Log}(t)$ sur $\widetilde{\mathbf{C}}^*$ telle que $\exp(\mathrm{Log}(t)) = t$. Posons $t^\alpha := \exp(\alpha\, \mathrm{Log}(t))$ pour tout nombre complexe α. Si $-1 \leqslant \mathrm{Re}\,\alpha < 0$ posons, pour $p \in \mathbf{N}$,

$$\mathcal{N}_{\alpha,p} := \bigoplus\nolimits_{0 \leqslant k \leqslant p} \mathcal{O}_{\mathrm{C}}(*0)\, t^{\alpha+1}(\mathrm{Log}(t))^k,$$

qui est un $\mathcal{D}_{\mathrm{C}}$-module holonome muni d'une action de la monodromie $\exp\big(2\pi\sqrt{-1}\,t\,\partial_t\big)$ dont la singularité à l'origine est régulière. Notons $\mathrm{Nils}^{\alpha}_{f,p}(\mathcal{O}_{\mathrm{X}})$ l'image inverse par f du $\mathcal{D}_{\mathrm{C}}$-module $\mathcal{N}_{\alpha,p}$; c'est un $\mathcal{D}_{\mathrm{X}}$-module muni d'une action de la monodromie T et holonome régulier en vertu de (3.1.3). Posons

$$\begin{aligned}
\Psi^{\alpha,p}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) &:= j_* j^{-1}\, \mathrm{Nils}^{\alpha,p}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}),\\
\mathrm{Nils}^{\alpha}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) &:= \varinjlim_p \mathrm{Nils}^{\alpha,p}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}),\\
\Psi^{\alpha}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) &:= \varinjlim_p \Psi^{\alpha,p}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) \quad \text{et}\\
\mathrm{Nils}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) &:= \bigoplus\nolimits_{-1 \leqslant \mathrm{Re}\,\alpha < 0} i^{-1}\, \mathrm{Nils}^{\alpha}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}).
\end{aligned}$$

On a la décomposition de $\mathcal{D}_{\mathrm{X}}$-modules ([S.G.A. 7], XIV, 4.7) :

$$\Psi^{df}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) := \bigoplus\nolimits_{1 \leqslant \mathrm{Re}\,\alpha < 0} i^{-1}\, \Psi^{\alpha}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}})$$

et un morphisme de $\mathcal{D}_{\mathrm{X}}$-modules : $\mathrm{Nils}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) \to \Psi^{df}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}})$.

Théorème **(4.2.1).** — *Pour tout complexe* $\mathcal{M}$ *de la catégorie* $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hr}}(\mathcal{D}_{\mathrm{X}})$ *le morphisme canonique* $\mathbf{R}\, hom_{\mathcal{D}_{\mathrm{X}}}(\mathcal{M}, \mathrm{Nils}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}})) \to \mathbf{R}\, hom_{\mathcal{D}_{\mathrm{X}}}(\mathcal{M}, \Psi^{df}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}))$ *est un isomorphisme.*

Preuve. — On peut supposer que $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{\mathrm{X}}$-module holonome régulier. Il suffit de montrer que pour tout α et tout p le morphisme canonique

$$\mathbf{R}\, hom_{\mathcal{D}_{\mathrm{X}}}(\mathcal{M}, \mathrm{Nils}^{\alpha,p}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}})) \to \mathbf{R}\, hom_{\mathcal{D}_{\mathrm{X}}}(\mathcal{M}, \Psi^{\alpha,p}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}))$$

est un isomorphisme ou que le morphisme canonique

$$\mathbf{DR}(\mathcal{M}^* \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathrm{Nils}^{\alpha,p}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}})) \to \mathbf{R} j_* j^{-1}\, \mathbf{DR}(\mathcal{M}^* \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathrm{Nils}^{\alpha,p}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}))$$

est un isomorphisme. Mais, par définition, le cône de ce dernier morphisme est égal au faisceau d'irrégularité $\mathbf{IR}_{\mathrm{Y}}(\mathcal{M}^* \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathrm{Nils}^{\alpha,p}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}))$. Si $\mathcal{M}$ est régulier son dual est régulier (2.2.5), (3.1.4), et le produit tensoriel $\mathcal{M}^* \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathrm{Nils}^{\alpha,p}_f(\mathcal{O}_{\mathrm{X}})$ est régulier (3.1.6). Son faisceau d'irrégularité le long de Y est donc nul et le théorème en résulte.

4.3. Cycles évanescents modérés pour les $\mathcal{D}_{\mathrm{X}}$-modules

Gardons toujours les notations précédentes et supposons que Y est non singulière. Notons $\leqslant$ l'ordre total lexicographique sur le corps **C**. Posons

$$\mathcal{V}_p(\mathcal{D}_{\mathrm{X}}) := \{\, \mathrm{P} \in \mathcal{D}_{\mathrm{X}},\ \mathrm{P}(\mathcal{I}^k_{\mathrm{Y}}) \subset \mathcal{I}^{k-p}_{\mathrm{Y}} \text{ pour tout } k \in \mathbf{Z} \,\}$$

où $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}}$ est l'idéal de Y et $\mathscr{I}^k_{\mathrm{Y}} := \mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ pour $k \leqslant 0$. On obtient une filtration de $\mathscr{D}_{\mathrm{X}}$ indexée par **Z**. Posons $\mathrm{gr}^{\mathrm{V}}_0(\mathscr{D}_{\mathrm{X}}) := \mathscr{V}_0(\mathscr{D}_{\mathrm{X}})/\mathscr{V}_{-1}(\mathscr{D}_{\mathrm{X}})$. Si t est une équation locale de Y et u une section locale non nulle d'un $\mathscr{D}_{\mathrm{X}}$-module holonome $\mathscr{M}$ l'équation fonctionnelle de Bernstein-Sato [K_4] (voir aussi [N-M]) affirme l'existence d'un polynôme non nul B à coefficients complexes tels que $\mathrm{B}(t\,\partial_t)\,u \in \mathscr{V}_{-1}(\mathscr{D}_{\mathrm{X}})\,u$. Notons b_u le générateur monic de l'idéal des polynômes B ayant cette propriété et $\mathrm{ord}_{\mathrm{Y}}(u)$ ses zéros complexes. Posons $\mathscr{V}_\alpha(\mathscr{M})_x := \{\, u \in \mathscr{M}_x,\ -\alpha - 1 \leqslant \mathrm{ord}_{\mathrm{Y}}(u)\,\}$ et $\mathscr{V}_\alpha(\mathscr{M}) := \cup_x \mathscr{V}_\alpha(\mathscr{M})_x$. On obtient la filtration de Malgrange-Kashiwara de $\mathscr{M}$ le long de Y ([M_4], [K_6]). Posons

$$\mathrm{gr}^{\mathrm{V}}_\alpha(\mathscr{M}) := \mathscr{V}_\alpha(\mathscr{M})/\cup_{\alpha>\beta}\mathscr{V}_\beta(\mathscr{M})$$

qui sont des $\mathrm{gr}^{\mathrm{V}}_0(\mathscr{D}_{\mathrm{X}})$-modules cohérents munis d'un endomorphisme localement nilpotent $\mathrm{Eu} + \alpha + 1$ où Eu est le champ d'Euler, section distinguée de $\mathrm{gr}^{\mathrm{V}}_0(\mathscr{D}_{\mathrm{X}})$. En fait, on a un isomorphisme local $\mathrm{gr}^{\mathrm{V}}_0(\mathscr{D}_{\mathrm{X}}) \cong \mathscr{D}_{\mathrm{Y}}[t\,\partial_t]$ et pour tout α $\mathrm{gr}^{\mathrm{V}}_\alpha(\mathscr{M})$ est un $\mathscr{D}_{\mathrm{Y}}$-module holonome (cf. [S-M]). De plus, le complexe $\mathrm{gr}^{\mathrm{V}}_{-1}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\partial_t} \mathrm{gr}^{\mathrm{V}}_0(\mathscr{M})$ représente localement le complexe $i^!\mathscr{M} := (\mathbf{L}i^*(\mathscr{M}^*))^*$ qui est donc placé en degrés 0, 1 (cf. *loc. cit.*). Posons

$$\mathscr{M}_{\alpha,p} := \mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}} \mathrm{Nils}^{\alpha,p}_f(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}),$$

qui est un $\mathscr{D}_{\mathrm{X}}$-module holonome muni d'une action de la monodromie T provenant de celle de $\mathrm{Nils}^{\alpha,p}_f(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$. Notons $\Psi^{m,\alpha,p}_t(\mathscr{M})$ le complexe $\mathrm{gr}^{\mathrm{V}}_{-1}(\mathscr{M}_{\alpha,p}) \xrightarrow{\partial_t} \mathrm{gr}^{\mathrm{V}}_0(\mathscr{M}_{\alpha,p})$ qui représente, localement, en vertu de ce qui précède, le complexe $i^!\mathscr{M}_{\alpha,p}$ et $\Psi^{m,\alpha}_t(\mathscr{M})$ la limite inductive des complexes $\Psi^{m,\alpha,p}_t(\mathscr{M})$ quand p tend vers l'infini. On obtient un complexe de $\mathscr{D}_{\mathrm{Y}}$-modules munis d'une action de la monodromie.

Proposition **(4.3.1)**. — *Pour tout* α, $-1 \leqslant \alpha < 0$, *on a un* isomorphisme *local de* $\mathscr{D}_{\mathrm{Y}}$*-modules de* $\mathrm{gr}^{\mathrm{V}}_\alpha(\mathscr{M})$ *dans le faisceau de cohomologie de degré zéro du complexe* $\Psi^{m,\alpha}_t(\mathscr{M})$; *l'action de* $\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,t\,\partial_t)$ *sur* $\mathrm{gr}^{\mathrm{V}}_\alpha(\mathscr{M})$ *correspond à l'action de la monodromie. De plus, le faisceau de cohomologie de degré un du complexe* $\Psi^{m,\alpha}_t(\mathscr{M})$ *est* nul.

Preuve de (4.3.1). — La preuve se fait par un calcul direct (voir [S-M], 4.7, et aussi [M_4]). On a donc un quasi-isomorphisme local de $\mathrm{gr}^{\mathrm{V}}_\alpha(\mathscr{M})$ sur le complexe $\Psi^{m,\alpha}_t(\mathscr{M})$. Pour p fixé on a un morphisme pour tout α, $-1 \leqslant \alpha < 0$,

$$i^{-1}\,\mathbf{DR}(\mathscr{M}_{\alpha,p}) \to \mathbf{DR}(i^!\mathscr{M}_{\alpha,p}) \cong \mathbf{DR}(\Psi^{m,\alpha,p}_t(\mathscr{M})).$$

Prenons une résolution injective de chaque complexe précédent et en passant à la limite en p on en déduit un morphisme (local) de $\mathrm{D}^b(\mathbf{C}_{\mathrm{Y}})$ compatible à l'action de la monodromie :

$$\varinjlim_p i^{-1}\,\mathbf{DR}(\mathscr{M}_{\alpha,p}) \to \mathbf{DR}(\varinjlim_p \Psi^{m,\alpha,p}_t(\mathscr{M})) \cong \mathbf{DR}(\mathrm{gr}^{\mathrm{V}}_\alpha(\mathscr{M})).$$

Théorème **(4.3.2)**. — *Si* $\mathscr{M}$ *est un* $\mathscr{D}_{\mathrm{X}}$*-module holonome régulier, le* $\mathscr{D}_{\mathrm{Y}}$*-module* $\mathrm{gr}^{\mathrm{V}}_\alpha(\mathscr{M})$ *est régulier et le morphisme* $\varinjlim_p i^{-1}\,\mathbf{DR}(\mathscr{M}_{\alpha,p}) \to \mathbf{DR}(\mathrm{gr}^{\mathrm{V}}_\alpha(\mathscr{M}))$ *est un* isomorphisme *pour tout* α, $-1 \leqslant \alpha < 0$.

Preuve. — Il suffit de montrer que pour tout p le morphisme

$$i^{-1}\,\mathbf{DR}(\mathscr{M}_{\alpha,p}) \to \mathbf{DR}(i^{!}\,\mathscr{M}_{\alpha,p})$$

est un isomorphisme. Mais, par définition, le cône de ce morphisme est isomorphe, au décalage près, au faisceau d'irrégularité le long de Y du $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}^*_{\alpha,p}$. Si $\mathscr{M}$ est régulier, ce faisceau est nul en vertu du § 3. Le $\mathscr{D}_Y$-module $\mathrm{gr}^V_\alpha(\mathscr{M})$ est isomorphe localement, en vertu de la proposition (4.3.1), au faisceau de cohomologie de degré zéro du complexe $i^{!}\,\mathscr{M}_{\alpha,p}$ pour p assez grand. Si $\mathscr{M}$ est régulier ce complexe est régulier ainsi que ses faisceaux de cohomologie en vertu de (2.2.3).

Si X, $\mathscr{M}$, f est un triplet comme ci-dessus, notons $\tilde{X} := X \times C$, $\tilde{Y} := X \times 0$, et $\tilde{\mathscr{M}}$ l'image directe de $\mathscr{M}$ par le morphisme graphe de f, δ_f. Les $\mathscr{D}_{\tilde{Y}}$-modules $\mathrm{gr}^V_\alpha(\tilde{\mathscr{M}})$ sont définis pour tout α. Notons encore $\mathrm{gr}^V_\alpha(\tilde{\mathscr{M}})$ leurs images directes par l'immersion canonique de $\tilde{Y}$ dans $\tilde{X}$. Posons $\mathrm{gr}^V_\alpha(\mathscr{M}) := \mathscr{T}or^{\delta_f^{-1}\mathscr{O}_{\tilde{X}}}(\mathscr{O}_X, \delta_f^{-1}\,\mathrm{gr}^V_\alpha(\tilde{\mathscr{M}}))$. Ce sont alors des $\mathscr{D}_X$-modules holonomes à support dans Y.

Définition **(4.3.3).** — *Pour un $\mathscr{D}_X$-module holonome $\mathscr{M}$ posons*

$$\Psi^m_f(\mathscr{M}) := \bigoplus\nolimits_{-1 \leq \mathrm{Re}\,\alpha < 0} \mathrm{gr}^V_\alpha(\mathscr{M}) \quad \text{et} \quad \Phi^m_f(\mathscr{M}) := \bigoplus\nolimits_{-1 < \mathrm{Re}\,\alpha \leq 0} \mathrm{gr}^V_\alpha(\mathscr{M})$$

qui sont alors des $\mathscr{D}_X$-modules holonomes munis d'une action de la monodromie.

Si on choisit une coordonnée t sur le plan complexe C et une fonction $\mathrm{Log}(t)$, l'action de la monodromie sur les $\mathscr{D}_X$-modules $\Psi^m_f(\mathscr{M})$ et $\Phi^m_f(\mathscr{M})$ est représentée par $\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,t\,\partial_t)$ et on a un morphisme can : $\Psi^m_f(\mathscr{M}) \to \Phi^m_f(\mathscr{M})$ donné par l'identité sur $\mathrm{gr}^V_\alpha(\mathscr{M})$ pour $\alpha \neq -1$ et par ∂_t pour $\alpha = -1$. Conjuguant les théorèmes (4.1.1), (4.2.1) et (4.3.2), on trouve que si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier on a le diagramme suivant de complexes constructibles sur Y munis d'une action de la monodromie, où les morphismes horizontaux sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{DR}(\Psi^m_f(\mathscr{M})),\ \exp(-2\pi\sqrt{-1}\,t\,\partial_t) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{R}\Psi_f(\mathbf{DR}(\mathscr{M}))\,[-1],\ \mathrm{T}. \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{DR}(\Phi^m_f(\mathscr{M})),\ \exp(-2\pi\sqrt{-1}\,t\,\partial_t) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{R}\Phi_f(\mathbf{DR}(\mathscr{M}))\,[-1],\ \mathrm{T}.
\end{array}$$

5. LE THÉORÈME D'EXISTENCE DE RIEMANN

Dans ce paragraphe nous allons montrer le théorème d'existence de Riemann (cf. [D]) à partir du théorème de prolongement des faisceaux analytiques cohérents de Frisch-Guenot [F-G] et de Siu ([Si$_1$], [Si$_2$]), sans utiliser le théorème général d'Hironaka.

5.1. Le théorème de prolongement des faisceaux analytiques cohérents

Soient T un espace analytique complexe et S′ un sous-espace analytique de T de dimension $\leqslant p$ et $\mathscr{G}$ un faisceau analytique cohérent sur T — S′. Notons $S_k(\mathscr{G})$ l'ensemble des points de T — S′ où la profondeur de $\mathscr{G}$ est au plus égale à k pour tout entier k. C'est alors un sous-espace analytique de T — S′ (cf. [G_2], [S-T]).

Théorème **(5.1.1)** ([F-G], [Si_1]). — *Avec les notations précédentes, si* $\dim(S_k(\mathscr{G})) \leqslant k-2$ *pour tout* $k \leqslant p+2$, *alors l'image directe de* $\mathscr{G}$ *par l'inclusion canonique de* T — S′ *dans* T *est un faisceau analytique cohérent sur* T.

Pour un rapport sur le théorème de prolongement, voir l'exposé de A. Douady [Do].

Soient maintenant T un espace analytique normal, S un sous-espace analytique de T partout de codimension égale au moins à 2, et $\mathscr{G}$ un faisceau analytique localement libre de type fini sur T — S.

Corollaire **(5.1.2)**. — *Sous les hypothèses précédentes supposons qu'il existe un fermé analytique* S′ *de* S *de codimension dans* T *partout au moins égale à* 3 *en dehors duquel le faisceau* $\mathscr{G}$ *est prolongeable en un faisceau analytique cohérent; alors l'image directe de* $\mathscr{G}$ *par l'inclusion canonique de* T — S *dans* T *est un faisceau* analytique cohérent *sur* T.

Preuve. — Notons i' l'inclusion canonique de T — S dans T — S′. En vertu du théorème de prolongement de Serre [S_2] le faisceau $i'_*\mathscr{G}$ est analytique cohérent sur T — S′. De plus, l'ensemble $S_k(\mathscr{G})$ est de dimension au plus $k-2$ pour tout $k \leqslant \dim(T)-1$ (cf. [G_2], ([S-T], théorème 1.14, $c \Rightarrow b$)). On est dans les conditions d'application du théorème (5.1.1) pour $p = \dim(T)-3$ et pour le faisceau cohérent $i'_*\mathscr{G}$. On aurait pu invoquer que ce faisceau est réflexif [S_2] et appliquer le théorème 5 de [Si_1].

Remarque **(5.1.3)**. — *On aurait pu utiliser, pour démontrer les théorèmes* (5.2.1) *et* (5.3.2), *le théorème de prolongement de* Siu [Si_2] *des faisceaux analytiques cohérents en dehors d'un ensemble de codimension* 2 *prolongeable fibre par fibre pour un morphisme de dimension relative* 2. *La démonstration de ce dernier théorème est nettement plus compliquée que celle du théorème* (5.1.1). *Cependant, il peut être utilisé pour une démonstration de théorèmes analogues aux théorèmes* (5.2.1) *et* (5.3.2) *en présence de singularités irrégulières (cf.* [M_6]*)*.

5.2. Le théorème d'existence de Riemann pour les connexions méromorphes

Soient X une variété analytique complexe de dimension n, Z une hypersurface de X et $\mathscr{F}_U$ un système local d'espaces vectoriels complexes de dimension finie sur $U := X - Z$. Notons $W := X - \mathrm{sing}(Z)$ le complémentaire du lieu singulier sing(Z) de Z. Si on fixe une section $\sigma : \mathbf{C}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ de la projection naturelle $\mathbf{C} \to \mathbf{C}/\mathbf{Z}$, la théorie élémentaire des équations différentielles à points singuliers réguliers permet d'étendre le fibré plat $\mathcal{O}_U \otimes_C \mathcal{F}_U$ en un fibré $\mathcal{L}_W^\alpha$ analytique localement libre sur W muni d'une connexion logarithmique le long de la partie lisse de Z (cf. [D] ou 3.2.1 β). Notons i l'inclusion canonique de W dans X.

Théorème **(5.2.1).** — *Avec les notations précédentes l'image directe* $i_* \mathcal{L}_W^\alpha$ *est un faisceau* analytique cohérent *sur* X.

Preuve de (5.2.1). — Si le lieu singulier sing(Z) de Z est de codimension au moins égale à trois dans X, le théorème (5.2.1) est déjà conséquence du théorème de prolongement (5.1.1). Ceci montre que le procédé d'Hironaka qui consiste en commençant par éclater les strates de grandes codimensions n'est pas indispensable dans notre contexte. Supposons que la codimension de sing(Z) dans X est égale à deux. En vertu du corollaire (5.1.2) il suffit, pour prouver le théorème (5.2.1), de montrer que le faisceau analytique localement libre $\mathcal{L}_W^\alpha$ est prolongeable en un faisceau analytique cohérent en dehors du lieu singulier sing(sing(Z)) de sing(Z). C'est alors un problème local au voisinage de chaque point lisse de sing(Z). Soient V un voisinage dans X d'un point lisse de sing(Z) et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des coordonnées locales au-dessus de V telles que sing(Z) soit défini par $x_1 = x_2 = 0$. On a une rétraction de V sur V $\cap$ sing(Z) définie par $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_3, \ldots, x_n)$. Le diviseur Z apparaît au voisinage de V comme une famille de courbes planes paramétrées par V $\cap$ sing(Z). Posons $(V_0, Z_0) := (V, V \cap Z)$ et soit (V_k, Z_k) $(k \geqslant 1)$ le couple obtenu à partir du couple (V_{k-1}, Z_{k-1}) en éclatant, dans V_{k-1}, le lieu singulier de Z_{k-1} et où Z_k est l'image inverse de Z_{k-1} par cet éclatement. On obtient alors le théorème suivant qui est une conséquence du théorème de résolution plongée des courbes planes :

Théorème **(5.2.2).** — *Avec les notations précédentes il existe un entier* N *tel que le couple* (V_N, Z_N) *est une résolution plongée du couple* (V, Z $\cap$ V) *au-dessus d'un ouvert de Zariski de* V *complémentaire d'un* fermé analytique propre de sing(Z) $\cap$ V.

Preuve de (5.2.2). — Si les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont assez générales, le discriminant de la restriction à V $\cap$ Z de la projection $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, \ldots x_n)$ coïncide génériquement avec l'image de sing(Z) $\cap$ V par cette projection. Le fermé propre de sing(Z) $\cap$ V du théorème (5.2.2) est fourni par la trace sur sing(Z) $\cap$ V des composantes de ce discriminant qui sont distinctes de sing(Z) $\cap$ V. En effet, il résulte du critère de Zariski sur l'équisingularité que Z $\cap$ V est équisingulier le long de sing(Z) $\cap$ V en dehors de ce fermé, et donc que le procédé de résolution plongée des courbes de la famille Z $\cap$ V est le même en dehors du fermé de sing(Z) $\cap$ V en question (cf. [T]). C'est le théorème (5.2.2).

Preuve de (5.2.1) (suite et fin). — Soit $\pi : (V_N, Z_N) \to (V, V \cap Z)$ le couple obtenu dans le théorème (5.2.2). Au-dessus de l'ouvert de Zariski de V du théorème (5.2.2) V_N est lisse et Z_N, image inverse de Z $\cap$ V par π, est un diviseur à croisements normaux relatif. Soient $\widetilde{W} := \pi^{-1} W \cap V$ et $\widetilde{\mathscr{L}}^{\alpha}_{W}$ l'image inverse du fibré $\mathscr{L}^{\alpha}_{W}$. Là encore, la théorie des équations différentielles à points singuliers réguliers permet d'étendre, au-dessus de l'ouvert de Zariski de V du théorème (5.2.2), le fibré $\widetilde{\mathscr{L}}^{\alpha}_{W}$ en un fibré analytique localement libre (cf. [D] ou 3.2.1 β). Prenons l'image directe par le morphisme projectif π de cette extension, on obtient, en vertu du théorème de Grauert-Remmert [G-R$_1$], des images directes des faisceaux analytiques cohérents par un morphisme projectif, un prolongement du fibré $\mathscr{L}^{\alpha}_{W}$ en un faisceau analytique cohérent sur le complémentaire dans V d'un ensemble analytique de codimension au moins égale à trois. Appliquons de nouveau le corollaire (5.1.2), on trouve que le fibré $\mathscr{L}^{\alpha}_{W}$ est prolongeable en un faisceau analytique cohérent sur V tout entier. C'est le théorème (5.2.1).

Remarque **(5.2.3).** — *L'ensemble* $S_{n-1}(i_* \mathscr{L}^{\alpha}_{W})$ *est analytique fermé de* Z *et de dimension au plus* $\dim(X) - 3$. *Donc, le réseau* $i_* \mathscr{L}^{\alpha}_{W}$ *est localement libre en dehors d'un ensemble de codimension au moins* 3 *dans* X. *En particulier, si* $\dim(X) = 2$, *ce réseau est localement libre. Plus généralement, l'ensemble* $S_k(i_* \mathscr{L}^{\alpha}_{W})$ *est analytique fermé dans* Z *de dimension au plus* $k - 2$. *Ce sont là des conditions similaires à celles de support de la définition* (2.1.1). *Il n'est pas impossible que la stratification* $S_k(i_* \mathscr{L}^{\alpha}_{W})$ *soit liée à la variété caractéristique du prolongement intermédiaire du système local* $\mathscr{F}_U$.

Par construction, le réseau $\mathscr{L}^{\alpha}_{W}$ est muni d'une action de $\mathscr{D}_W$ et on peut considérer le sous-$\mathscr{D}_W$-module $\mathscr{D}_W \mathscr{L}^{\alpha}_{W}$ du $\mathscr{D}_W$-module $i^{-1} j_*(\mathscr{O}_U \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{F}_U)$ où j désigne l'inclusion canonique de U dans X. Le réseau $\mathscr{L}^{\alpha}_{X} := i_* \mathscr{L}^{\alpha}_{W}$ est alors un faisceau analytique cohérent sur X contenu dans le $\mathscr{D}_X$-module $i_* \mathscr{D}_W \mathscr{L}^{\alpha}_{W}$ et on peut considérer le sous-$\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{D}_X \mathscr{L}^{\alpha}_{X}$ engendré par le réseau $\mathscr{L}^{\alpha}_{X}$.

Proposition **(5.2.4).** — *Le* $\mathscr{D}_X$*-module* $\mathscr{D}_X \mathscr{L}^{\alpha}_{X}$ *engendré par le réseau* $\mathscr{L}^{\alpha}_{X}$ *est* cohérent.

Preuve. — De façon plus précise nous allons montrer que la filtration $\mathscr{D}_k \mathscr{L}^{\alpha}_{X} (k \in \mathbf{N})$ est une bonne filtration (cf. § 1). Il suffit de montrer que le $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{D}_k \mathscr{L}^{\alpha}_{X}$ est cohérent pour tout k. Mais $\mathscr{D}_k \mathscr{L}^{\alpha}_{X}$ est un sous-$\mathscr{O}_X$-module de type fini de $i_* i^{-1} \mathscr{D}_k \mathscr{L}^{\alpha}_{X}$. Il suffit de montrer que $i_* i^{-1} \mathscr{D}_k \mathscr{L}^{\alpha}_{X}$ est un faisceau analytique cohérent. Soit $\mathscr{I}_Z$ l'idéal de Z; $i^{-1} \mathscr{D}_k \mathscr{L}^{\alpha}_{X}$ est l'image de $i^{-1} \mathscr{D}_k \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}^{\alpha}_{X}$ dans $i^{-1} hom_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{I}^k_Z, \mathscr{L}^{\alpha}_{X})$ par le morphisme canonique. C'est donc un $\mathscr{O}_W$-module cohérent sans torsion. Mais il est prolongeable en faisceau cohérent parce que quotient d'un faisceau prolongeable $i^{-1} \mathscr{D}_k \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}^{\alpha}_{X}[S_2]$. Donc $i_* i^{-1} \mathscr{D}_k \mathscr{L}^{\alpha}_{X}$ est un faisceau analytique cohérent et la proposition (5.2.4) en résulte.

Notons $\mathscr{M}(Z, \mathscr{F}_U)$ le $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{D}_X \mathscr{L}^{\alpha}_{X}(*Z)$ qui est holonome parce que localisé d'un $\mathscr{D}_X$-module cohérent lisse en dehors de Z [K$_4$] (voir aussi [N-M]). Son faisceau d'irrégularité le long de Z est à support contenu dans sing(Z) par construction. Ce faisceau est alors nul en vertu du théorème de comparaison (3.1.1) et le module $\mathscr{M}(Z, \mathscr{F}_U)$ est régulier en vertu de (3.1.4). De plus il est de la forme $\mathscr{O}_X(*Z) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}^{\alpha}_{X}$ avec un réseau globalement défini. Notons $\mathbf{DR}_r^Z$ le foncteur qui à une connexion méromorphe régulière le long de Z associe son système local des sections horizontales sur U. On a alors démontré le théorème d'existence de Riemann :

Théorème **(5.2.5).** — *Le foncteur* $\mathbf{DR}_r^Z$ *est* essentiellement surjectif.

Conjuguant (5.2.5) avec (2.2.9), on obtient :

Théorème **(5.2.6).** — *Le foncteur* $\mathbf{DR}_r^Z$ *est une* équivalence *de catégories abéliennes.*

La démonstration du théorème (5.2.6) n'a nécessité que le procédé de résolution plongée d'un germe de courbe plane. En fait, cela s'explique par le théorème suivant :

Théorème **(5.2.7).** — *Si* X *est une boule assez petite de* $\mathbf{C}^n$, *le foncteur qui à une connexion méromorphe le long de* Z *dont le faisceau d'irrégularité le long de* Z *est nul, associe son image inverse sur* $X \cap L$ *où* L *est un* 2*-plan affine assez général est une équivalence de catégorie.*

Preuve. — Ceci résulte du théorème (5.2.6) et du théorème de Zariski de type Lefschetz de Hamm-Le [H-L].

Remarque **(5.2.8).** — *Ceci suggère, comme nous l'a fait remarquer Malgrange (cf.* [M_6]*), que le théorème* (5.2.7) *doit rester vrai pour les connexions irrégulières en un sens précisé plus bas et donc une première étape consiste à démontrer un théorème de type Lefschetz-Zariski local pour les groupes de Galois différentiels locaux associés aux catégories des connexions méromorphes le long d'une hypersurface (cf.* [Sa], [D-M]*). La catégorie des connexions sur* X *méromorphes le long d'une hypersurface* Z *admet un produit tensoriel qui en fait une* $\otimes$*-catégorie rigide telle que* $\mathrm{End}(1) = \mathbf{C}$ *et tout point de* U *définit un foncteur fibre. Elle est donc équivalente à la catégorie des représentations complexes d'un schéma en groupe affine* G *(cf.* [Sa], [D-M]*). Cependant, pour avoir une théorie raisonnable il faut comme en dimension un fixer la forme formelle. On se donne alors une connexion formelle* $\hat{N}$, *c'est-à-dire un module cohérent sur le localisé le long de* Z *du complété formel de* $\mathcal{O}_X$ *le long de* Z *muni d'une action de* $\mathcal{D}_X$. *On considère la sous-catégorie des connexions méromorphes le long de* Z *dont la forme formelle appartient à la catégorie* $\langle \hat{N} \rangle$ *engendrée par* $\hat{N}$. *C'est une sous-catégorie équivalente à la catégorie des représentations complexes d'un groupe* quotient *de* G *(cf.* [Sa], [D-M]*). C'est pour un tel groupe* quotient *qu'on doit avoir un théorème de type Lefschetz-Zariski local.*

Remarque **(5.2.9).** — Gabber *a démontré un théorème de Lefschetz pour le Groupe* G *associé à la catégorie des fibrés à connexion intégrable sur un ouvert de Zariski de l'espace projectif sur un corps de caractéristique nulle (cf. exposé du 6-12-1988 du Séminaire d'Arithmétique et de Géométrie algébrique d'Orsay).*

5.3. Le théorème d'existence de Riemann pour les faisceaux constructibles élémentaires

5.3.1. Soient Y un sous-espace analytique fermé normal d'une variété analytique complexe X et Z un sous-espace analytique fermé de Y défini localement par une équation et contenant le lieu singulier sing(Y) de Y. Notons $W := Y - (\mathrm{sing}(Y) \cup \mathrm{sing}(Z))$ et i l'inclusion canonique de W dans Y. Soit $\mathscr{F}_U$ un système local d'espaces vectoriels complexes de dimension finie sur $U := Y - Z$. Si on choisit une section $\sigma : \mathbf{C}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ de la projection $\mathbf{C} \to \mathbf{C}/\mathbf{Z}$, la théorie élémentaire des équations différentielles permet d'étendre le fibré plat $\mathcal{O}_U \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{F}_U$ en un fibré $\mathscr{L}_W^\sigma$ à connexion logarithmique le long de la partie lisse de Z.

Théorème **(5.3.2).** — *L'image directe* $i_* \mathscr{L}_W^\sigma$ *est un faisceau* analytique cohérent *sur* Y.

Preuve de (5.3.2). — En dehors de sing(Y) le fibré $\mathscr{L}_W^\sigma$ se prolonge en un faisceau analytique cohérent sans torsion en vertu du théorème (5.2.1). Si la codimension de sing(Y) dans Y est au moins égale à trois, le théorème est conséquence du corollaire (5.1.2) du théorème de prolongement (5.1.1). Supposons la codimension de sing(Y) égale à deux. La question est locale au voisinage de chaque point lisse de sing(Y). Soit V un voisinage d'un tel point et $p : V \to V \cap \mathrm{sing}(Y)$ une rétraction assez générale sur $V \cap \mathrm{sing}(Y)$ induite par une projection assez générale d'un prolongement de V dans un ouvert d'un espace numérique. Posons $V_0 := V$ et considérons la suite d'espaces $V_1, \ldots, V_k, V_{k+1}$ obtenue à partir de V_0 par le procédé de Zariski suivant : V_{k+1} est obtenu en normalisant l'éclatement dans V_k de l'ensemble critique du morphisme $V_k \to V \cap \mathrm{sing}(Y)$.

Théorème **(5.3.3).** — *Il existe un entier* N *tel que l'espace* V_N *est lisse au-dessus d'un ouvert de Zariski de* V *complémentaire d'un fermé analytique propre de* $\mathrm{sing}(Y) \cap V$.

Preuve de (5.3.3). — Pour tout k il existe un ouvert de Zariski O_k de $V \cap \mathrm{sing}(Y)$ non vide tel que la fibre au-dessus d'un point de O_k du morphisme $V_{k+1} \to \mathrm{sing}(Y) \cap V$ est la surface obtenue par le procédé de Zariski à partir de la surface fibre au-dessus du même point du morphisme $V_k \to V \cap \mathrm{sing}(Y)$ [Z]. En effet, les opérations d'éclatement et de normalisation commutent génériquement au passage aux fibres. L'intersection des ouverts O_k est non vide et donc en vertu du théorème de désingularisation à la Zariski des surfaces excellentes nœthériennes au-dessus d'un corps de caractéristique zéro (cf. [Li]) il existe un point de $\mathrm{sing}(Y) \cap V$ et un entier N tels que la fibre au-dessus de ce point du morphisme $V_N \to V \cap \mathrm{sing}(Y)$ est sans singularités. Donc, le lieu critique du morphisme $V_N \to \mathrm{sing}(Y) \cap V$ se projette sur un fermé analytique propre de $\mathrm{sing}(Y) \cap V$. Comme ce lieu critique contient le lieu singulier de V_N, il en résulte que V_N est lisse au-dessus d'un ouvert de Zariski de V complémentaire de l'image de ce lieu critique par morphisme $V_N \to \mathrm{sing}(Y) \cap V$. C'est le théorème (5.3.3).

Preuve de (5.3.2) (suite et fin). — L'image inverse du fibré $\mathscr{L}^{\sigma}_{W\cap V}$ sur V_N se prolonge en un faisceau analytique cohérent au-dessus de l'ouvert V du théorème (5.3.3) en vertu de (5.2.1). Prenons son image directe par le morphisme $V_N \to V$. On obtient, en vertu du théorème de Grauert-Remmert [G-R$_1$], un prolongement de $\mathscr{L}^{\sigma}_{W\cap V}$ en un faisceau analytique cohérent en dehors d'un ensemble de V de codimension au moins 3. En appliquant le corollaire (5.1.2), on obtient un prolongement cohérent sur V de $\mathscr{L}^{\sigma}_{W\cap V}$ et le théorème (5.3.2).

5.3.4. Soit maintenant un couple $Z \subset Y$ d'espaces analytiques fermés de la variété analytique X tels que Y est réduit et que Z contienne le lieu singulier de Y et soit défini localement par une équation. Soit $\mathscr{F}_U$ un système local d'espaces vectoriels complexes de dimension finie sur $U := Y - Z$. Posons $p := \operatorname{codim}_X(Y)$, on a donc un $\mathscr{D}_{X-Z}$-module holonome $\operatorname{alg} H^p_{Y-Z}(\mathscr{O}_X) \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{F}_U$.

Théorème **(5.3.5).** — *Le* $\mathscr{D}_{X-Z}$*-module précédent admet un prolongement en un* $\mathscr{D}_X$-module holonome $\mathscr{M}(Z, Y, \mathscr{F}_U)$ *dont le faisceau d'irrégularité le long de* Z *est* nul.

Preuve. — Soit $\pi : \widetilde{Y} \to Y \subset X$ la normalisation de Y. Le morphisme π est fini et c'est un isomorphisme en dehors du lieu singulier de Y. Notons $W := X - \pi(\operatorname{sing}(\widetilde{Y}) \cup \operatorname{sing}(\widetilde{Z}))$ et $\widetilde{W}$ son image inverse par π. Fixons une section $\sigma : \mathbf{C}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ et notons $\mathscr{L}^{\sigma}_{\widetilde{W}}$ l'extension à $\widetilde{W}$ de l'image inverse par π du fibré $\mathscr{O}_U \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{F}_U$. Le $\mathscr{D}_{\widetilde{W}}$-module $\mathscr{D}_{\widetilde{W}}\, \mathscr{L}^{\sigma}_{\widetilde{W}}$ est cohérent en vertu de (5.2.4) et on a une suite exacte de $\mathscr{D}_{\widetilde{W}}$-modules cohérents pour k assez grand qui est le début de la suite de Spencer de degré k (cf. [M$_5$], [K$_1$]) si $0, -1, \ldots$ ne sont pas dans l'image de σ.

$$\mathscr{D}_{\widetilde{W}} \otimes_{\mathscr{O}_{\widetilde{W}}} T_{\widetilde{W}} \otimes_{\mathscr{O}_{\widetilde{W}}} \mathscr{L}^{\sigma, k-1}_{\widetilde{W}} \to \mathscr{D}_{\widetilde{W}} \otimes_{\mathscr{O}_{\widetilde{W}}} \mathscr{L}^{\sigma, k}_{\widetilde{W}} \to \mathscr{D}_{\widetilde{W}}\, \mathscr{L}^{\sigma}_{\widetilde{W}} \to 0,$$

où $T_{\widetilde{W}}$ est le fibré tangent de $\widetilde{W}$ et $\mathscr{L}^{\sigma, k}_{\widetilde{W}} := \mathscr{D}_{k\widetilde{W}}\, \mathscr{L}^{\sigma}_{\widetilde{W}}$. Alors $\pi_* \mathscr{D}_{W \leftarrow \widetilde{W}} \otimes_{\mathscr{D}_{\widetilde{W}}} \mathscr{D}_{\widetilde{W}}\, \mathscr{L}^{\sigma}_{\widetilde{W}}$ est un prolongement à W du $\mathscr{D}_{X-Z}$-module holonome $\operatorname{alg} H^p_{Y-Z}(\mathscr{O}_X) \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{F}_U$ en un $\mathscr{D}_W$-module cohérent (cf. § 2). Notons $\mathscr{M}_W$ ce prolongement. Posons, si $\overset{\vee}{\omega}_W := \mathit{hom}_{\mathscr{O}_W}(\omega_W, \mathscr{O}_W)$,

$$\mathscr{H}^{\sigma, k-1}_{W} := \overset{\vee}{\omega}_W \otimes_{\mathscr{O}_W} \pi_*\, \omega_{\widetilde{W}} \otimes_{\mathscr{O}_{\widetilde{W}}} T_{\widetilde{W}} \otimes_{\mathscr{O}_{\widetilde{W}}} \mathscr{L}^{\sigma, k-1}_{\widetilde{W}},$$

$$\mathscr{H}^{\sigma, k}_{W} := \overset{\vee}{\omega}_W \otimes_{\mathscr{O}_W} \pi_*\, \omega_{\widetilde{W}} \otimes_{\mathscr{O}_{\widetilde{W}}} \mathscr{L}^{\sigma, k}_{\widetilde{W}}.$$

Les faisceaux $\mathscr{H}^{\sigma, k-1}_{W}$ et $\mathscr{H}^{\sigma, k}_{W}$ sont alors analytiques cohérents sur W et par construction n'ont pas des sections locales à support immergé. En vertu de la formule de projection, on a la présentation

$$\mathscr{D}_W \otimes_{\mathscr{O}_W} \mathscr{H}^{\sigma, k-1}_{W} \to \mathscr{D}_W \otimes_{\mathscr{O}_W} \mathscr{H}^{\sigma, k}_{W} \to \mathscr{M}_W \to 0.$$

Notons i l'inclusion canonique de W dans X.

Lemme **(5.3.6).** — *Si* $\mathscr{H}$ *est un faisceau analytique cohérent sur* W *qui n'a pas de sections locales à support immergé, le morphisme canonique* $\mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} i_* \mathscr{H} \to i_* \mathscr{D}_W \otimes_{\mathscr{O}_W} \mathscr{H}$ *est un* isomorphisme.

Preuve. — Ceci résulte du fait que le faisceau $\mathscr{D}_X$ est un $\mathcal{O}_X$-module libre et qu'une section globale de $\mathscr{H}$, nulle sur un ouvert du support de $\mathscr{H}$, est identiquement nulle sur la composante connexe de cet ouvert.

Mais en vertu du théorème (5.3.2) les images directes $i_* \mathscr{H}_W^{\sigma, k-1}$ et $i_* \mathscr{H}_W^{\sigma, k}$ sont des faisceaux analytiques cohérents sur X. En vertu du lemme (5.3.6), on a un morphisme de $\mathscr{D}_X$-modules cohérents

$$i_* \mathscr{D}_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathscr{H}_W^{\sigma, k-1} \to i_* \mathscr{D}_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathscr{H}_W^{\sigma, k}.$$

Le conoyau de ce morphisme est donc un $\mathscr{D}_X$-module *cohérent* qui prolonge le $\mathscr{D}_{X-Z}$-module holonome alg $H^p_{X-Z}(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{F}_U$. Notons $\mathscr{M}(Z, Y, \mathscr{F}_U)$ le localisé le long de Z de ce prolongement qui, en vertu de [K₄] (voir aussi [N-M]), est un $\mathscr{D}_X$-module holonome. Le support de son faisceau d'irrégularité le long de Z est de codimension dans Z au moins égale à un par construction. En vertu du théorème de comparaison (3.1.2) ce faisceau est nul d'où le théorème (5.3.5).

Si $Z \subset Y \subset X$ est un triplet comme précédemment (X, Y — Z sont lisses et Z est défini localement par une équation), notons $\mathbf{DR}^{Z, Y}$ le foncteur exact de la catégorie abélienne des $\mathscr{D}_X$-modules holonomes réguliers à support contenu dans Y lisses sur Y — Z et égaux à leur localisé le long de Z, dans la catégorie des systèmes locaux d'espaces vectoriels complexes de dimension finie sur Y — Z, qui à un tel $\mathscr{D}_X$-module associe son système local des sections horizontales sur $U := Y - Z$. On a alors le théorème d'existence pour les faisceaux constructibles élémentaires ·

Théorème **(5.3.7)**. — *Le foncteur* $\mathbf{DR}^{Z, Y}$ *est une* équivalence *de catégories abéliennes.*

Preuve. — On sait déjà en vertu du théorème de comparaison (3.1.17) qu'il est pleinement fidèle. Le système local associé au $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}(Z, Y, \mathscr{F}_U)$ du théorème (5.3.5) est isomorphe à $\mathscr{F}_U$. Le faisceau d'irrégularité le long de tout diviseur de $\mathscr{M}(Z, Y, \mathscr{F}_U)$ est nul en vertu du scholie (3.1.2)'. Il résulte du théorème (3.1.4) que son image inverse sur tout disque complexe n'a que des singularités régulières. Donc, $\mathscr{M}(Z, Y, \mathscr{F}_U)$ est régulier au sens de la définition de (3.1.12) et le foncteur $\mathbf{DR}^{Z, Y}$ est essentiellement surjectif. D'où le théorème (5.3.7).

Cette démonstration n'a nécessité que la résolution des singularités d'une surface complexe suivie de la résolution plongée d'une courbe plane. En fait :

Corollaire **(5.3.8)**. — *Dans la situation précédente, si* X *est une boule assez petite de* $\mathbf{C}^n$, *le foncteur qui à* $\mathscr{M}(Z, Y, \mathscr{F}_U)$ *associe son image inverse sur* $X \cap L$ *pour un hyperplan assez général* L *tel que* $\dim(Y \cap L) = 2$, *est une* équivalence de catégories.

Preuve. — Ceci résulte du théorème (5.3.7) et du théorème de Zariski de type Lefschetz de Hamm-Le. On a aussi une remarque analogue à (5.2.8).

On peut déduire du théorème (5.3.7) le théorème d'existence de Riemann démontré par Grauert-Remmert [G-R_2] pour les revêtements finis et par Deligne [D] pour les systèmes locaux d'espaces vectoriels complexes de dimension finie :

Corollaire **(5.3.9).** — *Si* X *est une variété algébrique complexe non singulière, le foncteur qui à un fibré à connexion intégrable sur* X, *dont l'image inverse sur toute courbe non singulière au-dessus de* X *n'a que des singularités régulières, associe son fibré transcendant sur* X^h, *est une* équivalence de catégories abéliennes.

Preuve. — Le foncteur est pleinement fidèle en vertu du § 3. La question est alors locale pour la topologie de Zariski. On peut supposer que X est affine munie d'un plongement dans un espace projectif P^m. Si $\mathscr{F}_{X^h}$ est un système local d'espaces vectoriel complexe de dimension finie sur X^h, alors le $\mathscr{D}_{P^m}$-module $\mathscr{M}(\bar{X}^h - X^h, \bar{X}^h, \mathscr{F}_{X^h})$ construit par le théorème (5.3.5) qui est localisé d'un module muni d'une bonne filtration globale est algébrique en vertu de GAGA. Sa restriction à X est le fibré de Riemann associé au système local $\mathscr{F}_{X^h}[D]$. Si la monodromie de $\mathscr{F}_{X^h}$ est finie, ce fibré correspond à un revêtement algébrique étale de X [G-R_2].

5.4. Le théorème d'existence de Riemann pour les coefficients analytiquement constructibles

Nous allons déduire du théorème (5.3.7) à l'aide des dévissages de [Me_2] le théorème d'existence de Riemann pour les coefficients analytiquement constructibles.

Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ une variété analytique complexe et $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ la catégorie des complexes de $\mathscr{D}_X$-modules à cohomologie bornée holonome et réguliers. Notons $\mathbf{DR}_r$ et $\mathbf{S}_r$ les restrictions des foncteurs **DR** et **S** à la catégorie $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$:

$$D^b_{hr}(\mathscr{D}_X) \to D^b_c(\mathbf{C}_X), \quad \mathscr{M} \to \mathbf{DR}_r(\mathscr{M}) := \mathbf{R}\, hom_{\mathscr{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathscr{M}),$$
$$D^b_{hr}(\mathscr{D}_X) \to D^b_c(\mathbf{C}_X), \quad \mathscr{M} \to \mathbf{S}_r(\mathscr{M}) := \mathbf{R}\, hom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathcal{O}_X).$$

Les foncteurs $\mathbf{DR}_r$ et $\mathbf{S}_r$ sont des foncteurs exacts de catégories triangulées.

Théorème **(5.4.1).** — *Les foncteurs* $\mathbf{DR}_r$ *et* $\mathbf{S}_r$ *sont* essentiellement surjectifs.

Preuve. — Pour un coefficient constructible $\mathscr{F} (\in D^b_c(\mathbf{C}_X))$ notons $\mathscr{F}^\vee$ son complexe dual $\mathbf{R}\, hom_{\mathbf{C}_X}(\mathscr{F}, \mathbf{C}_X)$. En vertu du théorème de dualité locale ([Me_1], théorème 1.1), on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{DR}(\mathscr{M}) \simeq \mathbf{S}(\mathscr{M})^\vee$$

pour tout complexe holonome $\mathscr{M} (\in D^b_h(\mathscr{D}_X))$. Mais en vertu du corollaire (3.1.15) le morphisme naturel

$$\mathbf{R}\, hom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) \to \mathbf{R}\, hom_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{DR}(\mathscr{M}_1), \mathbf{DR}(\mathscr{M}_2))$$

est un isomorphisme si $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{M}_2$ sont réguliers $(\in D^b_{hr}(\mathscr{D}_X))$. Il résulte du théorème de dualité locale que l'on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{R}\, hom_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{DR}(\mathscr{M}_1), \mathbf{DR}(\mathscr{M}_2)) \simeq \mathbf{R}\, hom_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}_2), \mathbf{S}(\mathscr{M}_1)^{\vee\vee}),$$

si $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont des complexes holonomes. Toujours en vertu du théorème de dualité locale, on a les isomorphismes canoniques

$$\mathbf{S}(\mathcal{M}) \simeq \mathbf{S}(\mathcal{M}^{**}) \simeq \mathbf{S}(\mathcal{M})^{\vee\vee}$$

pour tout complexe holonome $\mathcal{M}$. En résumé, si $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont des complexes réguliers le morphisme naturel

$$\mathbf{R}\,\mathit{hom}_{\mathscr{D}_X}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \to \mathbf{R}\,\mathit{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{S}(\mathcal{M}_2), \mathbf{S}(\mathcal{M}_1))$$

est un isomorphisme. Remarquons qu'on n'a pas eu à utiliser le théorème de bidualité pour les coefficients constructibles. On en déduit que le foncteur $\mathbf{S}_r$ est pleinement fidèle.

Puisque $\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{S}(\mathcal{M}^*)$ et que $\mathcal{M}^*$ est régulier si et seulement si $\mathcal{M}$ est régulier en vertu de (2.2.5) et (3.1.4), il suffit de montrer pour le théorème (5.4.1) que le foncteur $\mathbf{S}_r$ est essentiellement surjectif. Le foncteur $\mathbf{S}_r$ se prête mieux au dévissage. Soit $\mathscr{F}$ un coefficient constructible, il faut montrer qu'il est de la forme $\mathbf{S}_r(\mathcal{M})$.

Cas α). — Supposons que $\mathscr{F}$ est un faisceau constructible placé en degré zéro. Soit Y son support. Nous allons montrer par récurrence sur dim(Y) que $\mathscr{F}$ est *localement* de la forme $\mathbf{S}_r(\mathcal{M})$ pour un complexe holonome régulier $\mathcal{M}$. Si $\dim(Y) = 0$, on a

$$\mathbf{S}_r(\mathrm{alg}\, \mathrm{H}^n_Y(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{F}^{\vee}[n]) \simeq \mathscr{F},$$

où $n = (\dim X)$ et $\mathscr{F}^{\vee} := \mathit{hom}_{\mathbf{C}_Y}(\mathscr{F}, \mathbf{C}_Y)$. Il est bien de la forme requise. Supposons l'assertion montrée pour tous les faisceaux constructibles dont la dimension du support est strictement inférieure à dim(Y). Localement il existe un diviseur Z ne contenant pas Y dont la trace sur Y contient le lieu singulier de Y. Posons $U := Y - Z$ et j l'inclusion canonique de $Y - Z$ dans Y. On a une suite exacte

$$0 \to j_! j^{-1} \mathscr{F} \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}_{|Z} \to 0.$$

Si on choisit Z tel que $\mathscr{F}_U := j^{-1} \mathscr{F}$ est lisse, ce qui est loisible, le module $\mathcal{M}(Z, Y, \mathscr{F}_U^{\vee})$ du théorème (5.3.5) est la solution cherchée pour $j_! \mathscr{F}_U$ puisque par construction $\mathbf{S}(\mathcal{M}(Z, Y, \mathscr{F}_U^{\vee})) \simeq j_! \mathscr{F}_U[-p]$, où $\mathscr{F}_U^{\vee} := \mathit{hom}_{\mathbf{C}_U}(\mathscr{F}_U, \mathbf{C}_U)$. L'hypothèse de récurrence et la pleine fidélité du foncteur $\mathbf{S}_r$ permettent de conclure. Raisonnant par récurrence sur l'amplitude d'un complexe constructible et utilisant la pleine fidélité du foncteur $\mathbf{S}_r$, on en déduit que tout complexe constructible est *localement* de la forme $\mathbf{S}_r(\mathcal{M})$ pour un complexe holonome régulier $\mathcal{M}$. On a le résultat suivant dû à Deligne dont nous donnons une démonstration dans l'esprit de cet article pour être complets :

Proposition **(5.4.2)**. — *Soit $\mathcal{M}$ un complexe holonome tel que le complexe* $\mathbf{S}(\mathcal{M})$ *a la propriété de support (cf. définition (2.1.1)), alors $\mathcal{M}$ est concentré cohomologiquement en* degrés positifs.

Preuve. — On raisonne par récurrence sur $\dim(X)$. Si $\dim(X) = 0$, supposons que X est un point, alors $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel placé en degré zéro et l'assertion est vraie. Supposons la proposition montrée pour les variétés de dimension strictement inférieure à $\dim(X)$. Soit $\mathcal{M}$ un complexe holonome et $h^i(\mathcal{M})$ son i-ième faisceau de cohomologie. La question est locale. En dehors d'un ensemble de dimension zéro, il passe une hypersurface lisse X' qui est non caractéristique pour tous les $\mathcal{D}_X$-modules $h^i(\mathcal{M})$. Notons f l'inclusion canonique de X' dans X. On a $f^* h^i(\mathcal{M}) \simeq h^i(\mathbf{L}f^* \mathcal{M})$ et le morphisme canonique $f^{-1}\mathbf{S}(\mathcal{M}) \to \mathbf{S}(\mathbf{L}f^* \mathcal{M})$ est un isomorphisme en vertu du théorème de Cauchy-Kowalewski. On peut choisir X' ne contenant pas les supports des faisceaux $h^i(\mathbf{S}(\mathcal{M}))$. Le complexe $f^{-1}\mathbf{S}(\mathcal{M})$ a la propriété de support et en vertu de l'hypothèse de récurrence le complexe $\mathbf{L}f^* \mathcal{M}$ est concentré cohomologiquement en degrés positifs. Donc les complexes des solutions holomorphes des $\mathcal{D}_X$-modules $h^i(\mathcal{M})$ pour $i < 0$ sont à support de dimension zéro et ces $\mathcal{D}_X$-modules sont à support de dimension zéro pour $i < 0$. Pour $i > 0$ on a les isomorphismes : $\mathcal{E}xt^{n+i}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{D}_X}(h^{-i}(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X)$. Par hypothèse $\mathcal{E}xt^{n+i}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $i \geqslant 1$. Donc $h^{-i}(\mathcal{M}) = 0$ pour $i \geqslant 1$, d'où la proposition (5.4.2).

On en déduit que si $\mathbf{S}(\mathcal{M})$ a la propriété de co-support (son dual a la propriété de support) le complexe dual $\mathcal{M}^*$ est concentré en degrés positifs en vertu du théorème de dualité locale. En résumé, si $\mathbf{S}(\mathcal{M})$ a les propriétés de support et de co-support le complexe $\mathcal{M}$ est concentré en degré zéro. On peut alors supposer que c'est un $\mathcal{D}_X$-module holonome placé en degré zéro.

Cas β). — Soit $\mathcal{F}$ un complexe constructible ayant les propriétés de support et de co-support. En vertu du cas α) $\mathcal{F}$ est *localement* de la forme $\mathbf{S}_r(\mathcal{M})$ pour un complexe régulier $\mathcal{M}$. En vertu de (5.4.2) $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module régulier. Mais comme le foncteur $\mathbf{S}_r$ est pleinement fidèle les différentes solutions locales se recollent pour donner naissance à un $\mathcal{D}_X$-module holonome régulier global $\mathcal{M}$ tel que l'on ait des isomorphismes *locaux* $\mathbf{S}_r(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{F}$ qui coïncident sur l'intersection de deux ouverts. Mais $\mathcal{E}xt^i_{\mathbf{C}_U}(U; \mathbf{S}_r(\mathcal{M}), \mathcal{F}) = 0$ pour $i < 0$ ([B-B-D], 2.1.21, ou (3.1.15)) pour tout ouvert U de X et en vertu de la suite spectrale du local au global on a l'isomorphisme :

$$\Gamma(U; hom_{\mathbf{C}_U}(\mathbf{S}_r(\mathcal{M}), \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_U}(U; \mathbf{S}_r(\mathcal{M}), \mathcal{F}).$$

Le préfaisceau $U \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_U}(U; \mathbf{S}_r(\mathcal{M}), \mathcal{F})$ est un faisceau. D'où un morphisme *global* $\mathbf{S}_r(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{F}$ qui est un isomorphisme. Autrement dit le foncteur qui à un $\mathcal{D}_X$-module holonome régulier $\mathcal{M}$ associe le complexe $\mathbf{S}_r(\mathcal{M})$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie $\mathrm{Mhr}(\mathcal{D}_X)$ des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers et la catégorie des complexes constructibles ayant les propriétés de support et de co-support. D'où le nom de *faisceau* pervers donné à un tel objet.

Cas γ). — Soit $\mathcal{F}$ un coefficient et ${}^p h^i(\mathcal{F})$ ses faisceaux de cohomologie pervers [B-B-D]. Ils sont en nombre fini et $\mathcal{F}$ s'envoit dans son dernier faisceau de cohomologie perverse [B-B-D]. Pour montrer que $\mathcal{F}$ est de la forme $\mathbf{S}_r(\mathcal{M})$, en raisonnant sur l'amplitude perverse de $\mathcal{F}$, on est réduit à supposer que $\mathcal{F}$ est un faisceau pervers utilisant la pleine fidélité de $\mathbf{S}_r$. C'est alors le cas β), d'où le théorème (5.4.1). Voir la remarque (5.5.4) ci-dessous.

Résumons les § 3, 4, 5 par le théorème suivant où f est un morphisme de variétés analytiques complexes, nous notons f_*^c le foncteur image directe au sens des $\mathcal{D}_X$-modules :

Théorème **(5.4.3).** — *Les foncteurs exacts* $\mathbf{DR}_r$ *et* $\mathbf{S}_r$ *de catégories triangulées* $D^b_{hr}(\mathcal{D}_X)$ *et* $D^b_c(\mathbf{C}_X)$ *qui respectent les t-structures naturelles* $\mathrm{Mhr}(\mathcal{D}_X)$ *et* $\mathrm{Perv}(\mathbf{C}_X)$ *sont des* équivalences de catégories. *De plus, les catégories* $D^b_{hr}(\mathcal{D}_X)$ *sont stables par les opérations cohomologiques* f^*, $f^!$, f_*^c *(f est supposé propre, cf.* 5.5.1*),* $(\ )^*$, $\otimes_{\mathcal{O}_X}$, $\boxtimes$, Ψ^m, Φ^m *et les foncteurs* $\mathbf{DR}_r$ *et* $\mathbf{S}_r$ *qui s'échangeant par dualité respectent les opérations analogues dans les catégories de coefficients constructibles* $D^b_c(\mathbf{C}_X)$.

5.5. Remarques

5.5.1. Si f est un morphisme lisse, entre variétés lisses, propre sur le support d'un $\mathcal{D}_X$-module holonome régulier $\mathcal{M}$, alors le complexe $\mathbf{R}f_*\,\mathbf{DR}_f(\mathcal{M})$ est holonome régulier. Le seul problème est de voir que sa cohomologie est $\mathcal{D}$-cohérente. On n'a pas démontré qu'un tel module admet une bonne filtration *globale*, et donc on ne peut se ramener au cas des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents. On procède alors par récurrence sur la dimension du support Y de $\mathcal{M}$. Le résultat est vrai si $\dim(Y) = 0$. Soit Z le support singulier de $\mathcal{M}$, alors $\dim Z < \dim Y$ et on a un morphisme

$$\mathcal{M} \to \varinjlim_k hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}^k_Z, \mathcal{M})$$

dont le noyau et le conoyau sont à support dans Z. Mais si $\mathcal{M}$ est régulier $\mathcal{M}(*Z)$ est régulier en vertu de (3.1.2)'. L'hypothèse de récurrence nous ramène à supposer que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}(*Z)$. Dans ce cas-là la méthode du théorème (5.3.2) fait apparaître $\mathcal{M}$ comme une extension d'un $\mathcal{D}_X$-module holonome régulier à support dans Z, par un $\mathcal{D}_X$-module cohérent muni d'une bonne filtration globale puisque c'est un module quotient d'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent muni d'une bonne filtration globale. On applique le théorème d'image directe pour un tel $\mathcal{D}_X$-module.

5.5.2. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau pervers sur X il est de la forme $\mathbf{DR}_r(\mathcal{M})$ pour un $\mathcal{D}_X$-module holonome régulier $\mathcal{M}$. Donc, si f est une fonction complexe, le complexe $\mathbf{R}\Psi_f(\mathcal{F})$ des cycles proches est de la forme $\mathbf{DR}(\Psi_f^m(\mathcal{M}))$ en vertu de 4.3. C'est donc un faisceau pervers sur $f^{-1}(0)$ puisque $\Psi_f^m(\mathcal{M})$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome à support $f^{-1}(0)$.

5.5.3. On déduit du théorème (5.4.3) le théorème analogue pour la catégorie des $\mathcal{D}_X^\infty$-modules holonomes [Me₂] et que le foncteur $\mathcal{F} \to \mathbf{R}\,hom_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ de $D^b_c(\mathbf{C}_X)$ dans $D^b(\mathcal{D}_X^\infty)$ est un quasi-inverse du foncteur $\mathcal{M}^\infty \to \mathbf{R}\,hom_{\mathcal{D}_X^\infty}(\mathcal{M}^\infty, \mathcal{O}_X)$. En particulier, la catégorie des $\mathcal{D}_X^\infty$-modules holonomes (localement provenant d'un $\mathcal{D}_X$-module holonome) qui est équivalente à la catégorie $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X)$ est abélienne et stable par extension. Il semble que c'est la catégorie des $\mathscr{D}_X^\infty$-modules holonomes qui a un rôle à jouer pour la définition de la catégorie des bons coefficients p-adiques en caractéristique $p > 0$. Le fait d'avoir une démonstration de ce résultat sans faire appel à la résolution des singularités dans le cas général est peut-être un signe encourageant.

5.5.4. La principale difficulté que nous avons rencontrée dans la première démonstration du théorème (5.4.1) est que la catégorie $D_h^b(\mathscr{D}_X)$ n'est pas de nature locale ([Me$_2$], introduction p. 51). On ne disposait pas encore du dévissage à l'aide de la cohomologie perverse. Cependant on peut très bien éviter, pour la démonstration du théorème (5.4.1), le recours à la cohomologie perverse si on utilise la catégorie $D_h^b(\mathscr{D}_X^\infty)$ qui était déjà disponible. C'est ce que nous avons signalé dans [Me$_2$], en page 87, remarque 3.4.1.

5.5.5. Il faut prendre garde que dans le théorème (5.4.3) le foncteur $\mathbf{S}_r$ transforme image inverse ordinaire en image inverse ordinaire ($\mathbf{S}_r(\mathbf{L}f^*\mathscr{M}) \simeq f^{-1}\,\mathbf{S}_r(\mathscr{M})$), et donc image inverse extraordinaire en image inverse extraordinaire. Mais que le foncteur $\mathbf{DR}_r$ transforme image inverse ordinaire en image inverse extraordinaire ($\mathbf{DR}_r(\mathbf{L}f^*\mathscr{M}) \simeq f^!\,\mathbf{DR}_r(\mathscr{M})\,[-2\dim(f)]$) et donc image inverse extraordinaire en image inverse ordinaire. On a noté $\dim(f)$ la différence entre la dimension de la source et la dimension du but.

5.6. Le théorème d'existence de Riemann pour les coefficients algébriquement constructibles

Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ une variété algébrique complexe non singulière et $D_{hr}^b(\mathscr{D}_X)$ la catégorie des complexes de $\mathscr{D}_X$-modules à cohomologie bornée, holonome et régulière (cf. § 3, définition (3.1.12)). Notons $\mathbf{DR}_r$ et $\mathbf{S}_r$ les foncteurs suivants de $D_{hr}^b(\mathscr{D}_X)$ dans la catégorie $D_c^b(\mathbf{C}_X)$ des coefficients algébriquement constructibles :

$$\mathscr{M} \to \mathbf{DR}_r(\mathscr{M}) := \mathbf{R}\,\mathit{hom}_{\mathscr{D}_{X^h}}(\mathscr{O}_{X^h}, \mathscr{M}^h),$$
$$\mathscr{M} \to \mathbf{S}_r(\mathscr{M}) := \mathbf{R}\,\mathit{hom}_{\mathscr{D}_{X^h}}(\mathscr{M}^h, \mathscr{O}_{X^h}).$$

Le foncteur $\mathbf{DR}_r$ est pleinement fidèle (3.1.17). On déduit que le foncteur $\mathbf{S}_r$ est aussi pleinement fidèle à partir du théorème de dualité locale comme en (5.4).

Théorème **(5.6.1).** — *Les foncteurs* $\mathbf{DR}_r$ *et* $\mathbf{S}_r$ *sont essentiellement surjectifs.*

Preuve. — La démonstration de (5.6.1) se fait exactement comme la démonstration de (5.4.1) en remplaçant analytiquement constructible par algébriquement constructible, sauf que dans le cas α) il y a une petite différence due au diviseur à l'infini. On procède alors comme suit. Supposons que X est affine plongée dans un espace projectif P^m. Soit $Z \subset Y \subset X$ un couple de variétés algébriques telles que Z est la trace d'une hypersurface ne contenant pas Y et que Y — Z est lisse. Soit $\mathscr{F}_{U^h}$ un système local d'espaces vectoriels complexes de dimension finie sur $U^h := Y^h - Z^h$. Notons $\overline{Z}$, $\overline{Y}$ les adhérences de Z, Y dans P^m. Le $\mathscr{D}_{P^m}$-module $\mathscr{M}(\overline{Z} \cup \overline{Y} - Y, \overline{Y}, \mathscr{F}_{U^h})$ fourni par le théorème (5.3.5) est le localisé le long d'un diviseur d'un $\mathscr{D}_{P^m}$-module holonome cohérent muni d'une bonne filtration globale. En vertu de GAGA ce module provient d'un $\mathscr{D}_{P^m}$-module algébrique cohérent qui est la solution du système $\mathscr{F}_{U^h}$. A partir de là, les cas β) et γ) sont rigoureusement les mêmes. On obtient un théorème analogue au théorème (5.4.3) avec, en prime, une opération $f_!^c$ de plus. Si f est un morphisme de variétés algébriques non singulières et $\mathscr{M}$ un complexe holonome, posons

$$f_!^c \mathscr{M} := (f_*^c \mathscr{M}^*)^*.$$

En vertu du théorème de dualité relative pour les $\mathscr{D}_X$-modules cohérents $f_!^c \mathscr{M}$ est isomorphe à $f_*^c \mathscr{M}$ si f est propre.

Théorème **(5.6.2)**. — *Les foncteurs exacts* $\mathbf{DR}_r$ *et* $\mathbf{S}_r$ *de catégories triangulées* $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ *et* $D^b_c(\mathbf{C}_X)$ *qui respectent les t-structures naturelles* $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X)$ *et* $\mathrm{Perv}(\mathbf{C}_X)$ *sont des* équivalences de catégories. *De plus, les catégories* $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ *sont stables par les opérations cohomologiques* f^*, $f^!$, $f_!^c$, f_*^c, $(\ )^*$, $\otimes_{\mathscr{O}_X}$, $\boxtimes$, Ψ'^m, Φ^m *et les foncteurs* $\mathbf{DR}_r$ *et* $\mathbf{S}_r$ *qui s'échangent par dualité, respectent les opérations analogues dans les catégories de coefficients constructibles* $D^b_c(\mathbf{C}_X)$.

Il faut prendre garde que, dans le théorème (5.6.2), le foncteur $\mathbf{DR}_r$ transforme image directe ordinaire en image directe ordinaire ($\mathbf{DR}_r(f_*^c \mathscr{M}) \simeq \mathbf{R}f_* \mathbf{DR}_r(\mathscr{M})$ $[-\dim f]$ et donc image directe à support propre en image directe à support propre. Mais que le foncteur $\mathbf{S}_r$ transforme image à support propre en image directe *ordinaire* ($\mathbf{S}_r(f_!^c \mathscr{M}) \simeq \mathbf{R}f_* \mathbf{S}_r(\mathscr{M})$ $[-\dim f]$ et donc image directe ordinaire en image directe à support propre.

Dans ce travail nous avons cité :

RÉFÉRENCES

[A-H] M. Atiyah, W. V. Hodge, Integrals of second kind on algebraic varieties, *Ann. of Math.* (2), **62** (1955), 56-91.

[B] I. B. Bernstein, The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, *Funct. Analysis Appl.*, **6** (1972), 26-40.

[B-B-D] A. Beilinson, I. N. Bernstein, P. Deligne, Faisceaux pervers, *Astérisque*, **100** (1983).

[D] P. Deligne, Equations différentielles à points singuliers réguliers, *Lecture Notes in Math.*, **163**, Springer Verlag (1970).

[D-M] P. Deligne, S. Milne, Tannakian categories, *Lecture Notes in Math.*, **900**, Springer Verlag (1982), 100-228.

[Do] A. Douady, Prolongement de faisceaux analytiques cohérents, *Séminaire Bourbaki*, Exposé n° 336, *Lecture Notes in Math.*, **180**, Springer Verlag (1971), 39-54.

[F-G] J. Frisch, J. Guenot, Prolongement de faisceaux analytiques cohérents, *Inv. Math.*, **7** (1969), 321-343.

[Ga] O. Gabber, The integrability of the characteristic variety, *Amer. J. Math.*, **103** (1981), 445-468.

[G-R$_1$] H. Grauert, R. Remmert, Faisceaux analytiques cohérents sur le produit d'un espace analytique et d'un espace projectif, *C.R.A.S., Paris*, **245** (1957), 819-922.

[G-R$_2$] —, Komplexe Räume, *Math. Ann.*, **136** (1958), 245-318.

[G$_1$] A. Grothendieck, On the De Rham cohomology of algebraic varieties, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **29** (1966), 93-103.

[G$_2$] —, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (S.G.A.2)*, Amsterdam, North-Holland (1968).

[G$_3$] —, Travaux de Heisuke Hironaka sur la résolution des singularités, *Actes C.I.M., Nice* (1970), Paris Gauthier-Villars (1971), 79-81.

[H-L] H. Hamm, Le D. T., Un théorème de Zariski de type Lefschetz, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **6** (1973), 317-366.

[H] H. Hironaka, Resolution of the singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, *Ann. of Math.*, **79** (1964), 109-326.

[K$_1$] M. Kashiwara, *Algebraic Study of systems of differential equations*, Master Thesis, University of Kyoto (1971).

[K$_2$] —, On the maximally overdetermined systems of linear differential equations, *R.I.M.S.*, **10** (1975), 563-579.

[K$_3$] —, B-function and holonomic systems, *Inv. Math.*, **38** (1976), 33-54.

[K$_4$] —, On the holonomic systems of differential equations, *Inv. Math.*, **49** (1978), 121-135.

[K$_5$] —, The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems, *R.I.M.S.*, **20** (1984), 319-365.

[K$_6$] —, Vanishing cycles sheaves and holonomic systems of differential equations, *Lectures Notes in Math.*, **1016**, Springer Verlag (1983), 134-142.

[L$_1$] Le D. T., Some remarks in relative monodromy, *Nordic summer school in Oslo* (1976), Sijthoff Noordhoff (1977).

[L$_2$] —, The geometry of the monodromy theorem, in *C. P. Ramanujam, A. Tribute, Studies in Math.*, n° 8, Tata Institute Bombay (1978), 157-173.

[Li] J. Lipman, Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorisation, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **36** (1969), 195-279.

[M$_1$] B. Malgrange, Remarques sur les points singuliers des équations différentielles, *C.R.A.S.*, **273** (1971), 1130-1137.

[M$_2$] —, Sur les points singuliers réguliers des équations différentielles, *Ens. Math.*, **20** (1974), 147-176.

[M$_3$] —, *Opérateurs différentiels et pseudo-différentiels*, Séminaire Grenoble, 1976, Institut Fourier (1976).

[M$_4$] —, Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente, *Astérisque*, **101-102** (1983), 243-267.

[M$_5$] —, Sur les images directes des $\mathscr{D}$-modules, *Manus. Math.*, **50** (1985), 49-71.

[M$_6$] —, Meromorphic connexions : some problems and conjectures, *Proceeding of the Toniguchi colloquium on differential equations* (August 1987) (à paraître).

[Me$_1$] Z. Mebkhout, Théorèmes de bidualité locale pour les $\mathscr{D}_X$-modules holonomes, *Ark. Mat.*, **20** (1982), 111-122.

[Me$_2$] —, Une équivalence de catégories et une autre équivalence de catégories, *Comp. Math.*, **51** (1984), 51-88.

[Me$_3$] —, Sur le théorème de semi-continuité de l'irrégularité des équations différentielles, *Astérisque*, **130** (1985), 365-417.

[Me$_4$] —, Le théorème de la positivité de l'irrégularité pour les $\mathscr{D}_X$-modules, in *Volume en l'honneur d'A. Grothendieck* (à paraître).

[N-M] L. Narvaez, Z. Mebkhout, *La théorie du polynôme de Bersntein-Sato pour les algbères de Tate et de Dwork-Monsky-Washnitzer* (à paraître).

[S-M] C. Sabbah, Z. Mebkhout, $\mathscr{D}_X$-modules et cycles évanescents, *Travaux en Cours*, **35**, Paris, Hermann (1988), 204-241.

[Sa] N. Saavedra-Rivano, Catégories Tannakiennes, *Lecture Notes in Math.*, **265**, Springer Verlag (1972).

[S$_1$] J.-P. Serre, Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier*, **6** (1956), 1-42.

[S$_2$] —, Prolongement de faisceaux analytiques cohérents, *Ann. Inst. Fourier*, **16** (1966), 363-374.

[Si$_1$] Y. T. Siu, Extending coherent analytic sheaves, *Ann. of Math.*, **90** (1969), 108-143.

[Si$_2$] —, A Hartogs-type extention theorem for coherent analytic sheaves, *Ann. of Math.*, **93** (1971), 166-188.

[S-T] Y. T. Siu, G. T. Trautmann, Gap sheaves and extension of coherent analytic subsheaves, *Lecture Notes in Math.*, **172**, Springer Verlag (1971).

[Ta] G. T. Trautmann, Ein Kontinuitätssatz für die Fortsetzung Kohärenter analytischer Garben, *Arch. Math.*, **19** (1967), 188-196.

[T] B. Teissier, Introduction to equisingularity problems, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **29** (1974), Amer. Math. Soc. (1975), 593-632.

[Z] O. Zariski, The reduction of the singularities of an algebraic surface, *Ann. of Math.*, **40** (1939), 669-689.

Sigle

[S.G.A. 7] Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967-1969, dirigé par A. Grothendieck, P. Deligne, N. Katz, *Lecture Notes in Math.*, Springer Verlag (1973), **288-340.**

U.F.R. de Mathématiques, U.A. 212 du C.N.R.S.,
Université de Paris 7
2, place Jussieu,
F-75251 Paris Cedex 05.

Manuscrit reçu le 14 janvier 1988.