S. ŁOJASIEWICZ

Sur l'adhérence d'un ensemble partiellement semi-algébrique

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 68 (1988), p. 205-210
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1988__68__205_0>

SUR L'ADHÉRENCE D'UN ENSEMBLE PARTIELLEMENT SEMI-ALGÉBRIQUE

par S. ŁOJASIEWICZ

Dédié à René Thom
à l'occasion de son soixante-cinquième anniversaire.

René Thom a conjecturé que les directions limites d'un champ vectoriel analytique sur une variété analytique M, en un point $a \in M$, forment un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbf{P}(T_a M)$. Ceci est lié au fait que l'adhérence d'un ensemble partiellement semi-algébrique est aussi partiellement semi-algébrique. Dans [3] je ne l'ai pas prouvé, car je n'en voyais pas de démonstration simple. Or, dans cet article-ci je vais démontrer cette propriété. Ceci impliquera une réponse positive à la conjecture de René Thom.

1. Soit M une variété analytique réelle et soit N un espace vectoriel. (On ne considère ici que des espaces vectoriels réels de dimension finie.) Un sous-ensemble E de $M \times N$ est dit N-semi-algébrique si chaque point de M possède un voisinage ouvert U tel que E soit décrit dans $U \times N$ par des fonctions analytiques qui sont des polynômes en coordonnées linéaires dans N à coefficients analytiques dans U (cf. [3]).

Théorème. — L'adhérence d'un sous-ensemble N-*semi-algébrique de* $M \times N$ *est* N-*semi-algébrique.*

2. Voyons d'abord qu'il suffit de prouver le

Lemme **0.** — *Soit* $X = L \times N$ *le produit des espaces vectoriels* L *et* N, *et soit* Γ *une sous-variété analytique fermée d'un ouvert* G *de* L. *Si* Z *est la trace sur* $\Lambda = \Gamma \times N$ *d'un sous-ensemble semi-algébrique de* X, *alors l'adhérence de* Z *dans* $G \times N$ *est* N-*semi-algébrique dans* $G \times N$.

En effet, on a d'abord le lemme évident suivant :

Lemme **1.** — *Soient* $f : M \times \mathbf{R}^m \to N$, $g : M \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ *deux applications analytiques, et soit* $(f, g) : M \times \mathbf{R}^m \to N \times \mathbf{R}^n$ *leur produit diagonal. Supposons que* $f(x, y)$ *ne* *dépende pas de y et que $g(x, y)$ soit polynomiale en y, à coefficients analytiques dans* M. *Alors l'image inverse par* (f, g) *d'un sous-ensemble* $\mathbf{R}^n$*-semi-algébrique de* $N \times \mathbf{R}^n$ *est* $\mathbf{R}^m$*-semi-algébrique dans* $M \times \mathbf{R}^m$.

(On appelle produit diagonal des applications $f_i : Z \to Y_i$, $i = 1, \ldots, r$, l'application $(f_1, \ldots, f_r) : Z \ni x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_r(x)) \in Y_1 \times \ldots \times Y_r$.)

Déduisons-en le théorème. Soit donc E un sous-ensemble N-semi-algébrique de $M \times N$. On peut admettre que $N = \mathbf{R}^k$, que M est un ouvert d'un $\mathbf{R}^n$ et que E est décrit dans $M \times N$ par un nombre fini de polynômes à coefficients analytiques dans M. Suivant une idée de B. Malgrange on a alors $E = (g \times \mathrm{id}_N)^{-1}(A)$, où $g : M \to \mathbf{R}^s$ est le produit diagonal des coefficients de ces polynômes et A est un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbf{R}^s \times N$. Considérons l'isomorphisme analytique

$$h : M \times N \ni (x, y) \mapsto (x, g(x), y) \in \Gamma = \Delta \times N,$$

où $\Delta \subset M \times \mathbf{R}^s$ est le graphe de g. On a $E = h^{-1}(\Gamma \cap B)$ avec $B = \mathbf{R}^n \times A$, d'où

$$\overline{E} = h^{-1}(\overline{\Gamma \cap B});$$

observons que Γ est une sous-variété analytique fermée de $M \times \mathbf{R}^s \times N$, donc que l'adhérence de $\Gamma \cap B$ dans Γ est la même que dans $M \times \mathbf{R}^s \times N$. Or h, regardée comme une application de $M \times N$ dans $M \times \mathbf{R}^s \times N$, est le produit diagonal des applications $(x, y) \mapsto (x, g(x))$ et $(x, y) \mapsto y$. Par conséquent, vu que d'après le lemme 0 l'ensemble $\overline{\Gamma \cap B}$ est N-semi-algébrique dans $M \times \mathbf{R}^s \times N$, le lemme 1 implique que l'ensemble $\overline{E}$ est N-semi-algébrique dans $M \times N$.

3. Passons maintenant à la démonstration du lemme 0. On aura encore besoin de quelques lemmes.

Lemme 2. — *Soit* M *une variété analytique et soit* N *un espace euclidien. Si* $E \subset M \times (N \setminus 0)$ *est un sous-ensemble* N*-semi-algébrique de* $M \times N$, *il en est de même de son image par l'involution* $M \times (N \setminus 0) \ni (x, y) \mapsto (x, y/|y|^2) \in M \times (N \setminus 0)$.

Ceci est évident.

Lemme 3. — *Soient* $E \subset F$ *deux sous-ensembles semi-analytiques compacts d'un espace euclidien* L. *Alors il existe un exposant* $r > 0$ *tel que* $\max_{F \cap B(c, t)} \rho(x, E) > t^r$, *lorsque* $c \in \overline{F \setminus E}$ *et* $0 < t < 1/2$.

En effet, le premier membre de l'inégalité est sous-analytique en tant que fonction de $(c, t) \in B = \overline{F \setminus E} \times [0, 1/2]$, donc l'adhérence C de son graphe est un ensemble compact sous-analytique. On vérifie que l'on a $C \cap (B \times 0) \subset L \times 0 \times 0$, donc la séparation régulière de C et $L \times \mathbf{R} \times 0$ donne l'inégalité.

Lemme **4.** — *Si* E *est un sous-ensemble semi-algébrique du produit* $L \times N$ *de deux espaces vectoriels, alors son adhérence par fibres*

$$E^{\wedge} = \bigcup_{u \in L} u \times \overline{E}_u$$

est semi-algébrique.

(Si $A \subset S \times T$ et $s \in S$, on note A_s la fibre $\{ t \in T : (s, t) \in A \}$.)

Ceci est standard à vérifier car, en supposant N euclidien, on a

$$E^{\wedge} = \{ (x, y) : \forall \varepsilon > 0,\ \exists z \in N,\ (x, z) \in E \text{ et } | z - y | < \varepsilon).$$

On a enfin un fait bien connu :

Lemme **5.** — *Chaque sous-ensemble semi-algébrique (borné) d'un espace vectoriel est réunion finie de différences* $F \backslash E$ *avec* $E \subset F$ *semi-algébriques fermés (compacts).*

4. *Démonstration du lemme* **0.** — Vu que le problème est local sur Γ et que Γ est localement le graphe d'une application analytique (dans un système des coordonnées), il suffit de considérer le cas où $L = \mathbf{R}^n \times V$ avec V euclidien, $G = H \times V$ où H est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, Γ est le graphe d'une application analytique $g : H \to N$ qui s'étend (analytiquement) à un voisinage de $\overline{H}$, et $N = \mathbf{R}^k$. Quant à l'ensemble semi-algébrique en question, on peut supposer, en vertu des lemmes 2 et 5, qu'il soit de la forme $F \backslash E$ où $E \subset F$ sont des sous-ensembles semi-algébriques compacts de X. Il reste donc à prouver que l'adhérence dans $G \times N$ de l'ensemble $\Lambda \cap F \backslash E$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\Sigma = \overline{\Lambda \cap F \backslash E} \cap \Lambda,$$

est N-semi-algébrique dans $G \times N$.

Selon le lemme 3, appliqué aux ensembles compacts semi-analytiques $E \cap \overline{\Lambda} \subset F \cap \overline{\Lambda}$, il existe un exposant $r > 0$ tel que

(1) pour tout $c \in \Sigma$ on a $\rho(x, E \cap \Lambda) > | x - c |^r$ pour des $x \in \Lambda \cap F$ arbitrairement voisins de c.

Par la séparation régulière on a les inégalités

(2) $$\rho(x, E) \geqslant d\rho(x, E \cap \Lambda)^r \quad \text{lorsque } x \in \Lambda \cap F,$$

(3) $$\rho(x, \Lambda) \geqslant d\rho(x, F \cap \Lambda)^r \quad \text{lorsque } x \in F,$$

avec le même r et un $d > 0$.

Soit $c = (a, b, w) \in \Lambda$ (avec $a \in \mathbf{R}^n$, $b \in V$ et $w \in N$; on a donc $b = g(a)$) et considérons les sous-ensembles suivants de X

(4) $$E(c) = \{ x : \rho(x, E) \leqslant d \, | x - c |^{r^2} \},$$

(5) $$\Lambda(c) = \{ (u, v, y) : | v - T_c(u) | \leqslant \frac{1}{2} d^{r+1} \, | u - a |^{r^2} \},$$

où $u \in \mathbf{R}^n$, $v \in V$, $y \in N$ et

$$T_c(u) = b + \sum_{0<|p|\leqslant r^3} \frac{1}{p!} D^p g(a)\,(u-a)^p \tag{6}$$

est le r^3-ième polynôme de Taylor de g en a. On a l'équivalence

$$c \in \overline{\Lambda \cap F \backslash E} \Leftrightarrow c \in \overline{\Lambda(c) \cap F \backslash E(c)}. \tag{$*$}$$

En effet, si $c \in \overline{\Lambda \cap F \backslash E}$, on a, par (1), (2) et (4), $x \notin E(c)$ pour des $x \in \Lambda \cap F$ arbitrairement voisins de c, ce qui donne la deuxième condition de ($*$) grâce à l'inclusion des germes $\Lambda_c \subset \Lambda(c)_c$. Si par contre $c \notin \overline{\Lambda \cap F \backslash E}$, alors $(\Lambda \cap F)_c \subset E_c$ et il suffit de vérifier l'inclusion $(\Lambda(c) \cap F)_c \subset E(c)_c$, qui entraîne que la deuxième condition de ($*$) n'est pas satisfaite; or, si $x = (u, v, y) \in \Lambda(c) \cap F$ est suffisamment voisin de c, on a (vu (5)) : $\rho(x, \Lambda) \leqslant |v - g(u)| \leqslant d^{r+1}|u-a|^{r^3} \leqslant d^{r+1}|x-c|^{r^3}$, ce qui donne, d'après (3), $\rho(x, E) \leqslant \rho(x, F \cap \Lambda) \leqslant d\,|x-c|^{r^3}$, c'est-à-dire (vu (4)) $x \in E(c)$.

Considérons maintenant l'espace $\widetilde{X} = V^\theta \times X^2$, où $\theta = \{p \in \mathbf{N}^n : 0 < |p| \leqslant r^3\}$, et les sous-ensembles semi-algébriques de $\widetilde{X}$

$$\widetilde{E} = \{(\alpha, c, x) : \rho(x, E) \leqslant d\,|x-c|^{r^3}\}, \qquad \widetilde{F} = \{(\alpha, c, x) : x \in F\}, \tag{7}$$

$$\widetilde{\Lambda} = \left\{(\alpha, c, x) : \Big|v - b - \sum_{0<|p|\leqslant r^3} \frac{1}{p!}\alpha_p(u-a)^p\Big| \leqslant \frac{1}{2} d^{r+1}|u-a|^{r^3}\right\}, \tag{8}$$

où $\alpha = \{\alpha_p\}_{p\in\theta} \in V^\theta$ avec $\alpha_p \in V$, et $c = (a, b, w) \in X$, $x = (u, v, y) \in X$ avec $a, u \in \mathbf{R}^n$, $b, v \in V$ et $w, y \in N$. Considérons l'application analytique $\delta : G \ni u \mapsto \{D^p g(u)\}_{p\in\theta} \in V^\theta$. Si $c \in \Lambda$, on a, vu (7), (4), (8), (5) et (6),

$$\widetilde{E}_{(\alpha, c)} = E(c), \qquad \widetilde{F}_{(\alpha, c)} = F \quad \text{et} \quad \widetilde{\Lambda}_{(\delta(a), c)} = \Lambda(c). \tag{9}$$

D'après le lemme 4, l'adhérence par fibres

$$(\widetilde{\Lambda} \cap \widetilde{F} \backslash \widetilde{E})^\wedge = \bigcup_{(\alpha, c)} \overline{\widetilde{\Lambda}_{(\alpha, c)} \cap \widetilde{F}_{(\alpha, c)} \backslash \widetilde{E}_{(\alpha, c)}}$$

est un sous-ensemble semi-algébrique de $\widetilde{X}$, tandis que le sous-ensemble de $V^\theta \times (H \times V \times N)^2$:

$$\Delta = \{(\alpha, c, x) : \alpha = \delta(a), c = x \in \Lambda\}$$
$$= \{(\alpha, c, x) : \alpha = \delta(a), a = u, b = g(a), v = g(u)\}$$

est $(N \times N)$-semi-algébrique, donc leur intersection $\widetilde{\Sigma}$ est $(N \times N)$-semi-algébrique dans $V^\theta \times (H \times V \times N)^2$. Or, la fibre $\Delta_{(\alpha, c)}$ est vide, sauf lorsque $\alpha = \delta(a)$ et $c \in \Lambda$, auquel cas $\Delta_{(\alpha, c)} = \{c\}$. Par conséquent, en vertu de (9) et ($*$), la fibre $\widetilde{\Sigma}_{(\alpha, c)}$ est vide sauf si $\alpha = \delta(a)$ et $c \in \overline{\Lambda \cap F \backslash E} \cap \Lambda = \Sigma$, auquel cas $\widetilde{\Sigma}_{(\alpha, c)} = \{c\}$, ce qui montre que

$$\widetilde{\Sigma} = \{\alpha = \delta(a), c = x \in \Sigma\}.$$

L'ensemble Σ est donc l'image inverse de $\widetilde{\Sigma}$ par l'application analytique

$$\mathrm{H} \times \mathrm{V} \times \mathrm{N} \ni c \mapsto (\delta(a), c, c) \in \mathrm{V}^{\theta} \times (\mathrm{H} \times \mathrm{V} \times \mathrm{N})^2$$

qui peut être regardée comme le produit diagonal des applications $c \to (\delta(a), a, b, a, b)$ et $c \to (w, w)$. Ceci montre, d'après le lemme 1, que Σ est N-semi-algébrique dans $\mathrm{H} \times \mathrm{V} \times \mathrm{N}$.

5. Un sous-ensemble de l'espace projectif $\mathbf{P}_k$ est semi-algébrique, s'il l'est dans chaque système des coordonnées cartésiennes φ_s, $s = 0, \ldots, k$, c'est-à-dire, si son image par chaque φ_s est semi-algébrique, où

$$\varphi_s : \{ x_s \neq 0 \} \ni (x_0, \ldots, x_k) \mapsto (x_0/x_s, \ldots, x_{s-1}/x_s, x_{s+1}/x_s, \ldots, x_k/x_s) \in \mathbf{R}^k$$

en coordonnées homogènes. Soit M une variété analytique; un sous-ensemble E de $\mathrm{M} \times \mathbf{P}_k$ est dit $\mathbf{P}_k$-semi-algébrique si son image par chaque $\mathrm{id}_{\mathrm{M}} \times \varphi_s$ est $\mathbf{R}^k$-semi-algébrique, auquel cas chaque fibre $\mathrm{E}_a \subset \mathbf{P}_k$, $a \in \mathrm{M}$, est semi-algébrique.

A toute variété analytique M est associé un fibré projectif analytique $q : \mathbf{P}\mathrm{TM} \to \mathrm{M}$, où $q^{-1}(x) = \mathbf{P}(\mathrm{T}_x \mathrm{M})$ pour $x \in \mathrm{M}$, appelé *fibré projectif tangent* de M. Tout isomorphisme $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ de variétés analytiques induit un isomorphisme $f_{\#} : \mathbf{P}\mathrm{TM} \to \mathbf{P}\mathrm{TM}$, défini par

$$f_{\#}(\mathbf{R}u) = \mathbf{R}\, d_x f(u) \qquad \text{lorsque } u \in \mathrm{T}_x \mathrm{M} \backslash 0$$

(sa restriction à chaque fibre $\mathbf{P}(\mathrm{T}_x \mathrm{M})$ est un isomorphisme de l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{T}_x \mathrm{M})$ sur l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{T}_{f(x)} \mathrm{N})$). En particulier, si H est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, alors $\mathbf{P}\mathrm{TH}$ est identifié à $\mathrm{H} \times \mathbf{P}_{n-1}$ (on identifie $\mathrm{T}_x \mathrm{H}$ à $x \times \mathbf{R}^n$, $x \in \mathrm{H}$); la structure d'une variété analytique de $\mathbf{P}\mathrm{TM}$ est définie par l'atlas des cartes associées $\varphi_{\#}$, où les φ sont les cartes de M.

Un sous-ensemble E de $\mathbf{P}\mathrm{TM}$ est dit $\mathbf{P}$-semi-algébrique si son image par chaque carte associée $\varphi_{\#} : \mathbf{P}\mathrm{TG} \to \mathrm{H} \times \mathbf{P}_{n-1}$ (où $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{H} \subset \mathbf{R}^n$) est $\mathbf{P}_{n-1}$-semi-algébrique. Alors chacune de ses fibres $\mathrm{E}_a = \mathrm{E} \cap \mathbf{P}(\mathrm{T}_a \mathrm{M})$, $a \in \mathrm{M}$, est semi-algébrique.

Soit $v : \mathrm{M} \to \mathrm{TM}$ un champ vectoriel analytique sur une variété analytique M. Alors $\widetilde{v} : \{ v \neq 0 \} \ni x \mapsto \mathbf{R}v(x) \in \mathbf{P}\mathrm{TM}$ est une section analytique sur $\{ v \neq 0 \}$ de $\mathbf{P}\mathrm{TM}$. On appelle ensemble des directions limites de v (resp. en $a \in \mathrm{M}$) l'adhérence $\bar{v}$ de la section $\widetilde{v}$ identifiée à son image dans $\mathbf{P}\mathrm{TM}$ (resp. sa fibre $\bar{v}_a$) (les sections d'un fibré analytique $p : \mathrm{X} \to \mathrm{M}$ s'identifient à leurs images, sous-variétés analytiques de X de dimension dim M qui intersectent chaque fibre transversalement et en au plus un point). L'image $f_* v$ de v par un isomorphisme $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ de variétés analytiques est défini par $(f_* v)(f(x)) = (d_x f)(v(x))$. Ceci donne $\widetilde{f_* v} = f_{\#}(\widetilde{v})$, car on a

$$\mathbf{R}(f_* v)(f(x)) = f_{\#}(\mathbf{R}v(x)),$$

et par conséquent

$$(\#) \qquad \overline{f_* v} = f_{\#}(\bar{v}).$$

Théorème de Thom. — Si v est un champ vectoriel analytique sur une variété analytique M, *alors son ensemble de directions limites $\bar{v}$ est un sous-ensemble* **P***-semi-algébrique du fibré projectif tangent* **P**TM. *En particulier, l'ensemble des directions limites $\bar{v}_a$ de v en un point $a \in$ M quelconque est semi-algébrique dans* $\mathbf{P}(\mathrm{T}_a \mathrm{M})$.

En effet, le problème est local sur M donc, en vertu de (♯), il suffit de traiter le cas où M $=$ G est un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Alors l'image de l'ensemble

$$\tilde{v} = \{(x, \mathbf{R}v(x)) : v(x) \neq 0\} \subset \mathrm{G} \times \mathbf{P}_{n-1}$$

par $(\mathrm{id}_{\mathrm{G}}) \times \varphi_s$ est égal à

$$\{(x, y_1, \ldots, y_{s-1}, y_{s+1}, \ldots, y_n) \in \mathrm{G} \times \mathbf{R}^{n-1} : y_i v_j(x) = y_j v_i(x), y_s = 1, v(x) \neq 0\}.$$

Comme celui-ci est $\mathbf{R}^{n-1}$-semi-algébrique, il suffit d'appliquer le théorème du nº 1.

Remarque. — Le fait que l'ensemble des directions limites en un point a est semi-algébrique peut être déduit du théorème sur semi-algébricité d'un cône semi-analytique (voir [5]). En effet, on peut admettre que M $=$ G est un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Or, le cône de $\mathbf{R}^n$ qui correspond à $\bar{v}_a$ est semi-analytique, donc semi-algébrique : il est égal à la fibre W_a de l'adhérence W du sous-ensemble semi-analytique $\{(x,y) \in \mathrm{G} \times \mathbf{R}^n : y \wedge v(x) = 0, v(x) \neq 0\}$ de $\mathrm{G} \times \mathbf{R}^n$.

RÉFÉRENCES

[1] E. Bierstone and P. D. Milman, Semianalytic and subanalytic sets, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **67** (1988), 5-42.

[2] J. Bochnak, M. Coste et M.-F. Roy, *Géométrie algébrique réelle*, New York, Springer-Verlag, 1987.

[3] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, I.H.E.S. (prépublication) (1964).

[4] Id., Sur la séparation régulière, *Seminari di Geometria Università di Bologna*, 1985, 119-121.

[5] Id., Sur les cônes semi-analytiques, *ibid.*, 123-125.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński
30-059 Kraków
Reymonta 4
Pologne

Manuscrit reçu le 30 septembre 1988.