PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

BERNARD TEISSIER

# Travaux de Thom sur les singularités

*Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, tome 68 (1988), p. 19-25
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1988__68__19_0>

# TRAVAUX DE THOM SUR LES SINGULARITÉS

*par* BERNARD TEISSIER

Dans ce qui suit*, je ne parlerai pas du développement ultérieur des idées évoquées; on sait que certaines démonstrations indiquées par Thom ont abouti grâce en particulier aux travaux de Mather, et que d'une manière générale les idées de Thom et celles de Mather ont conjointement inspiré une grande quantité de travaux.

Les travaux de Thom sur les singularités commencent vers 1955; leur but est d'étudier les applications différentiables « générales » d'une variété différentielle dans une autre et ils ont, me semble-t-il, trois concepts directeurs : celui de stabilité, celui de stratification et celui de transversalité, selon la magnifique maxime de Thom (voir [35][1]) :

« *Toute instabilité topologique* (d'une application $f$) *est due à un manque de transversalité* (d'une application associée à $f$, vis-à-vis d'une stratification). »

Les principaux outils sont la définition et les propriétés des ensembles et morphismes stratifiés, le théorème de transversalité, la condition de non-éclatement pour un morphisme stratifié, et les théorèmes d'isotopie. Il faut voir aussi que l'utilisation de ces outils fondamentaux se fait au moyen d'un festival de constructions géométriques, surtout dans des espaces de jets.

Les résultats issus de la vision de Thom incluent la densité des applications topologiquement stables dans l'espace de toutes les applications différentiables propres entre deux variétés différentielles, la densité de celles qui sont triangulables, et la classification des familles locales stables de fonctions dépendant d'au plus quatre paramètres. Nous devons aussi à Thom beaucoup d'intuitions ou de principes heuristiques précieux; je propose par exemple celui-ci :

*Un ensemble singulier associé de façon naturelle à une application différentiable propre et générique $f$ est naturellement stratifié; sa stratification est, au moins localement, l'image réciproque, par une application différentiable* F *associée à $f$, d'une stratification* (semi-)algébrique *à laquelle* F *est transverse.*

---

* Texte d'une allocution prononcée lors de la séance d'ouverture du Colloque en l'honneur de René Thom, tenu à Paris du 25 au 30 septembre 1988.

1. Les nombres entre crochets renvoient à la liste de Publications de René Thom figurant en tête de ce volume.

J'ai choisi de privilégier ici ce qui concerne la densité des applications différentiables topologiquement stables, et ce qui suit n'est donc pas un exposé complet des travaux de Thom sur les singularités.

Après avoir utilisé la transversalité dans son grand article « Quelques propriétés globales des variétés différentiables » ([10]), Thom s'intéresse aux singularités génériques pour la première fois dans « Les singularités des applications différentiables » ([13]) ; l'idée qui est utilisée est d'associer à une application différentiable $f : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ l'application de $\mathbf{R}^n$ dans la Grassmanienne G des $n$-plans passant par 0 dans $\mathbf{R}^{n+p}$, qui à $x \in \mathbf{R}^n$ associe l'espace tangent en $(x, f(x))$ au graphe $G_f$ de $f$ dans $\mathbf{R}^{n+p}$. Une première condition de généricité est la transversalité de cette application aux cycles de Schubert dans G qui correspondent à la dimension de l'intersection de $T \in G$ avec $\mathbf{R}^n \times \{0\}$, c'est-à-dire au corang à la source de $f$ en $x$. Si cette condition est satisfaite, l'ensemble $S_r$ des points où le corang est donné est non-singulier, et l'on peut considérer la restriction de $f$ à $S_r$. Ce point de vue « de Thom-Boardman » est utilisé par Thom dans le même article pour donner un calcul de la classe d'homologie des $S_r$, du lieu critique par exemple, d'une application différentiable générale entre deux variétés en fonction des classes de Stiefel-Whitney de la source et des images inverses par $f$ des classes de Stiefel-Whitney du but.

Dans les articles « Un lemme sur les applications différentiables » ([15]) et « Les ensembles singuliers d'une application différentiable et leurs propriétés homologiques » ([16]), cette idée est élaborée et étendue à l'espace des jets, comme ceci :

Soit $J^r(n, p)$ l'espace vectoriel des jets d'ordre $r$ d'applications de classe $\geqslant r$ de $(\mathbf{R}^n, 0)$ dans $(\mathbf{R}^p, 0)$. Pour l'opération déduite de la composition des fonctions, l'ensemble des éléments inversibles de $J^r(n, n)$ forme un groupe de Lie $L^r(n)$. Le groupe produit $L^r(n) \times L^r(p)$ agit naturellement sur $J^r(n, p)$. Pour Thom, une singularité est une orbite de cette action. Plus tard, dans [40], une singularité sera une sous-variété de $J^r(n, p)$ invariante par cette action, en fait une strate d'une « stratification canonique » de l'espace des jets ([35]). A toute application $f$ de classe $\geqslant r$ est associée une application $j^r f : \mathbf{R}^n \to J^r(n, p)$ qui envoie chaque point de $\mathbf{R}^n$ sur le jet de $f$ en ce point, et l'ensemble des points de $\mathbf{R}^n$ présentant une singularité donnée est l'image inverse par $j^r f$ de la singularité. La nature d'une application $f$ générique est d'être telle que $j^r f$ soit transverse à toutes les singularités, et en particulier évite celles qui sont de codimension grande dans l'espace des jets. La difficulté surmontée au moyen du Théorème de transversalité (voir ci-dessous) est précisément de montrer qu'une application dont le jet $j^r f$ est tranverse à toutes les singularités est générique au sens de la topologie des espaces fonctionnels.

Pour l'étude globale des applications $N^n \to P^p$ de variétés différentielles, Thom utilise le fibré des jets $J^r(N, P)$ sur $N \times P$ introduit par Ehresmann et l'application $j^r f$ est remplacée par une section de ce fibré, à qui la généricité imposera d'être transverse à la sous-variété Y de $J^r(N, P)$ qui est réunion des copies dans chaque fibre $J^r(n, p)$ de la singularité donnée. Comme l'a rappelé Haefliger dans l'article précédent, cela permet de définir et d'étudier la classe de cohomologie dans $H^*(N)$ duale de la classe d'homologie du lieu des points présentant une singularité de type donné, et de l'exprimer à l'aide des classes caractéristiques des fibrés $T_N$ et $f^* T_P$. C'est l'origine de la théorie des polynômes de Thom.

Après 1960, entre en force le thème de la stabilité topologique et différentielle des applications; dans ses conférences à Bonn en 1960 ([40]), Thom indique que « *deux aspects principaux dominent la théorie : l'aspect local qui cherche à caractériser les singularités "génériques" et l'aspect global qui s'intéresse aux propriétés globales des ensembles critiques* (...) *le problème global le plus intéressant est de montrer que dans l'espace* $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p, s)$ (des applications de classe $C^s$ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$) *presque toute application est topologiquement équivalente aux applications suffisamment voisines, au moins localement* ».

Cet article contient des énoncés et démonstrations définitifs des Théorèmes de transversalité affirmant précisément que pour la topologie naturelle dans l'espace $L^s(N, P)$ des applications propres de classe $C^s$ de N dans P, pour $r < s$, l'ensemble des applications $f$ dont l'extension $j^r f : N \to J^r(N, P)$ est transverse à une sous-variété Y de classe $s - r$ et de codimension $q$ de $J^r(N, P)$ est dense dans $L^r(N, P)$ pourvu que l'on ait

$$s - r > \max(n - q, 0).$$

C'est là aussi que l'on trouve les définitions d'équivalence (globale et locale) et de stabilité des applications :

Une application $f : N \to P$ de classe $s$ est $r$-stable s'il existe un voisinage W de $f$ dans $L(N, P, r + 1)$ telle que tout $g$ de W soit conjugué à $f$ par des difféomorphismes de N et P. Pour définir la stabilité *topologique*, on remplace « difféomorphisme » par « homéomorphisme ».

Deux conjectures fondamentales y sont énoncées : « *presque toute application propre de classe* $C^\infty$ *est* (différentiablement) *stable* » (avec un contre-exemple!) et la conjecture déjà mentionnée selon laquelle *presque toute application propre de classe* $C^\infty$ *est topologiquement stable.*

« La stabilité topologique des applications polynomiales » ([23]) introduit, sous une forme préliminaire, les concepts généraux d'ensemble et de morphisme stratifiés, d'application transverse à un ensemble stratifié, de morphisme stratifié sans éclatement, mais avec une définition de « sans éclatement » qui devra être modifiée dans [35] : si $Y < X$, on a l'inégalité $\operatorname{corang}(p \mid Y) < \operatorname{corang}(p \mid X)$. Thom y énonce les Théorèmes d'isotopie (dans les énoncés suivants, $\mathbf{I}$ désigne un segment de $\mathbf{R}$, muni de sa stratification triviale, i.e. telle que l'intérieur est une strate).

*Premier Théorème d'isotopie. — Si* $F : E \to \mathbf{I}$ *est propre et stratifiée, alors* F *est topologiquement triviale sur tout segment intérieur à* $\mathbf{I}$.

*Deuxième Théorème d'isotopie. — Si les applications* $F : E \to E'$ *et* $G : E' \to \mathbf{I}$ *sont propres et stratifiées et leur composée aussi, et si* F *est sans éclatement, les morphismes* $(G \circ F)^{-1}(a) \to G^{-1}(a)$ *induits par* F *ont tous le même type topologique pour a intérieur à* **I.**

*Note.* — En fait les Théorèmes d'isotopie tels que Thom les énonce sont beaucoup plus forts que ces énoncés simplifiés, puisqu'ils donnent des homéomorphismes *stratifiés*, c'est-à-dire respectant les stratifications des espaces ou des fibres et différentiables sur chaque strate. Le concept d'homéomorphisme stratifié est central dans toute la théorie topologique des espaces et des morphismes différentiables ou analytiques.

Cet article contient un exemple de famille d'application ayant de l'éclatement et dont le type topologique varie continûment. C'est, me semble-t-il, l'entrée de Thom dans le domaine des applications non génériques. Thom y donne aussi une esquisse de programme de démonstration du fait que « presque toute application différentiable est topologiquement stable » et la conjecture qu'une application stratifiée sans éclatement est triangulable (et donc que presque toute application différentiable est triangulable, puisque le programme que l'on vient d'évoquer contient le fait que presque toute application différentiable est sans éclatement).

Le programme est essentiellement de ramener la stabilité topologique à une condition de transversalité de $j^r f$ à une stratification d'un espace de jets (privé d'un sous-espace; il faut commencer par se restreindre à ce que l'on appelle les singularités de type singulier fini). Le Théorème de transversalité assure qu'une application $f$ assez générale satisfera cette condition. La preuve de Mather (donnée dans le cas où la variété N est compacte) utilisera le fait qu'une application assez générale $f$ est obtenue à partir d'un morphisme propre stratifié sans éclatement F par un changement de base transverse à la stratification, et que bouger un peu $f$ revient à bouger un peu le morphisme de changement de base (et aussi F); c'est donc la généralisation aux morphismes de l'idée que deux sections transverses assez voisines d'un ensemble stratifié sont topologiquement équivalentes (au sens stratifié).

« Sur la Théorie des enveloppes » ([24]). Cet article fait rentrer la théorie des enveloppes dans le cadre général des singularités d'applications différentiables, et propose des définitions unificatrices et très claires, montrant que les cas considérés comme pathologiques le sont pour des raisons de dimension; il y aurait lieu de revenir sur cet article ainsi que sur deux autres applications mathématiques de la façon de penser de Thom : Sur les équations différentielles multiformes et leurs intégrales singulières ([47]) et Sur le cut-locus d'une variété plongée ([45]).

« Local topological properties of differentiable mappings » ([25]) définit les stratifications d'ensembles semi-algébriques et aussi deux notions d'ensemble stratifié abstrait, *i.e.*, comme collections de variétés différentielles satisfaisant des conditions de régularité (voisinages tubulaires, fonctions tapissantes).

Thom définit un ensemble « fortement stratifié » comme un espace de Hausdorff E tel que pour tout point $x$ de E il y ait une présentation locale de E en $x$ comme image réciproque d'un sous-ensemble semi-algébrique stratifié A de $\mathbf{R}^n$ par une application différentiable $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ transverse sur A, et de même un morphisme est fortement stratifié s'il est obtenu par image réciproque (c'est-à-dire changement de base...) transverse d'une projection d'ensembles semi-algébriques. Thom demande si un ensemble analytique réel ou complexe est fortement stratifié.

On trouve comme application deux théorèmes qui ont inspiré beaucoup de travaux ultérieurs :

*(Théorème 3).* — *Soit* A *un sous-ensemble algébrique de* $\mathbf{R}^p$ *contenant* 0 *et soit* $z \in J^r(n, p)$ *un jet; notons* $h : J^{r+1}(n, p) \to J^r(n, p)$ *le morphisme de restriction. Il existe un sous-ensemble algébrique* $\Sigma$ *de* $h^{-1}(z)$ *tel que pour tout représentant* $g$ *d'un* $(r+1)$*-jet de* $h^{-1}(z) - \Sigma$, *l'image inverse* $g^{-1}(A)$ *soit fortement stratifiée, et pour deux tels représentants, les images inverses sont localement isotopes au sens stratifié.*

Thom donne la définition d'un jet topologiquement suffisant : deux applications quelconques présentant ce jet sont localement topologiquement équivalentes. On a alors

*(Théorème 4).* — *Soit* $z \in J^r(n, p)$ *un jet. Il existe un entier* $s$ *ne dépendant que de* $r$, $n$, *et* $p$ *tel que si* $h_s : J^{r+s}(n, p) \to J^r(n, p)$ *est la projection, il existe dans* $h_s^{-1}(z)$ *une sous-variété algébrique* $\Sigma$ *telle que tout jet hors de* $\Sigma$ *soit suffisant. Deux représentants d'un tel jet sont stratifiés et isotopes par une isotopie stratifiée.*

La démonstration utilise le Théorème de préparation de Malgrange, les inégalités de Łojasiewicz et bien sûr les Théorèmes d'isotopie.

Thom propose comme définition de la stratification canonique de l'espace des jets la totalité des variétés $\Sigma$ des $J^{r+s}(n, p)$ obtenues ainsi pour tous les $r$, $s$, et tous les jets $z$. Ces résultats, et en particulier le Théorème 4, constituent un début de réalisation de son programme pour prouver la densité des applications topologiquement stables.

Une idée qu'il fait ressortir est la nécessité d'une théorie abstraite des ensembles stratifiés parce qu'il y en a beaucoup plus que d'ensembles semi (sous)-analytiques ou algébriques.

« Ensembles et morphismes stratifiés » ([35]) est un article de mise au point des idées principales de Thom sur ce sujet; il contient la définition axiomatique et l'étude des ensembles stratifiés et des morphismes stratifiés, la définition de la condition $A_p$ de Thom et des morphismes stratifiés sans éclatement et la démonstration des théorèmes d'isotopie. Démonstration du fait qu'un W-objet (c'est-à-dire une réunion de variétés satisfaisant les conditions de Whitney) est un ensemble stratifié au sens de Thom, et du fait qu'une projection d'un ensemble semi-analytique compact peut être stratifiée (Thom parle des Projections de Semi-Analytiques compacts ou P.S.A., et propose une démonstration du fait que l'on peut les stratifier, ce qui est bien sûr nécessaire si l'on veut stratifier les morphismes analytiques). Dans cet article on trouve une définition très condensée de la stratification canonique de l'espace des jets. Cela permet à Thom de décrire géométriquement la propriété pour un jet d'être déterminant (c'est-à-dire un jet qui détermine le type topologique de tous ses représentants) par une propriété de la strate de la stratification canonique contenant $z$. Cette strate est de codimension finie dans $J^r(n, p)$, disons $k$, et une section transverse à cette strate est un « déploiement universel » du jet $z$; c'est une application de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ dans $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^k$, qui est stable. On est ici à la source du concept de déploiement universel et de la classification des germes de morphismes stables.

« Structure locale des morphismes analytiques » ([41]). Ici Thom propose une définition des ensembles stratifiés comme ceux qui sont obtenus par des identifications selon des schémas d'incidence de variétés à coins ayant une structure locale précise. L'idée intuitive est, me semble-t-il, qu'un ensemble stratifié a une « résolution des singularités » le transformant en un diviseur à croisements normaux dans une variété, et qu'il en est une contraction satisfaisant à des règles précises. C'est une sorte de vision à l'envers de ce que l'on appelle aujourd'hui en Géométrie analytique la « résolution simultanée », et cela pose implicitement le très difficile problème de prouver qu'un ensemble analytique stratifié possède une résolution simultanée des singularités le long de chaque strate, au moins localement. Thom se place dans le cadre de la Géométrie analytique et pose le problème, plus général que celui posé dans [25], de savoir si tout morphisme analytique (réel ou complexe) est localement isotope, en tant que morphisme stratifié, à un morphisme algébrique.

Dans « The bifurcation subset of a space of maps » ([38]), Thom propose que l'on étudie les espaces fonctionnels au moins autant au moyen de leur stratification naturelle, commençant par exemple par le fermé des applications non stables, qu'au moyen de leur structure d'espace vectoriel topologique. Il expose l'idée générale de stratifier un espace d'applications, ou du moins le complémentaire dans un tel espace d'un sous-ensemble de codimension infinie, revient sur le déploiement universel, et s'interroge aussi sur les propriétés globales des stratifications naturelles de $C^\infty(X, Y)$.

« Un résultat sur la monodromie » (avec M. Sebastiani [44]). Etant donné deux germes de fonctions analytiques complexes $f$ sur $\mathbf{C}^n$ et $g$ sur $\mathbf{C}^p$ à singularité isolée en 0, la fonction $f(z) + g(w)$ sur $\mathbf{C}^{n+p}$ a pour monodromie (au voisinage de 0) le produit tensoriel de la monodromie de $f$ et de celle de $g$.

A partir de 1965 environ Thom commencera à appliquer sa vision et en particulier ses idées sur la stabilité structurelle dans des domaines comme la biologie et la linguistique. Ici la maxime est *l'apparition de la structure est due à la stabilité de conflits entre états stables*. Très brièvement, les postulats de base relient les morphologies observées dans la nature à celles d'ensembles de « catastrophe » dérivés des bifurcations des états stables (attracteurs) de systèmes dynamiques variant dans une famille *elle-même stable* (au moins topologiquement), en particulier des bifurcations des minima des fonctions appartenant à une famille stable. Un autre postulat est que, pour les morphologies « élémentaires », seules les familles stables dépendant d'au plus quatre paramètres interviennent localement. L'identité entre famille stable de fonctions et déploiement universel d'une fonction à point critique isolé a permis de déterminer les sept familles stables dépendant d'au plus quatre paramètres. C'est la naissance de la Théorie des catastrophes, à laquelle il faudrait consacrer un autre colloque et qui est, au-delà de toutes les controverses, un superbe exemple de Mathématiques appliquées à l'intelligence des phénomènes naturels. Cette approche conceptuelle de l'intelligibilité manifeste la rigueur profonde de Thom à l'égard du sens.

Je remercie Alain Chenciner, André Haefliger et Dũng Tràng Lê pour leurs commentaires.

Département de Mathématiques et d'Informatique
École normale supérieure
45, rue d'Ulm, 75005 Paris

*Manuscrit reçu le 2 avril 1989.*