PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

GÉRARD LAUMON

Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 65 (1987), p. 131-210

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1987__65__131_0>

TRANSFORMATION DE FOURIER CONSTANTES D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES ET CONJECTURE DE WEIL

par G. LAUMON

INTRODUCTION

En 1982, Witten publie une démonstration analytique des inégalités de Morse en géométrie riemannienne ([Wi] et aussi [He 1]), dont le principe peut se décrire comme suit. Soient M une variété $\mathscr{C}^\infty$ compacte munie d'une structure riemannienne et $f: \mathrm{M} \to \mathbf{R}$ une fonction de Morse. Witten remarque que le complexe de De Rham $(\mathscr{A}^\bullet(\mathrm{M}), d)$ des formes différentielles $\mathscr{C}^\infty$ sur M se déforme en une famille à un paramètre réel y de complexes $(\mathscr{A}^\bullet(\mathrm{M}), d_y)$, où

$$d_y = e^{-yf} \circ d \circ e^{yf} = d + y\, df$$

$(d_0 = d)$. Bien sûr, la multiplication par la fonction e^{yf} induit un isomorphisme du complexe $(\mathscr{A}^\bullet(\mathrm{M}), d_y)$ sur le complexe $(\mathscr{A}^\bullet(\mathrm{M}), d)$ et, en particulier, les dimensions des groupes de cohomologie de $(\mathscr{A}^\bullet(\mathrm{M}), d_y)$ sont indépendantes de y (égales aux nombres de Betti de M). Cependant, du point de vue de la structure riemannienne, cette déformation est tout à fait non triviale. En effet, Witten montre que le spectre du laplacien

$$\Delta_y = d_y\, d_y^* + d_y^*\, d_y$$

change radicalement quand $y \to +\infty$. Plus précisément, Witten prouve que, pour tout nombre réel $\mathrm{A} \geqslant 0$, les vecteurs propres η_y de Δ_y $\left(\text{normalisés par } \int_{\mathrm{M}} \eta_y \wedge * \eta_y = 1\right)$, associés à des valeurs propres $\lambda_y \leqslant \mathrm{A}$, se concentrent au voisinage des points critiques de f quand $y \to +\infty$ (pour tout compact K de M ne contenant aucun point critique de f, $\int_{\mathrm{K}} \eta_y \wedge * \eta_y \to 0$ quand $y \to +\infty$). Une étude locale de Δ_y au voisinage de chaque point critique de f lui permet d'en déduire que, pour chaque degré $i \in \{0, 1, \ldots, \dim(\mathrm{M})\}$, la restriction de Δ_y à $\mathscr{A}^i(\mathrm{M})$ a exactement $m_i(f)$ vecteurs propres indépendants dont les valeurs propres correspondantes restent bornées quand $y \to +\infty$, où $m_i(f)$ est le nombre des points critiques de f d'indice i, les autres valeurs propres tendant toutes vers $+\infty$ avec y. La fin de l'argument est standard. Pour tout nombre réel $A \geqslant 0$, soit $(\mathscr{H}^{\bullet}_{y,A}, d_y)$ le sous-complexe de $(\mathscr{A}^{\bullet}(M), d_y)$ engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda \leqslant A$ de Δ_y. Alors, d'une part, la théorie de Hodge assure que $\mathscr{H}^{\bullet}_{y,A}$ est de dimension finie et que l'inclusion

$$(\mathscr{H}^{\bullet}_{y,A}, d_y) \hookrightarrow (\mathscr{A}^{\bullet}(M), d_y)$$

est un quasi-isomorphisme. D'autre part, l'étude asymptotique ci-dessus du spectre de Δ_y assure que, pour A fixé assez grand, la dimension de $\mathscr{H}^{i}_{y,A}$ est égale à $m_i(f)$ pour $y \geqslant 0$. D'où les inégalités de Morse.

Dans le présent travail, nous nous inspirons de cette démonstration de Witten pour prouver que la constante de l'équation fonctionnelle de la fonction L associée à une représentation ℓ-adique d'un corps de fonctions est un produit de constantes locales et pour donner une autre démonstration du théorème de Deligne sur les poids dans la cohomologie ℓ-adique. Dans les deux cas, le problème qui se pose est du type suivant : étant donné une variété projective V sur un corps k de caractéristique $p > 0$, un nombre premier $\ell \neq p$ et un complexe de faisceaux ℓ-adiques (*) K sur V, on veut déduire d'informations locales sur (V, K) des informations globales sur la cohomologie ℓ-adique $R\Gamma(V \otimes_k \bar{k}, K)$, où $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k. Le cas essentiel est le cas $V = \mathbf{P}^1_k$: en effet, un dévissage à la Grothendieck ramène le cas général à ce cas particulier (on choisit une fonction méromorphe non constante $f: V \to \mathbf{P}^1_k$; on a

$$R\Gamma(V \otimes_k \bar{k}, K) = R\Gamma(\mathbf{P}^1_{\bar{k}}, Rf_* K),$$

la fibre de $Rf_* K$ en un point x de $\mathbf{P}^1_{\bar{k}}$ s'identifie à $R\Gamma(f^{-1}(x), K)$, grâce au théorème de changement de base pour un morphisme propre, et on est ramené au cas $V = \mathbf{P}^1_{\bar{k}}$ par récurrence sur la dimension de V). Et c'est pour analyser $R\Gamma(V \otimes_k \bar{k}, K)$, dans le cas $V = \mathbf{P}^1_k$, que l'on utilise une déformation à un paramètre de ce dernier complexe, modelée sur celle de Witten. Plus précisément, on fixe un caractère additif non trivial $\psi : \mathbf{F}_p \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$, où $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ est une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_\ell$. Pour chaque $y \in \bar{k}$, le revêtement d'Artin-Schreier de la droite affine $\mathbf{A}^1_{\bar{k}}$ d'équation

$$t^p - t = yx,$$

où x est la coordonnée standard sur $\mathbf{A}^1_{\bar{k}}$, et le caractère ψ du groupe de Galois $\mathbf{F}_p$ de ce revêtement induisent un faisceau ℓ-adique, $\mathscr{L}_\psi(yx)$, lisse de rang 1 sur $\mathbf{A}^1_{\bar{k}}$, dont on notera $\bar{\mathscr{L}}_\psi(yx)$ le prolongement par 0 à $\mathbf{P}^1_{\bar{k}}$ tout entier. Alors, la déformation en question du complexe $R\Gamma(\mathbf{P}^1_{\bar{k}}, K)$ est la famille de complexes

$$R\Gamma(\mathbf{P}^1_{\bar{k}}, K \otimes \bar{\mathscr{L}}_\psi(yx)),$$

indexée par les $y \in \bar{k}$ (en fait, $R\Gamma(\mathbf{P}^1_{\bar{k}}, K)$ se dévisse en la fibre de K au point ∞ de $\mathbf{P}^1_{\bar{k}}$ et en $R\Gamma_c(\mathbf{A}^1_{\bar{k}}, K)$ et, pour $y = 0$, on a

$$R\Gamma(\mathbf{P}^1_{\bar{k}}, K \otimes \bar{\mathscr{L}}_\psi(yx)) = R\Gamma_c(\mathbf{A}^1_{\bar{k}}, K)).$$

(*) La terminologie est légèrement abusive, voir (0.5) ci-dessous.

La pleine force de cette déformation vient de son lien très étroit avec la transformation de Fourier géométrique introduite par Deligne en 1976 pour d'autres raisons. Deligne définit, pour chaque caractère additif non trivial $\psi : \mathbf{F}_p \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$, une involution $\mathscr{F}_\psi$ sur la catégorie dérivée des faisceaux ℓ-adiques sur $\mathbf{A}^1_k$ qui est une version géométrique de la classique transformation de Fourier sur les fonctions $f : \mathbf{F}_p \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell$, définie par

$$\hat{f}(y) = \sum_{x \in \mathbf{F}_p} f(x)\, \psi(yx).$$

Pour tout $y \in \bar{k}$, vu comme un point géométrique de $\mathbf{A}^1_k$, le complexe $\mathrm{R}\Gamma(\mathbf{P}^1_{\bar{k}}, \mathrm{K} \otimes \overline{\mathscr{L}}_\psi(yx))$ s'identifie canoniquement à la fibre en y de $\mathscr{F}_\psi(\mathrm{K} \mid \mathbf{A}^1_k)$, de sorte que la déformation ci-dessus n'est autre que $\mathscr{F}_\psi(\mathrm{K} \mid \mathbf{A}^1_k)$. En particulier, du fait de l'involutivité de $\mathscr{F}_\psi$, la donnée de cette déformation est équivalente à la donnée de $\mathrm{K} \mid \mathbf{A}^1_k$.

Ce travail est divisé en quatre chapitres.

Le premier rappelle la définition et les principales propriétés de la transformation de Fourier-Deligne.

Dans le second chapitre, nous étudions, pour un complexe de faisceaux ℓ-adiques K fixé sur $\mathbf{A}^1_k$, les monodromies locales du complexe $\mathscr{F}_\psi(\mathrm{K})$ (le calcul de ces monodromies locales est l'analogue algébrique du calcul des développements asymptotiques d'intégrales oscillantes, basé sur le principe de la phase stationnaire). Ceci nous amène tout naturellement à définir des variantes locales de la transformation de Fourier-Deligne. Ces transformations de Fourier locales sont des involutions sur la catégorie des représentations ℓ-adiques du groupe de Galois d'un corps local d'égale caractéristique $p > 0$. Comme première application de ces transformations locales nous obtenons une construction cohomologique de la représentation d'Artin pour une extension finie de corps locaux d'égale caractéristique $p > 0$ et une construction cohomologique des représentations exceptionnelles du groupe de Galois d'un corps local d'égale caractéristique $p > 0$.

Le troisième chapitre est consacré à la preuve de la formule du produit pour la constante de l'équation fonctionnelle de la fonction L associée à une représentation ℓ-adique d'un corps global d'égale caractéristique $p > 0$. Cette formule du produit fait intervenir les constantes locales introduites par Tate et Langlands et nous obtenons, comme conséquence de notre preuve de la formule du produit, une interprétation cohomologique de ces constantes locales (toujours en égale caractéristique $p > 0$ bien entendu). Nous rappelons aussi dans ce chapitre les applications de cette formule du produit au dictionnaire conjectural de Langlands entre représentations ℓ-adiques de Galois et formes automorphes sur les corps de fonctions.

Dans le quatrième chapitre, nous donnons une démonstration du théorème principal de Deligne dans « La conjecture de Weil II ». Les ingrédients essentiels de cette preuve sont la transformation de Fourier-Deligne (et son involutivité) et le critère de pureté dégagé par Deligne (les sous-quotients lisses irréductibles de tout faisceau ℓ-adique lisse et ι-réel sur une courbe lisse et géométriquement connexe sur un corps fini sont ι-purs). La différence majeure entre la preuve présentée ici et la preuve originelle de

Deligne est la suppression totale de la méthode de Hadamard-de La Vallée-Poussin dans notre argument.

C'est un grand plaisir pour moi de remercier tout particulièrement P. Deligne, L. Illusie et D. Kazhdan pour les nombreuses améliorations qu'ils ont apportées à ce travail. Je tiens aussi à remercier l'I.H.E.S. et le département de Mathématiques de l'Université de Harvard pour leurs invitations qui m'ont permis d'exposer et de mettre au point les résultats de cet article. Je tiens enfin à exprimer ma reconnaissance à Mme Bonnardel et à Mme Le Bronnec pour la belle frappe du manuscrit.

0. Notations et conventions

(0.1) Dans tout cet article, on fixe d'une part un nombre premier p, un corps k parfait de caractéristique p et une clôture algébrique $\bar{k}$ de k. On désigne par q une puissance de p et par $\mathbf{F}_q$ l'unique sous-corps à q éléments de $\bar{k}$. On fixe d'autre part un nombre premier ℓ distinct de p et une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ du corps $\mathbf{Q}_\ell$ des nombres ℓ-adiques.

(0.2) On fixe aussi un caractère additif non trivial $\psi : \mathbf{F}_p \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$, *i.e.* une racine primitive p-ième $\psi(1)$ de 1 dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. On note $\psi_q : \mathbf{F}_q \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ le caractère additif non trivial défini par

$$\psi_q(x) = \psi(\mathrm{Tr}_{\mathbf{F}_q/\mathbf{F}_p}(x)), \quad \forall\, x \in \mathbf{F}_q (\psi_p = \psi);$$

tout caractère additif de $\mathbf{F}_q$ à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ est de la forme $x \mapsto \psi_q(ax)$ pour un unique $a \in \mathbf{F}_q$.

(0.3) Sauf mention explicite du contraire, les schémas considérés sont des schémas séparés et de type fini (ou essentiellement de type fini) sur k et les morphismes de schémas des k-morphismes. Pour X un tel schéma, on notera $|\mathrm{X}|$ l'ensemble des points fermés de X et, pour $x \in |\mathrm{X}|$, on notera $k(x)$ le corps résiduel de x et $\deg(x)$ le degré de $k(x)$ sur k ($\deg(x)$ est fini si X est de type fini sur k).

(0.4) Soit x un point (non nécessairement fermé) d'un schéma X. On désignera par $\bar{x}$ un point géométrique de X localisé en x (cf. [De 4] (0.3)); si $x \in \mathrm{X}(k)$, on choisira pour $\bar{x}$ le point géométrique composé de $\mathrm{Spec}(\bar{k}) \to \mathrm{Spec}(k) \xrightarrow{x} \mathrm{X}$. On notera $\mathrm{X}_{(x)}$ (resp. $\mathrm{X}_{(\bar{x})}$) l'hensélisé (resp. l'hensélisé strict) de X en x (resp. $\bar{x}$) (cf. [De 4] (0.4)). Si de plus $\mathrm{X}_{(x)}$ est un trait (hensélien), on notera η_x (resp. $\eta_{\bar{x}}$) le point générique de $\mathrm{X}_{(x)}$ (resp. $\mathrm{X}_{(\bar{x})}$) et $\bar{\eta}_x$ un point géométrique de $\mathrm{X}_{(\bar{x})}$ localisé en $\eta_{\bar{x}}$ (cf. [De 4] (0.6)).

(0.5) Si X est un schéma, nous dirons « $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux sur X » pour « $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux constructibles sur X » ([SGA 5] VI, [De 4] (1.1.1)). Nous noterons $\mathrm{D}_c^b(\mathrm{X}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ la catégorie dérivée des faisceaux ℓ-adiques définie par Deligne ([De 4] (1.1.2) et (1.1.3)).

Pour S un schéma régulier de dimension $\leqslant 1$, pour X, Y des S-schémas de type fini et pour $f: X \to Y$ un S-morphisme, on dispose alors des opérations internes $\otimes$ et $R\mathscr{H}om$ sur $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, des foncteurs

$$Rf_!, Rf_* : D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D_c^b(Y, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

et

$$f^*, Rf^! : D_c^b(Y, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

et, si de plus S est un trait hensélien, des foncteurs $R\Psi$ et $R\Phi$ de la théorie des cycles évanescents pour le S-schéma X ([De 4] (1.1.2); ces constructions dépendent d'énoncés de finitude établis dans [SGA 4] XIV, XVII et [SGA 4½] [Th. Finitude]). On notera

$$D_{X/S} : D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)^{\mathrm{opp}} \to D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

le foncteur dualisant $D_{X/S}(-) = R\mathscr{H}om(-, Ra^! \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ où $a : X \to S$ est le morphisme structural.

On utilisera librement pour les $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux et leur catégorie dérivée définie ci-dessus les théorèmes qui sont énoncés et établis dans la littérature pour les faisceaux constructibles de Λ-modules, Λ un anneau fini d'ordre premier à p (cf. [De 4] (1.1.4); il s'agit des énoncés fondamentaux de [SGA 4] tome 3, [SGA 7] XIII et [SGA 4½] [Th. Finitude] ainsi que la formule des traces de Grothendieck [SGA 5] XII, XV et [SGA 4½] [Rapport]).

(0.6) La définition de Deligne de $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ pose un problème pour tout ce qui concerne les t-structures : en général, $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ n'est pas triangulée. Ce problème a été résolu par Gabber et par Ekedahl qui adoptent des définitions différentes de celles de Deligne pour $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$; cependant leurs constructions ne sont pas publiées à ce jour. Aussi nous ferons dans tout cet article l'hypothèse supplémentaire suivante sur k :

(*) Pour toute extension finie k' de k contenue dans $\bar{k}$, les groupes $H^i(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k'), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$, $i \in \mathbf{N}$, sont finis.

Alors, pour X de type fini sur k, $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est triangulée et munie d'une t-structure dont le cœur est équivalent à la catégorie abélienne des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux ([B-B-D] 2.2.15 et 2.2.16 et [De 4] (1.1.2)). Si le corps k est fini ou algébriquement clos, l'hypothèse (*) est automatiquement vérifiée.

(0.7) Soit X un schéma de type fini sur k (k vérifiant (*)). Nous renvoyons à [B-B-D] 2.2 pour la définition des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux pervers sur X. On notera $\mathrm{Perv}(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ la sous-catégorie strictement pleine de $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ formée des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux pervers; c'est une catégorie abélienne artinienne et noethérienne qui est le cœur de la t-structure sur $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ associée à la perversité autoduale et qui est donc stable sous $D_{X/k}$ (cf. [B-B-D] 2.2 et 4.3.1). Nous utiliserons librement les notations ${}^p\mathscr{H}^n$, $j_{!*}$, ... de *loc. cit.*

(0.8) Pour X comme en (0.7), on notera $K(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie triangulée $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ ([SGA 6] IV); $K(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ s'identifie encore aux groupes de Grothendieck suivants : celui de la catégorie abélienne des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux et celui de la catégorie abélienne $\mathrm{Perv}(\mathrm{X}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Pour $\mathrm{K} \in \mathrm{ob}\, \mathrm{D}^b_c(\mathrm{X}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a en fait :

$$[\mathrm{K}] = \sum_i (-1)^i [\mathscr{H}^i(\mathrm{K})] = \sum_j (-1)^j [{}^p\mathscr{H}^j(\mathrm{K})]$$

dans $\mathrm{K}(\mathrm{X}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

L'opération interne $\otimes$ et les foncteurs $\mathrm{R}f_!, f^*$ induisent un produit $\cdot$ et des homomorphismes de groupes $f_!, f^*$ sur les groupes de Grothendieck correspondants.

Si k est algébriquement clos et si $a : \mathrm{X} \to \mathrm{Spec}(k)$ est le morphisme structural, $\mathrm{K}(\mathrm{Spec}(k), \overline{\mathbf{Q}}_\ell) = \mathbf{Z}$ et on note encore $\chi(\mathrm{X}, -)$ l'homomorphisme $a_!$.

(0.9) Nous noterons Frob_q le Frobenius géométrique relatif à $\mathbf{F}_q$ ([De 4] (1.1.7)). Si X est un schéma de type fini sur $\mathbf{F}_q$ et si F est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau sur X, pour tout $x \in |\mathrm{X}|$, $\mathrm{F}_{\bar{x}}$ est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie n sur lequel $\mathrm{Gal}(k(\bar{x})/k(x))$ agit; $k(x)$ étant un corps fini à $q^{\deg(x)}$ éléments, $\mathrm{Frob}_x := \mathrm{Frob}_{q^{\deg(x)}}$ peut être considéré comme un élément de $\mathrm{Gal}(k(\bar{x})/k(x))$ et $\det(1 - t.\mathrm{Frob}_x, \mathrm{F}_{\bar{x}}) \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell[t]$ est bien défini. De plus, ce polynôme est indépendant du choix de $\bar{x}$ et sera noté $\det(1 - t.\mathrm{Frob}_x, \mathrm{F})$ ([De 4] (1.1.8)); de même, on notera $\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_x, \mathrm{F})$ la trace de Frob_x agissant sur $\mathrm{F}_{\bar{x}}$, *i.e.* le coefficient de $-t$ dans $\det(1 - t.\mathrm{Frob}_x, \mathrm{F})$, et on notera $\det(\mathrm{Frob}_x, \mathrm{F})$ le déterminant de Frob_x agissant sur $\mathrm{F}_{\bar{x}}$, *i.e.* le coefficient de $(-t)^n$ dans $\det(1 - t.\mathrm{Frob}_x, \mathrm{F})$. Par additivité, on en déduit des homomorphismes de groupes

$$\det(1 - t.\mathrm{Frob}_x, -) : \mathrm{K}(\mathrm{X}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell(t)^\times \cap (1 + t\overline{\mathbf{Q}}_\ell[[t]])$$
$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_x, -) : \mathrm{K}(\mathrm{X}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell$$
$$\det(\mathrm{Frob}_x, -) : \mathrm{K}(\mathrm{X}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$$

et, pour $\mathrm{K} \in \mathrm{ob}\, \mathrm{D}^b_c(\mathrm{X}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on posera

$$\det(1 - t.\mathrm{Frob}_x, \mathrm{K}) := \det(1 - t.\mathrm{Frob}_x, [\mathrm{K}]), \ \ldots$$

1. La transformation de Fourier-Deligne

(1.1) *Le dictionnaire fonctions-faisceaux : rappels* ([SGA $4\frac{1}{2}$] [Sommes trig.] et [De 5]). Dans tout ce numéro ((1.1.3.7) excepté) $k = \mathbf{F}_q$.

(1.1.1) Pour X un schéma de type fini sur $\mathbf{F}_q$, on note $\mathscr{C}(\mathrm{X}(\mathbf{F}_q), \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ la $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-algèbre des applications $t : \mathrm{X}(\mathbf{F}_q) \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell$. Si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un morphisme de tels schémas, on a un homomorphisme de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-vectoriels

$$f_! : \mathscr{C}(\mathrm{X}(\mathbf{F}_q), \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \mathscr{C}(\mathrm{Y}(\mathbf{F}_q), \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

et un homomorphisme de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-algèbres

$$f^* : \mathscr{C}(\mathrm{Y}(\mathbf{F}_q), \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \mathscr{C}(\mathrm{X}(\mathbf{F}_q), \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

définis par

$$(f_! t)(y) = \sum_{\substack{x \in X(\mathbf{F}_q) \\ f(x) = y}} t(x), \quad \forall y \in Y(\mathbf{F}_q),$$

et

$$(f^* u)(x) = u(f(x)), \quad \forall x \in X(\mathbf{F}_q).$$

Suivant Grothendieck, on associe à tout $K \in \mathrm{ob}\, D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ sa fonction *trace de Frobenius* $t_K \in \mathscr{C}(X(\mathbf{F}_q), \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ définie par

$$t_K(x) = \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_x, K), \quad \forall x \in X(\mathbf{F}_q)$$

(x est considéré comme un point fermé de X, cf. (0.9)). L'application $K \mapsto t_K$ vérifie les propriétés suivantes, qui résultent trivialement des définitions à l'exception de (1.1.1.3) :

(1.1.1.0) Pour tout entier n, $t_{\overline{\mathbf{Q}}_{\ell,X}(n)}$ est la fonction constante de valeur q^{-n}.

(1.1.1.1) Pour tout triangle distingué

$$K' \to K \to K'' \to K'[1]$$

dans $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a

$$t_K = t_{K'} + t_{K''};$$

en particulier, pour tout $K \in \mathrm{ob}\, D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a

$$t_K = \sum_i (-1)^i t_{\mathscr{H}^i(K)} = \sum_j (-1)^j t_{{}^p\mathscr{H}^j(K)}.$$

(1.1.1.2) Pour tous $K_1, K_2 \in \mathrm{ob}\, D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a

$$t_{K_1 \otimes K_2} = t_{K_1} \cdot t_{K_2}.$$

(1.1.1.3) *Formule des traces de Grothendieck* ([SGA 5] XII, XV et [SGA 4½] [Rapport]). — Pour tout $\mathbf{F}_q$-morphisme $f: X \to Y$ entre $\mathbf{F}_q$-schémas de type fini et tout $K \in \mathrm{ob}\, D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a

$$t_{Rf_! K} = f_! t_K.$$

(1.1.1.4) Pour tout $f: X \to Y$ comme ci-dessus et tout $L \in \mathrm{ob}\, D_c^b(Y, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a

$$t_{f^* L} = f^* t_L.$$

Remarque **(1.1.1.5)**. — Il n'est par contre pas vrai que $t_{Rf_* K}$ ne dépende de K que par l'intermédiaire de t_K, comme le montre l'exemple suivant : si $Y = \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_q} - \mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_q}(\mathbf{F}_q)$, $X = Y - \{\infty\}$ et $f: X \to Y$ est l'inclusion, on a $t_{\overline{\mathbf{Q}}_{\ell,X}} = 0$ et $t_{Rf_* \overline{\mathbf{Q}}_{\ell,X}}(\infty) = 1 - q$. On se reportera cependant à [Lau 2] pour un énoncé positif.

La donnée de t_K est insuffisante pour déterminer K, même virtuellement (par exemple, $X(\mathbf{F}_q)$ peut être vide!); il en va de même de la donnée de $t_{K|X\otimes_{\mathbf{F}_q}\mathbf{F}_{q^n}}$, pour un entier $n \geqslant 1$ fixé. Par contre, la donnée de la suite

$$t_{\bullet K} = (t_{K|X\otimes_{\mathbf{F}_q}\mathbf{F}_{q^n}})_{n\geqslant 1} \in \prod_{n\geqslant 1} \mathscr{C}(X(\mathbf{F}_{q^n}), \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

(on a identifié $(X\otimes_{\mathbf{F}_q}\mathbf{F}_{q^n})(\mathbf{F}_{q^n})$ à $X(\mathbf{F}_{q^n})$) permet de retrouver [K] dans $K(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Plus précisément, l'application $K \mapsto t_{\bullet K}$ induit, grâce à (1.1.1.1), un homomorphisme de groupes

$$t_\bullet : K(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \prod_{n\geqslant 1} \mathscr{C}(X(\mathbf{F}_{q^n}), \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

et on a le résultat bien connu suivant pour lequel je ne connais pas de référence.

Théorème **(1.1.2)**. — *L'homomorphisme* $t_\bullet$ *est injectif.*

Preuve. — $K(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est le $\mathbf{Z}$-module libre de base les classes d'isomorphie d'objets simples de $\mathrm{Perv}(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ (cf. (0.7) et (0.8)). Par suite, il suffit de prouver l'extension suivante du théorème de Čebotarev :

Proposition **(1.1.2.1)**. — *Soient* K′, K″ *deux* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceaux pervers semi-simples sur* X. *Alors, si* $t_{\bullet K'} = t_{\bullet K''}$, K′ *et* K″ *sont isomorphes.*

Preuve de la proposition. — Ceci ne changeant pas la topologie étale, on peut remplacer X par X_{red} et donc supposer X réduit. On procède par récurrence noethérienne sur X. Soit $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert non vide, connexe, lisse sur $\mathbf{F}_q$ et sur lequel les $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux $\mathscr{H}^i(K')$ et $\mathscr{H}^i(K'')$ $(i \in \mathbf{Z})$ sont lisses; notons $i : Y \hookrightarrow X$ le fermé réduit complémentaire. Le théorème de structure [B-B-D] (4.3.1) (ii) montre qu'il existe alors deux $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux lisses semi-simples F′ et F″ sur U et deux $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux pervers semi-simples L′ et L″ sur Y tels que

$$K' \simeq j_{!*}(F'[d]) \oplus i_* L'$$
$$K'' \simeq j_{!*}(F''[d]) \oplus i_* L'',$$

où d est la dimension de U sur $\mathbf{F}_q$. De plus, si $t_{\bullet K'} = t_{\bullet K''}$, on a, par restriction à U, $t_{\bullet F'} = t_{\bullet F''}$. Mais alors, il suit du théorème de Čebotarev usuel (densité des Frobenius géométriques dans le π_1 de U, [Se 5] Thm. 7) que F′ et F″ sont isomorphes et, par suite, que $t_{\bullet L'} = t_{\bullet L''}$. De là, L′ et L″ sont aussi isomorphes par hypothèse de récurrence, d'où la proposition.

Exemple **(1.1.3)** (Deligne, [SGA 4½] [Sommes trig.]). — Soit J un groupe algébrique commutatif connexe et de type fini sur $\mathbf{F}_q$; on note multiplicativement la loi de groupe. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $J(\mathbf{F}_{q^n})$ est un groupe fini et les $J(\mathbf{F}_{q^n})$ forment un système projectif avec pour flèches de transition les normes $N_{\mathbf{F}_{q^{nm}}/\mathbf{F}_{q^n}} : J(\mathbf{F}_{q^{nm}}) \to J(\mathbf{F}_{q^n})$ $(n, m$ entiers $\geqslant 1)$.

L'isogénie de Lang de J est l'extension de J par $J(\mathbf{F}_q)$

$$1 \to J(\mathbf{F}_q) \to J \xrightarrow{L} J \to 1$$

où $L(x) = x^{-1}.\mathrm{Frob}_q(x)$ (cf. (0.9)). Pour $x \in J(\mathbf{F}_{q^n})$, l'action de Frob_{q^n} sur la fibre $L^{-1}(x)$ coïncide avec l'action de $N_{\mathbf{F}_{q^n}/\mathbf{F}_q}(x) \in J(\mathbf{F}_q)$ ($L^{-1}(x)$ est un $J(\mathbf{F}_q)$-torseur sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{F}_{q^n})$).

Maintenant, soit $\chi : J(\mathbf{F}_q) \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ un caractère du groupe fini $J(\mathbf{F}_q)$; poussant l'extension ci-dessus par χ^{-1}, on obtient une extension de J par $\overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$, représentant un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1, $\mathscr{L}_\chi$, sur J.

Notons $1 \in J(\mathbf{F}_q)$ l'origine de J, $m : J \times_{\mathbf{F}_q} J \to J$ la loi de groupe et

$$\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : J \times_{\mathbf{F}_q} J \to J$$

les deux projections canoniques; posons

$$\mathscr{D}_2(\mathscr{L}) = m^* \mathscr{L} \otimes \mathrm{pr}_1^* \mathscr{L}^\vee \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{L}^\vee,$$

pour tout $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1, $\mathscr{L}$, sur J de dual $\mathscr{L}^\vee = \mathscr{H}\!om(\mathscr{L}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Alors, par construction, $\mathscr{L}_\chi$ est muni des deux structures supplémentaires suivantes :

(1.1.3.1) une rigidification à l'origine de J,

$$\mathscr{L}_\chi \,|\, \{1\} \simeq \overline{\mathbf{Q}}_{\ell, \{1\}},$$

(1.1.3.2) une trivialisation

$$\mathscr{D}_2(\mathscr{L}_\chi) \simeq \overline{\mathbf{Q}}_{\ell, J \times_{\mathbf{F}_q} J}$$

compatible à la rigidification

$$\mathscr{D}_2(\mathscr{L}_\chi) \,|\, \{(1,1)\} \simeq \overline{\mathbf{Q}}_{\ell, \{(1,1)\}}$$

induite par (1.1.3.1); d'où, en particulier, un isomorphisme canonique

$$\mathscr{L}_{\chi^{-1}} \simeq \mathscr{L}_\chi^\vee.$$

De plus, $\mathscr{L}_\chi$ a les propriétés suivantes :

(1.1.3.3) pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$t_{\mathscr{L}_\chi | J \otimes_{\mathbf{F}_q} \mathbf{F}_{q^n}} = \chi_n := \chi \circ N_{\mathbf{F}_{q^n}/\mathbf{F}_q}$$

(1.1.3.4) si χ est non trivial, on a

$$R\Gamma_c(J \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, \mathscr{L}_\chi) = R\Gamma(J \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, \mathscr{L}_\chi) = 0.$$

Remarque **(1.1.3.5)**. — Compte tenu de (1.1.3.3), les propriétés (1.1.3.1), (1.1.3.2) et (1.1.3.4) traduisent les propriétés suivantes des χ_n :

$$\chi_n(1) = 1, \quad \chi_n(x.y) = \chi_n(x).\chi_n(y)$$

et $$\sum_{x \in J(\mathbf{F}_{q^n})} \chi_n(x) = 0 \text{ respectivement.}$$

Si $f: \mathrm{X} \to \mathrm{J}$ est un morphisme de schémas, on posera, suivant Deligne,

(1.1.3.6) $\mathscr{L}_\chi(f) = f^* \mathscr{L}_\chi$.

On laissera tomber f dans la notation $\mathscr{L}_\chi(f)$ quand aucune confusion ne pourra en résulter (en particulier, quand f est la flèche déduite d'un changement de base $\mathrm{S} \to \mathrm{Spec}(\mathbf{F}_q)$).

Dans le cas particulier $\mathrm{J} = \mathbf{G}_{a,\mathbf{F}_q}$, l'isogénie de Lang est aussi appelée le *revêtement d'Artin-Schreier* et le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau $\mathscr{L}_\chi$ est aussi appelé le *$\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau d'Artin-Schreier* associé au caractère $\chi: \mathbf{F}_q \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$.

Dans le cas particulier $\mathrm{J} = \mathbf{G}_{m,\mathbf{F}_q}$, l'isogénie de Lang est aussi appelée le *revêtement de Kummer d'ordre* $q - 1$ et le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau $\mathscr{L}_\chi$ est aussi appelé le *$\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau de Kummer* associé au caractère $\chi: \mathbf{F}_q^\times \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$.

Remarque **(1.1.3.7).** — Pour tout corps k comme en (0.1) (k n'est plus supposé fini), on note $\mathrm{I}(k)$ l'ensemble des entiers $\mathrm{N} \geqslant 1$, premiers à p et tels que k contienne une racine primitive N-ième de l'unité, que l'on ordonne par la divisibilité. Pour $\mathrm{N} \in \mathrm{I}(k)$, on appelle *revêtement de Kummer d'ordre* N l'extension de $\mathbf{G}_{m,k}$ par $\boldsymbol{\mu}_\mathrm{N}(k)$

$$1 \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_\mathrm{N}(k) \longrightarrow \mathbf{G}_{m,k} \xrightarrow{[\mathrm{N}]} \mathbf{G}_{m,k} \longrightarrow 1,$$

où [N] est l'élévation à la puissance N-ième. Ces extensions forment un système projectif indexé par $\mathrm{I}(k)$ et, par passage à la limite, on obtient une extension de $\mathbf{G}_{m,k}$ par le groupe profini abélien

$$\varprojlim_{\mathrm{I}(k)} \boldsymbol{\mu}_\mathrm{N}(k).$$

Si χ est un caractère de ce groupe profini à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ (se factorisant par $\mathrm{E}_\lambda^\times$ pour une extension finie E_λ de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ contenue dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ et continu pour la topologie ℓ-adique), on peut pousser l'extension ci-dessus par χ^{-1} et on obtient un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1, $\mathscr{K}_\chi$, sur $\mathbf{G}_{m,k}$. On appellera $\mathscr{K}_\chi$ le *$\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau de Kummer* associé au caractère χ.

Pour $k = \mathbf{F}_q$, $\varprojlim_{\mathrm{I}(k)} \boldsymbol{\mu}_\mathrm{N}(k) = \mathbf{F}_q^\times$ et $\mathscr{K}_\chi = \mathscr{L}_\chi$. En général, $\mathscr{K}_\chi$ vérifie les propriétés (1.1.3.1), (1.1.3.2) et (1.1.3.4) où l'on a remplacé $\mathbf{F}_q$ par k, J par $\mathbf{G}_{m,k}$ et $\mathscr{L}_\chi$ par $\mathscr{K}_\chi$.

Pour $f: \mathrm{X} \to \mathbf{G}_{m,k}$ un morphisme on pose aussi $\mathscr{K}_\chi(f) = f^* \mathscr{K}_\chi$.

(1.2) *La transformation de Fourier-Deligne : définition, premières propriétés et exemples* ([De 5], [Ka-La] 2 *et* [Br] IX).

(1.2.1) Soit $\mathscr{L}_\psi$ le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 d'Artin-Schreier sur $\mathbf{G}_{a,\mathbf{F}_p}$ associé au caractère $\psi: \mathbf{F}_p \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ (cf. (0.2) et (1.1.3)).

Soient S un schéma de type fini sur k et $\mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{S}$ un fibré vectoriel de rang constant $r \geqslant 1$. On note $\mathrm{E}' \xrightarrow{\pi'} \mathrm{S}$ le fibré vectoriel dual de $\mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{S}$, $\langle\ ,\ \rangle : \mathrm{E} \times_\mathrm{S} \mathrm{E}' \to \mathbf{G}_{a,k}$ l'accouplement canonique et $\mathrm{pr}: \mathrm{E} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{E}' \to \mathrm{E}$, $\mathrm{pr}': \mathrm{E} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{E}' \to \mathrm{E}'$ les deux projections canoniques.

Définition **(1.2.1.1).** — *La transformation de Fourier-Deligne pour* $\mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{S}$, *associée au caractère* ψ, *est le foncteur triangulé*

$$\mathscr{F}_\psi : \mathrm{D}^b_c(\mathrm{E}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \mathrm{D}^b_c(\mathrm{E}', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

défini par

$$\mathscr{F}_\psi(\mathrm{K}) = \mathrm{R}\,\mathrm{pr}'_!(\mathrm{pr}^* \mathrm{K} \otimes \mathscr{L}_\psi(\langle\ ,\ \rangle))\,[r].$$

Si $k = \mathbf{F}_q$, notons

$$\mathscr{C}(\mathrm{E}(\mathbf{F}_q), \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \xrightarrow{t \mapsto \hat{t}} \mathscr{C}(\mathrm{E}'(\mathbf{F}_q), \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

la transformation de Fourier pour les fonctions définie par

$$\hat{t}(e') = \sum_{\substack{e \in \mathrm{E}(\mathbf{F}_q) \\ \pi(e) = \pi'(e')}} t(e)\, \psi_q(\langle e, e' \rangle), \quad \forall\, e' \in \mathrm{E}'(\mathbf{F}_q).$$

Alors le théorème suivant complète le dictionnaire fonctions-faisceaux rappelé en (1.1) :

Théorème **(1.2.1.2).** — *Si* $k = \mathbf{F}_q$, *pour tout* $\mathrm{K} \in \mathrm{ob}\, \mathrm{D}^b_c(\mathrm{E}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, *on a*

$$t_{\mathscr{F}_\psi(\mathrm{K})} = (-1)^r\, \hat{t}_{\mathrm{K}}.$$

Preuve. — On applique (1.1.1.1) à (1.1.1.4) et (1.1.3.3).

Dans la suite, on laissera tomber l'indice ψ des notations $\mathscr{F}_\psi$ et $\mathscr{L}_\psi$ quand cela ne prête pas à confusion.

(1.2.2) Nous allons maintenant donner un certain nombre de propriétés de $\mathscr{F}$ qui reflètent celles bien connues de la transformation de Fourier pour les fonctions.

Nous utiliserons les notations suivantes. Si $\mathrm{E}'' \xrightarrow{\pi''} \mathrm{S}$ est le fibré bidual de $\mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{S}$, on notera $a : \mathrm{E} \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}''$ le S-isomorphisme défini par $a(e) = -\langle e, \ \rangle$ (l'opposé du S-isomorphisme canonique). On notera $\sigma : \mathrm{S} \to \mathrm{E}$, $\sigma' : \mathrm{S} \to \mathrm{E}'$ et $\sigma'' : \mathrm{S} \to \mathrm{E}''$ les sections nulles de π, π' et π'' respectivement. On notera $s : \mathrm{E} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ la loi d'addition du fibré vectoriel $\mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{S}$ et $[-1] : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ l'application inverse pour cette loi d'addition.

Théorème **(1.2.2.1).** — *Notons* $\mathscr{F}'$ *la transformation de Fourier-Deligne, associée au caractère* ψ, *pour le fibré vectoriel* $\mathrm{E}' \xrightarrow{\pi'} \mathrm{S}$. *Alors, on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathscr{F}' \circ \mathscr{F}(\mathrm{K}) \simeq a_* \mathrm{K}(-r)$$

pour $\mathrm{K} \in \mathrm{ob}\, \mathrm{D}^b_c(\mathrm{E}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

Preuve. — On a un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{E}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{E}'' \arrow[rrr, "\beta"] \arrow[dddll, bend right, "\mathrm{pr}"'] \arrow[dddrr, bend left, "\mathrm{pr}''"] \arrow[drrr, phantom, "\square"] & & & \mathrm{E}'' \\
 & & \mathrm{E}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{E}'\times_{\mathrm{S}}\mathrm{E}'' \arrow[u, "\mathrm{pr}_{13}"] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{12}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{23}"] \arrow[rrr, "\alpha"] \arrow[dd, phantom, "\Diamond"] & & & \mathrm{E}'\times_{\mathrm{S}}\mathrm{E}'' \arrow[u, "\mathrm{pr}''"'] \\
 & \mathrm{E}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{E}' \arrow[dl, "\mathrm{pr}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}'"] & & \mathrm{E}'\times_{\mathrm{S}}\mathrm{E}'' \arrow[dl, "\mathrm{pr}'"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}''"] & & \\
\mathrm{E} & & \mathrm{E}' & & \mathrm{E}'' &
\end{tikzcd}$$

où $\alpha(e, e', e'') = (e', e'' - a(e))$ et $\beta(e, e'') = e'' - a(e)$.

D'autre part, il résulte de (1.1.3.2) que

$$\mathrm{pr}_{12}^* \mathscr{L}(\langle\ ,\ \rangle) \otimes \mathrm{pr}_{23}^* \mathscr{L}(\langle\ ,\ \rangle) = \alpha^* \mathscr{L}(\langle\ ,\ \rangle).$$

Par applications successives du théorème de changement de base propre ([SGA 4] XVII (5.2.6)) et de la formule des projections ([SGA 4] XVII (5.2.9)), on en déduit que

$$\mathscr{F}' \circ \mathscr{F}(\mathrm{K}) \simeq \mathrm{R}\,\mathrm{pr}''_!(\mathrm{pr}^* \mathrm{K} \otimes \beta^* \mathrm{R}\,\mathrm{pr}''_! \mathscr{L}(\langle\ ,\ \rangle))\,[2r]$$

fonctoriellement en K. Il ne reste plus qu'à appliquer à $\mathrm{E}' \xrightarrow{\pi'} \mathrm{S}$ et à $\mathrm{L} = \overline{\mathbf{Q}}_{\ell,\mathrm{S}}$ la proposition suivante :

Proposition **(1.2.2.2).** — *On a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathscr{F}(\pi^* \mathrm{L}[r]) \simeq \sigma'_* \mathrm{L}(-r)$$

pour $\mathrm{L} \in \mathrm{ob}\,\mathrm{D}_c^b(\mathrm{S}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

Preuve. — D'après la formule des projections

$$\mathscr{F}(\pi^* \mathrm{L}[r]) = \mathrm{L} \otimes \mathrm{R}\,\mathrm{pr}'_! \mathscr{L}(\langle\ ,\ \rangle)\,[2r].$$

Or, d'après le théorème de changement de base propre

$$\sigma'^* \mathrm{R}\,\mathrm{pr}'_! \mathscr{L}(\langle\ ,\ \rangle) = \mathrm{R}\pi_! \overline{\mathbf{Q}}_\ell$$

et $$\mathrm{R}\,\mathrm{pr}'_! \mathscr{L}(\langle\ ,\ \rangle) \mid \mathrm{E}' - \sigma'(\mathrm{S}) = 0$$

(cf. (1.1.3.1) et (1.1.3.4)). D'où la proposition par une dernière application de la formule des projections, puisque

$$R\pi_! \overline{\mathbf{Q}}_\ell = \overline{\mathbf{Q}}_{\ell,\mathrm{S}}(-r)[-2r]$$

([SGA 5] VII (1.1) (ii)).

Corollaire **(1.2.2.3).** — $\mathscr{F}$ *est une équivalence de catégories triangulées de* $D_c^b(E, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *sur* $D_c^b(E', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, *de quasi-inverse* $a^* \mathscr{F}'(-)(r)$.

Théorème **(1.2.2.4).** — *Soient* $f: E_1 \to E_2$ *un morphisme de fibrés vectoriels sur* S *de rangs constants* r_1 *et* r_2 *respectivement et* $f': E_2' \to E_1'$ *le trarsposé de* f. *Alors, on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathscr{F}_2(Rf_!\, K_1) \simeq f'^* \mathscr{F}_1(K_1)[r_2 - r_1]$$

pour $K_1 \in \mathrm{ob}\, D_c^b(E_1, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

Preuve. — On a, par adjonction de f et f',

$$(f \times 1)^* \mathscr{L}(\langle\ ,\ \rangle_2) = (1 \times f')^* \mathscr{L}(\langle\ ,\ \rangle_1).$$

Par suite, la proposition se démontre par applications successives du théorème de changement de base propre et de la formule des projections, en suivant le diagramme commutatif, à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
 & & E_1 \times_S E_1' \arrow[ddll, bend right, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "f \times 1"] \arrow[ddrr, bend left, "\mathrm{pr}_1'"] \arrow[dd, phantom, "\Diamond"] & & \\
 & E_1 \times_S E_2' \arrow[ur, "1 \times f'"] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "f \times 1"] \arrow[dd, phantom, "\Diamond"] & & E_2 \times_S E_1' \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1'"] \arrow[dd, phantom, "\Diamond"] & \\
E_1 \arrow[dr, "f"'] & & E_2 \times_S E_2' \arrow[ur, "1 \times f'"] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2'"'] & & E_1' \\
 & E_2 & & E_2' \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

Corollaire **(1.2.2.5).** — *On a un isomorphisme fonctoriel*

$$R\pi'_! \mathscr{F}(K) \simeq \sigma^* K(-r)[-r]$$

pour $K \in \mathrm{ob}\, D_c^b(E, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

Preuve. — On applique (1.2.2.4) à $E_1 = E'$, $E_2 = S$, $f = \pi'$ et $K_1 = \mathscr{F}(K)$, puis on utilise (1.2.2.1).

Définition **(1.2.2.6).** — *Le produit de convolution pour* $E \xrightarrow{\pi} S$ *est l'opération interne*

$$* : D^b_c(E, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \times D^b_c(E, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D^b_c(E, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

définie par

$$K_1 * K_2 = Rs_!(K_1 \boxtimes_S K_2).$$

Proposition **(1.2.2.7).** — *On a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathscr{F}(K_1 * K_2) \simeq \mathscr{F}(K_1) \otimes \mathscr{F}(K_2)\,[-r]$$

pour $(K_1, K_2) \in \mathrm{ob}(D^b_c(E, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \times D^b_c(E, \overline{\mathbf{Q}}_\ell))$.

Preuve. — Si l'on note encore $\mathscr{F}$ la transformation de Fourier-Deligne pour $E \times_S E \xrightarrow{\pi \times_S \pi} S$, on a d'après la formule de Künneth ([SGA 4] XVII (5.4.3))

$$\mathscr{F}(K_1 \boxtimes_S K_2) = \mathscr{F}(K_1) \boxtimes_S \mathscr{F}(K_2).$$

Il ne reste plus qu'à appliquer (1.2.2.4) à $E_1 = E \times_S E$, $E_2 = E$, $f = s$ et $K_1 := K_1 \boxtimes_S K_2$.

Proposition **(1.2.2.8).** — *On a un isomorphisme fonctoriel, dit « de Plancherel »,*

$$R\pi'_!(\mathscr{F}(K_1) \otimes \mathscr{F}(K_2)) \simeq R\pi_!(K_1 \otimes [-1]^* K_2)\,(-r)$$

pour $(K_1, K_2) \in \mathrm{ob}(D^b_c(E, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \times D^b_c(E, \overline{\mathbf{Q}}_\ell))$.

Preuve. — On applique successivement (1.2.2.7), (1.2.2.5) et le théorème de changement de base propre pour le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} E \times_S E \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & E \arrow[l, "{(1,[-1])}"'] \arrow[d, "\pi"] \\ E & S \arrow[l, "\sigma"] \end{tikzcd}$$

Proposition **(1.2.2.9).** — *La formation de* $\mathscr{F}(K)$ *pour* $K \in \mathrm{ob}\, D^b_c(E, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, *commute à tout changement de base* $S_1 \to S$.

Preuve. — Théorème de changement de base propre.

(1.2.3) Donnons quelques exemples de calculs de transformées de Fourier-Deligne. Les détails des démonstrations sont laissés au lecteur.

Proposition **(1.2.3.1).** — *Soit* $F \overset{i}{\hookrightarrow} E$ *un sous-fibré vectoriel sur* S *de rang constant* s. *Notons* $F^\perp \overset{i^\perp}{\hookrightarrow} E'$ *l'orthogonal de* F *dans* E'. *Alors, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathscr{F}(i_* \overline{\mathbf{Q}}_{\ell, F}[s]) \simeq i^\perp_* \overline{\mathbf{Q}}_{\ell, F^\perp}(-s)\,[r - s].$$

Preuve. — On applique (1.2.2.4) et (1.2.2.2).

Proposition **(1.2.3.2).** — *Soit* $e \in \mathrm{E}(\mathrm{S})$. *Notons* $\tau_e : \mathrm{E} \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}$ *la translation par e. Alors, on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathscr{F}(\tau_{e*}\mathrm{K}) \simeq \mathscr{F}(\mathrm{K}) \otimes \mathscr{L}(\langle e, \ \rangle)$$

pour $\mathrm{K} \in \mathrm{ob}\, \mathrm{D}^b_c(\mathrm{E}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

Preuve. — On a $\tau_{e*}\mathrm{K} = (e_* \overline{\mathbf{Q}}_{\ell,\mathrm{S}}) * \mathrm{K}$ et on applique (1.2.2.7).

Proposition **(1.2.3.3).** — *Soit* $\alpha : \mathrm{E} \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}'$ *un* S-*isomorphisme symétrique. Notons* $q : \mathrm{E} \to \mathbf{G}_{a,k}$ *et* $q' : \mathrm{E}' \to \mathbf{G}_{a,k}$ *les formes quadratiques associées à* α ($q(e) = \langle e, \alpha(e) \rangle$ *et* $q'(e') = \langle \alpha^{-1}(e'), e' \rangle$) *et* $[2] : \mathrm{E}' \to \mathrm{E}'$ *la multiplication par* 2 *dans le fibré vectoriel* E′. *Alors, on a un isomorphisme canonique*

$$[2]^* \mathscr{F}(\mathscr{L}(q)) \simeq \mathscr{L}(-q') \otimes \pi'^* \mathrm{R}\pi_! \mathscr{L}(q)\,[r].$$

Preuve. — On a

$$q(e) + \langle e, 2e' \rangle = q(e + \alpha^{-1}(e')) - q'(e').$$

Proposition **(1.2.3.4).** — *Soit* G *un* S-*groupe algébrique de type fini agissant linéairement sur le fibré vectoriel* $\mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{S}$ *et soient* $\mathrm{K}, \mathrm{L} \in \mathrm{ob}\, \mathrm{D}^b_c(\mathrm{E}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *et* $\mathrm{M} \in \mathrm{ob}\, \mathrm{D}^b_c(\mathrm{G}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *On note* $m : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ *l'action de* G *sur* E *et* $m' : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{E}' \to \mathrm{E}'$ *l'inverse de sa transposée* ($m'(g, e') = {}^t g^{-1}.e'$). *Alors tout isomorphisme*

$$m^* \mathrm{K} \simeq \mathrm{M} \boxtimes_{\mathrm{S}} \mathrm{L}$$

dans $\mathrm{D}^b_c(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{E}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *induit canoniquement un isomorphisme*

$$m'^* \mathscr{F}(\mathrm{K}) \simeq \mathrm{M} \boxtimes_{\mathrm{S}} \mathscr{F}(\mathrm{L})$$

dans $\mathrm{D}^b_c(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{E}', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

Preuve. — On considère l'isomorphisme de fibrés vectoriels sur G

$$(\mathrm{pr}_{\mathrm{G}}, m)^{-1} : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{E} \xrightarrow{\sim} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{E}$$

dont le transposé est

$$(\mathrm{pr}_{\mathrm{G}}, m') : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{E}' \xrightarrow{\sim} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{E}'$$

puis on applique (1.2.2.4) et la formule de Künneth.

Proposition **(1.2.3.5).** — *Soit* $\mathrm{S}_1 \xrightarrow{f} \mathrm{S}$ *un k-morphisme de type fini. Notons* $\mathrm{E}_1 \xrightarrow{\pi_1} \mathrm{S}_1$ *et* $\mathrm{E}'_1 \xrightarrow{\pi'_1} \mathrm{S}_1$ *les fibrés vectoriels sur* S_1 *déduits de* $\mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{S}$ *et* $\mathrm{E}' \xrightarrow{\pi'} \mathrm{S}$ *par le changement de base*

$S_1 \xrightarrow{f} S$ *et* $f_E : E_1 \to E$ *et* $f_{E'} : E'_1 \to E'$ *les projections canoniques. Alors, on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathscr{F}(Rf_{E!}\, K_1) \simeq Rf_{E'!}\, \mathscr{F}_1(K_1)$$

pour $K_1 \in \mathrm{ob}\, D^b_c(E_1, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *(on a noté* $\mathscr{F}_1$ *la transformation de Fourier-Deligne pour le fibré* $E_1 \xrightarrow{\pi_1} S_1$).

Preuve. — Théorème de changement de base propre.

(1.3) *La transformation de Fourier-Deligne et la dualité* ([Ka-La], [De 7] *et* [Br]).

(1.3.1) On garde les notations de (1.2.1).

Théorème **(1.3.1.1).** — *Pour tout* $K \in \mathrm{ob}\, D^b_c(E, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, *la flèche d'oubli des supports*

$$R\mathrm{pr}'_!(\mathrm{pr}^* K \otimes \mathscr{L}(\langle\ ,\ \rangle)) \to R\mathrm{pr}'_*(\mathrm{pr}^* K \otimes \mathscr{L}(\langle\ ,\ \rangle))$$

est un isomorphisme.

Cet énoncé n'est autre que [Ka-La] (2.1.3). Dans *loc. cit.*, nous montrons simultanément (1.3.1.1) et l'énoncé suivant ([Ka-La] (2.4.4)).

Théorème **(1.3.1.2).** — *Soient* A_1, A_2 *deux copies de la droite affine* $\mathbf{A}^1_k$, *de coordonnée* x_1, x_2 *respectivement et soit* $\alpha_1 : A_1 \hookrightarrow D_1$ *la complétion projective de* A_1 (i.e. *une copie de l'immersion ouverte canonique* $\mathbf{A}^1_k \hookrightarrow \mathbf{P}^1_k$). *Alors la projection canonique* $\mathrm{pr}_1 : D_1 \times_k A_1 \to D_1$ *est universellement (fortement) acyclique relativement au* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau* $(\alpha_1 \times 1)_!\, \mathscr{L}(x_1 x_2)$.

Remarque **(1.3.1.3).** — Notons $\infty_1 \in D_1(k)$ le point à l'infini de A_1 ($A_1 = D_1 - \{\infty_1\}$) et η_1 le point générique du trait hensélien $D_{1(\infty_1)}$. Pour $\mathrm{pr}_1 : D_{1(\infty_1)} \times_k A_1 \to D_{1(\infty_1)}$, on a les foncteurs « cycles proches » et « cycles évanescents »

$$R\Psi_{\overline{\eta}_1} : D^b_c(\eta_1 \times_k A_2, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D^b_c(\overline{\infty}_1 \times_k A_2, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

et

$$R\Phi_{\overline{\eta}_1} : D^b_c(D_{1(\infty_1)} \times_k A_2, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D^b_c(\overline{\infty}_1 \times_k A_2, \overline{\mathbf{Q}}_\ell).$$

Le théorème (1.3.1.2) dit en particulier que

$$R\Psi_{\overline{\eta}_1}(\mathscr{L}(x_1 x_2)) = R\Phi_{\overline{\eta}_1}((\alpha_1 \times 1)_!\, \mathscr{L}(x_1 x_2)) = 0.$$

On aurait pu, dans *loc. cit.*, démontrer directement (1.3.1.2) puis en déduire (1.3.1.1). Explicitons cette dernière déduction dans le cas particulier (crucial pour cet article) où $S = \mathrm{Spec}(k)$ et $E = \mathbf{A}^1_k$. On prend $A_1 = E$ et $A_2 = E'$. Alors le cône de la flèche d'oubli des supports de (1.3.1.1) s'identifie canoniquement à

$$R\Gamma(I_1, K_{\overline{\eta}_1} \otimes R\Psi_{\overline{\eta}_1}(\mathscr{L}(x_1 x_2))),$$

où $I_1 = \mathrm{Gal}(\overline{\eta}_1/\eta_1 \otimes_k \bar{k})$ est le groupe d'inertie de $D_{1(\infty_1)}$ ([SGA 4½] [Th. Finitude] (3.11)), et il suffit d'appliquer (1.3.1.3).

Signalons d'autre part que nous utiliserons (1.3.1.2) (ou plus précisément (1.3.1.3)) pour $S = \mathrm{Spec}(k)$ et $E = \mathbf{A}^1_k$, mais maintenant avec $A_1 = E'$ et $A_2 = E$ (cf. (2.3.3.1) (i)).

Cette double utilisation de (1.3.1.2) est à la base des résultats principaux de cet article.

(1.3.2) Le théorème (1.3.1.1) admet les corollaires suivants :

Théorème **(1.3.2.1)**. — *On a un isomorphisme bi-fonctoriel*

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathscr{F}_\psi(\mathrm{K}), \pi'^! \mathrm{L}) \simeq \mathscr{F}_{\psi^{-1}}(\mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathrm{K}, \pi^! \mathrm{L}))\ (r)$$

pour $\mathrm{K} \in \mathrm{ob}\, \mathrm{D}^b_c(\mathrm{E}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)^{\mathrm{opp}}$ *et* $\mathrm{L} \in \mathrm{ob}\, \mathrm{D}^b_c(\mathrm{S}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

Preuve. — On a, d'après les théorèmes de dualité,

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathscr{F}_\psi(\mathrm{K}), \pi'^! \mathrm{L}) \simeq \mathrm{R}\,\mathrm{pr}'_* \mathrm{pr}^!(\mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathrm{K}, \pi^! \mathrm{L}) \otimes \mathscr{L}_{\psi^{-1}}(\langle\ ,\ \rangle))\,[-r].$$

De plus, pr est lisse, purement de dimension relative r, de sorte que

$$\mathrm{pr}^!(-) = \mathrm{pr}^*(-)\ (r)\ [2r],$$

d'où la conclusion, compte tenu de (1.3.1.1).

Pour $\mathrm{L} = \overline{\mathbf{Q}}_{\ell,\mathrm{S}}$, (1.3.2.1) n'est autre que [Ka-La] (2.1.5) (ii). Pour $\mathrm{L} = a^! \overline{\mathbf{Q}}_\ell$, où $a : \mathrm{S} \to \mathrm{Spec}(k)$ est le morphisme structural, (1.3.2.1) se réécrit :

Corollaire **(1.3.2.2)**. — *On a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{D}_{\mathrm{E}/k}(\mathscr{F}_\psi(\mathrm{K})) \simeq \mathscr{F}_{\psi^{-1}}(\mathrm{D}_{\mathrm{E}'/k}(\mathrm{K}))\ (r)$$

pour $\mathrm{K} \in \mathrm{ob}\, \mathrm{D}^b_c(\mathrm{E}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)^{\mathrm{opp}}$.

Théorème **(1.3.2.3)**. — $\mathscr{F}$ *transforme les* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceaux pervers sur* E *en* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceaux pervers sur* E'. *Le foncteur*

$$\mathscr{F} : \mathrm{Perv}(\mathrm{E}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \mathrm{Perv}(\mathrm{E}', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

est une équivalence de catégories abéliennes de quasi-inverse $a^* \mathscr{F}'(-)\ (r)$.

Preuve. — La seconde assertion résulte aussitôt de la première et de (1.2.2.3). D'autre part, pr étant lisse, purement de dimension relative r, $\mathrm{pr}^*(-)\,[r]$ est t-exact ([B-B-D] (4.2.5)) et, pr' étant affine, $\mathrm{pr}'_!$ est t-exact à gauche ([B-B-D] (4.1.2)), alors que pr'_* est t-exact à droite ([B-B-D] (4.1.1)). Par suite, $\mathscr{F}$ est t-exact à gauche et $\mathrm{K} \mapsto \mathrm{R}\,\mathrm{pr}'_*(\mathrm{pr}^* \mathrm{K} \otimes \mathscr{L}(\langle\ ,\ \rangle))\,[r]$ est t-exact à droite, d'où la conclusion compte tenu de (1.3.1.1).

Corollaire **(1.3.2.4)**. — $\mathscr{F}$ *transforme les* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceaux pervers simples sur* E *en* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceaux pervers simples sur* E'.

(**1.4**) *La transformation de Fourier-Deligne en rang* 1 *sur* Spec(k).

(**1.4.1**) Dans la suite de cet article nous travaillerons exclusivement avec la transformation de Fourier-Deligne en rang 1 et sur Spec(k) (ou Spec$(\bar{k})$). Cela nous amène à fixer des notations qui serviront dans toute la suite.

Soient donc $\mathrm{A} = \mathrm{Spec}(k[x])$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{Spec}(k[x'])$ deux droites vectorielles sur k (munies de coordonnées x et x') qui sont en dualité parfaite *via* l'accouplement

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle : \mathrm{A} \times_k \mathrm{A}' &\to \mathbf{G}_{a,k} = \mathrm{Spec}(k[u]) \\ (x, x') &\mapsto u = xx'. \end{aligned}$$

On note comme précédemment pr et pr$'$ les projections canoniques de $\mathrm{A} \times_k \mathrm{A}'$ et

$$\mathscr{F}_\psi \text{ (ou } \mathscr{F}) : \mathrm{D}^b_c(\mathrm{A}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \mathrm{D}^b_c(\mathrm{A}', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

la transformation de Fourier-Deligne, associée à ψ, pour $\mathrm{A} \to \mathrm{Spec}(k)$. On remplacera cependant la notation $\mathscr{L}_\psi(\langle\ ,\ \rangle)$ (ou $\mathscr{L}(\langle\ ,\ \rangle)$) par la notation plus agréable dans ce nouveau contexte $\mathscr{L}_\psi(xx')$ (ou $\mathscr{L}(xx')$).

On utilisera de plus les compactifications naturelles $\mathrm{A} \overset{\alpha}{\hookrightarrow} \mathrm{D}$ et $\mathrm{A}' \overset{\alpha'}{\hookrightarrow} \mathrm{D}'$ des droites vectorielles en droites projectives : si $\infty \in \mathrm{D}(k)$ et $\infty' \in \mathrm{D}'(k)$ sont les points à l'infini correspondants, on a donc $\mathrm{A} = \mathrm{D} - \{\infty\}$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{D}' - \{\infty'\}$. Si $0 \in \mathrm{A}(k)$ et $0' \in \mathrm{A}'(k)$ sont les origines de A et A$'$ respectivement, $\mathrm{D} - \{0\}$ et $\mathrm{D}' - \{0'\}$ sont naturellement deux droites vectorielles sur k de coordonnées $\tilde{x} = 1/x$ et $\tilde{x}' = 1/x'$. Les compactifications $\mathrm{A} \overset{\alpha}{\hookrightarrow} \mathrm{D}$ et $\mathrm{A}' \overset{\alpha'}{\hookrightarrow} \mathrm{D}'$ induisent une compactification

$$\alpha \times \alpha' : \mathrm{A} \times_k \mathrm{A}' \hookrightarrow \mathrm{D} \times_k \mathrm{D}';$$

on notera $\overline{\mathrm{pr}}$ et $\overline{\mathrm{pr}}'$ les projections canoniques de $\mathrm{D} \times_k \mathrm{D}'$ ($\overline{\mathrm{pr}} \circ (\alpha \times \alpha') = \mathrm{pr}$ et $\overline{\mathrm{pr}}' \circ (\alpha \times \alpha') = \mathrm{pr}'$). Enfin, on posera

$$\overline{\mathscr{L}}_\psi(xx') = (\alpha \times \alpha')_! \, \mathscr{L}_\psi(xx')$$

(en laissant tomber ψ quand il n'y a pas de risque de confusion). On a alors

(**1.4.1.1**) $$\alpha'_! \, \mathscr{F}(\mathrm{K}) = \mathrm{R}\, \overline{\mathrm{pr}}'_*(\overline{\mathrm{pr}}^* \alpha_! \mathrm{K} \otimes \overline{\mathscr{L}}(xx'))\,[1],$$

fonctoriellement en $\mathrm{K} \in \mathrm{ob}\, \mathrm{D}^b_c(\mathrm{A}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

(**1.4.2**) On a vu que la transformation de Fourier-Deligne $\mathscr{F}$ transforme les $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux pervers simples en $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux pervers simples (cf. (1.3.2.4)). Dans le cas particulier que nous considérons dorénavant, on peut être plus précis.

Distinguons trois types de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux pervers simples K sur A :

(T_1) $\mathrm{K} = i_* \mathrm{F}$ pour s un point fermé de A, $i : s \hookrightarrow \mathrm{A}$ l'inclusion et F un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau (lisse) irréductible sur le schéma s;

(T_2) $\mathrm{K} = (\mathrm{pr}_\mathrm{A})_*(\mathscr{L}(x.s') \otimes \mathrm{pr}^*_{s'} \mathrm{F}')\,[1]$ pour s' un point fermé de A$'$,

$$\mathrm{pr}_\mathrm{A} : \mathrm{A} \times_k s' \to \mathrm{A} \quad \text{et} \quad \mathrm{pr}_{s'} : \mathrm{A} \times_k s' \to s'$$

les projections canoniques et F′ un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau (lisse) irréductible sur le schéma s' (on a noté $\mathscr{L}(x.s')$ la restriction de $\mathscr{L}(xx')$ *via* $\mathrm{id}_{\mathrm{A}} \times i'$, où $i' : s' \hookrightarrow \mathrm{A}'$ est l'inclusion);

(T_3) $\mathrm{K} = j_* \mathrm{F}[1]$ pour U un ouvert dense de A, $j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{A}$ l'inclusion et F un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse irréductible sur U tel que, quel que soit $a' \in \bar{k}$, il n'existe aucun sous-quotient de $\mathrm{F} \mid \mathrm{U} \otimes_k \bar{k}$ qui soit isomorphe à $\mathscr{L}(x.a') \mid \mathrm{U} \otimes_k \bar{k}$.

D'après [B-B-D] (4.3.1) (ii) tout $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau pervers simple K sur A est de l'un des trois types ci-dessus. Nous noterons (T'_1), (T'_2) et (T'_3) les types correspondants de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux pervers simples sur A′.

Théorème **(1.4.2.1).** — (i) *$\mathscr{F}$ échange les types* (T_1) *et* (T'_2) *d'une part et* (T_2) *et* (T'_1) *d'autre part. Plus précisément*

$$\mathscr{F}(i_* \mathrm{F}) = (\mathrm{pr}_{\mathrm{A}'})_*(\mathscr{L}(s.x) \otimes \mathrm{pr}_s^* \mathrm{F})\,[1]$$

et

$$\mathscr{F}((\mathrm{pr}_{\mathrm{A}})_*(\mathscr{L}(x.s') \otimes \mathrm{pr}_{s'}^* \mathrm{F}')\,[1]) = [-1]_*\, i'_* \mathrm{F}'(-1)$$

avec les notations ci-dessus.

(ii) *$\mathscr{F}$ échange les types* (T_3) *et* (T'_3).

Preuve. — La première formule de (i) est immédiate à partir de la définition de $\mathscr{F}$; la seconde s'en déduit par involutivité (cf. (1.2.2.1)). La partie (ii) se déduit alors de (1.3.2.4), de la partie (i) déjà démontrée et de l'involutivité de $\mathscr{F}$.

Partant de $\mathrm{K} = j_* \mathrm{F}[1]$ du type (T_3), la transformation de Fourier-Deligne produit donc un ouvert U′ de A′ (l'ouvert maximal de lissité de $\mathscr{F}(\mathrm{K})$) et un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse irréductible F′ sur U′ ($\mathrm{F}' = \mathscr{H}^{-1}(\mathscr{F}(\mathrm{K})) \mid \mathrm{U}'$) tels que

$$\mathscr{F}(j_* \mathrm{F}[1]) = j'_* \mathrm{F}'[1];$$

de plus $j'_* \mathrm{F}'[1]$ est de type (T'_3).

Nous verrons en (2.3) comment déterminer l'ouvert U′, le rang de F′ et, dans une certaine mesure, les monodromies locales de F′ aux points de D′ — U′. Par contre, mis à part quelques cas particuliers (cf. (1.2.3.3), (1.4.3) ci-dessous et aussi [Ka 1]), la détermination complète de F′ reste pour l'instant inaccessible.

(1.4.3) Considérons les ouverts $\mathrm{U} = \mathrm{A} - \{0\} \xrightarrow{j} \mathrm{A}$ et $\mathrm{U}' = \mathrm{A}' - \{0'\} \xrightarrow{j'} \mathrm{A}'$, munis des morphismes $x : \mathrm{U} \to \mathbf{G}_{m,k}$ et $x' : \mathrm{U}' \to \mathbf{G}_{m,k}$. Soit

$$\chi : \varprojlim_{\mathrm{I}(k)} \mu_{\mathrm{N}}(k) \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$$

un caractère (comme en (1.1.3.7)) *non trivial*; alors $\mathscr{K}_\chi(x)$ et $\mathscr{K}_{\chi^{-1}}(x')$ sont des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux (de Kummer) lisses de rang 1 sur U et U′ respectivement.

Lemme **(1.4.3.1).** — *Dans* $D^b_c(A, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ (*resp.* $D^b_c(A', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$), *les flèches canoniques*

$$j_! \mathscr{K}_\chi(x) \to j_* \mathscr{K}_\chi(x) \to Rj_* \mathscr{K}_\chi(x)$$

(*resp.* $$j'_! \mathscr{K}_{\chi^{-1}}(x') \to j'_* \mathscr{K}_{\chi^{-1}}(x') \to Rj'_* \mathscr{K}_{\chi^{-1}}(x'))$$

sont des isomorphismes.

Preuve. — Voir [SGA 4½] [Sommes trig.] (4.20).

Proposition **(1.4.3.2).** — *Soit* $G(\chi, \psi)$ *le* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-espace vectoriel, muni d'une action continue de* $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, *défini par*

$$G(\chi, \psi) = H^1_c(U \otimes_k \bar{k}, \mathscr{K}_\chi(x) \otimes \mathscr{L}_\psi(x)).$$

Alors :

(i) $G(\chi, \psi)$ *est de dimension* 1 *et les* $H^i_c(U \otimes_k \bar{k}, \mathscr{K}_\chi(x) \otimes \mathscr{L}_\psi(x))$, *pour* $i \neq 1$, *sont tous nuls;*

(ii) *si* $k = \mathbf{F}_q$, *de sorte que* χ *est un caractère de* $\mathbf{F}_q^\times$, $\mathrm{Frob}_q \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ *agit sur* $G(\chi, \psi)$ *comme l'homothétie de rapport*

$$g(\chi, \psi) = -\sum_{x \in \mathbf{F}_q^\times} \chi(x)\, \psi_q(x);$$

(iii) *on a un isomorphisme canonique*

$$\mathscr{F}_\psi(j_* \mathscr{K}_\chi(x)\,[1]) \simeq j'_* \mathscr{K}_{\chi^{-1}}(x')\,[1] \otimes G(\chi, \psi),$$

où $G(\chi, \psi)$ *est considéré comme* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau géométriquement constant sur* A'.

Preuve. — (i) et (ii) sont essentiellement [SGA 4½] [Sommes trig.] (4.3) (i) et (4.3) (ii). Prouvons (iii). D'après (1.4.2.1) (ii), il suffit de montrer que

$$j'^* \mathscr{F}_\psi(j_* \mathscr{K}_\chi(x)) = \mathscr{K}_{\chi^{-1}}(x') \otimes G(\chi, \psi).$$

Considérons alors l'action de $\mathbf{G}_{m,k}$ par homothétie sur A, $m : \mathbf{G}_{m,k} \times_k A \to A$ définie par $m(u, x) = ux$. On a

$$m^*(j_* \mathscr{K}_\chi(x)) = \mathscr{K}_\chi(u) \boxtimes_k j_* \mathscr{K}_\chi(x)$$

(cf. (1.1.3.7)), donc d'après (1.2.3.4), on a

$$m'^* \mathscr{F}_\psi(j_* \mathscr{K}_\chi(x)) = \mathscr{K}_\chi(u) \boxtimes_k \mathscr{F}_\psi(j_* \mathscr{K}_\chi(x)),$$

où $m' : \mathbf{G}_{m,k} \times_k A' \to A'$ est défini par $m'(u, x') = u^{-1}.x'$, d'où la conclusion par restriction à $\mathbf{G}_{m,k} \times_k \{1'\}$ ($1' \in A'(k)$ étant défini par $x' = 1$), puisque $\mathscr{K}_\chi(x'^{-1}) = \mathscr{K}_{\chi^{-1}}(x')$ et $\mathscr{F}_\psi(j_* \mathscr{K}_\chi(x))_{\bar{1}} = G(\chi, \psi)$.

2. Transformations de Fourier locales

(2.1) *Représentations des groupes de Galois locaux : rappels* ([Se 1] chap. IV, [Se 2] 19 et [Ka 1] chap. I).

(2.1.1) Soit T un trait hensélien d'égale caractéristique p, à corps résiduel k : T est donc le spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien R. Si π est une uniformisante de R, on a $k\{\pi\} \subset \mathrm{R} \subset k[[\pi]]$, où $k\{\pi\}$ est l'hensélisé de l'anneau local $k[\pi]_{(\pi)}$ et où $k[[\pi]]$ est le complété de $k\{\pi\}$ et de R pour la topologie π-adique (k est supposé parfait, cf. (0.1)).

On note t, η et $\bar{t}$, $\bar{\eta}$ les points ordinaires et les points géométriques usuels de T (cf. [De 4] (0.6)) : suivant nos conventions (0.4), $\bar{t}$ est le composé de $\mathrm{Spec}(\bar{k}) \to \mathrm{Spec}(k)$ et de t et $\bar{\eta}$ se factorise par le point générique $\eta_{\bar{t}}$ du trait strictement hensélien $\mathrm{T}_{\bar{t}} = \mathrm{Spec}(\bar{k} \otimes_k \mathrm{R})$. On pose

$$\mathrm{G} = \pi_1(\eta, \bar{\eta})$$
$$\mathrm{I} = \pi_1(\eta_{\bar{t}}, \bar{\eta}).$$

On a une suite exacte canonique

$$1 \to \mathrm{I} \to \mathrm{G} \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to 1;$$

G est appelé le *groupe de Galois de* T et I son *groupe d'inertie.*

L'action de I sur les racines d'ordre premier à p d'une uniformisante π dans $k(\bar{\eta})$ se factorise par un quotient canonique

$$\mathrm{I} \overset{t}{\twoheadrightarrow} \hat{\mathbf{Z}}(1)\,(\bar{k}),$$

où
$$\hat{\mathbf{Z}}(1)\,(\bar{k}) := \varprojlim_{\substack{\mathrm{N} \geqslant 1 \\ (\mathrm{N}, p) = 1}} \mu_{\mathrm{N}}(\bar{k})$$

et où $\mu_{\mathrm{N}}(\bar{k})$ agit de manière évidente sur les $\pi^{1/\mathrm{N}}$ ([SGA 7] I (0.3)). Ce quotient est appelé le *quotient modéré* de I. Le noyau de t est l'unique pro-p-sous-groupe de Sylow de I; il sera noté P et appelé la *partie sauvage* de I.

Le pro-groupe I admet une filtration décroissante, indexée par $\mathbf{R}_+$,

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}^{(0)} \supset \mathrm{I}^{(\lambda)} \supset \mathrm{I}^{(\lambda')}$$

$(0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda')$. Chaque $\mathrm{I}^{(\lambda)}$ est un sous-groupe distingué fermé de I, tout comme

$$\mathrm{I}^{(\lambda+)} = \overline{\bigcup_{\varepsilon > 0} \mathrm{I}^{(\lambda+\varepsilon)}} \subset \mathrm{I}^{(\lambda)}, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}_+;$$

on a $\mathrm{I}^{(0+)} = \mathrm{P}$. D'autre part, cette filtration est continue à gauche, i.e.

$$\bigcap_{0 < \lambda' < \lambda} \mathrm{I}^{(\lambda')} = \mathrm{I}^{(\lambda)}, \quad \forall \lambda > 0,$$

et séparée, *i.e.*

$$\bigcap_{\lambda \geqslant 0} \mathrm{I}^{(\lambda)} = \{1\}.$$

Cette filtration est appelée la *filtration par la ramification* (en numérotation supérieure) ([Se 1] chap. IV, § 3).

(2.1.2) Un G-*module* (resp. I-*module*, P-*module*) est par définition un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie V, muni d'une action de G (resp. I, P) qui est définie sur une extension finie de $\mathbf{Q}_\ell$ contenue dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ et qui est continue pour la topologie ℓ-adique.

On notera $\mathscr{G}$ (resp. $\mathscr{I}$, $\mathscr{P}$ la catégorie abélienne nœthérienne et artinienne des G-modules (resp. I-modules, P-modules). On a des foncteurs restrictions

$$\mathscr{G} \to \mathscr{I} \to \mathscr{P}.$$

Remarque **(2.1.2.1)**. — Le choix du point base $\bar{\eta}$ permet d'identifier la catégorie des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux sur η (resp. $\eta_{\bar{t}}$) à $\mathscr{G}$ (resp. $\mathscr{I}$) *via* le foncteur fibre en $\bar{\eta}$.

Si V est un G-module, I-module ou P-module, on appellera *rang de* V et on notera $r(\mathrm{V})$ la dimension de V sur $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$.

Lemme **(2.1.2.2)**. — *Soit* V *un* P-*module. Alors l'action de* P *sur* V *se factorise à travers un quotient fini et, pour* $\lambda \gg 0$, $\mathrm{I}^{(\lambda)}$ *agit trivialement sur* V.

Preuve. — Voir par exemple [Se-Ta], page 515, pour la première assertion (P est un pro-p-groupe, alors que V est ℓ-adique pour $\ell \neq p$), puis [Se 1] chap. IV, § 3, pour la seconde.

Corollaire **(2.1.2.3)**. — *Tout* P-*module* V *est semi-simple.*

Si W est un P-module simple, il existe un unique $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que

$$\mathrm{W}^{\mathrm{I}^{(\lambda)}} = 0 \quad (\text{si } \lambda > 0)$$

et que

$$\mathrm{W}^{\mathrm{I}^{(\lambda+)}} = \mathrm{W};$$

on dira que λ est la *pente de* W.

Pour un P-module V arbitraire, on notera $\Lambda(\mathrm{V})$ l'ensemble des pentes des constituants simples de V; $\Lambda(\mathrm{V})$ est donc un sous-ensemble fini de $\mathbf{R}_+$. Les $\lambda \in \Lambda(\mathrm{V})$ seront appelés les *pentes de* V. En regroupant les constituants simples de V de mêmes pentes, on obtient une décomposition canonique de V en somme directe de P-modules

$$\textbf{(2.1.2.4)} \qquad \mathrm{V} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(\mathrm{V})} \mathrm{V}_\lambda$$

où V_λ est *purement de pente* λ (*i.e.* $\Lambda(\mathrm{V}_\lambda) = \{\lambda\}$).

On appellera *conducteur de Swan* du P-module V et on notera $s(\mathrm{V})$ le nombre réel positif ou nul

$$\textbf{(2.1.2.5)} \qquad s(\mathrm{V}) = \sum_{\lambda \in \Lambda(\mathrm{V})} \lambda . r(\mathrm{V}_\lambda).$$

Pour un I-module ou un G-module V, on appellera encore *pentes de* V les pentes de la restriction de V à P; on notera toujours $\Lambda(\mathrm{V})$ l'ensemble des pentes de V. Alors, la décomposition canonique (2.1.2.4) de V en tant que P-module est en fait une décomposition de V en tant que I-module ou G-module. On appellera encore *conducteur de Swan* de V et on notera toujours $s(\mathrm{V})$ le conducteur de Swan de la restriction de V à P.

Le résultat suivant est une reformulation du théorème de Hasse-Arf ([Se 1] chap. IV, § 3), voir [Ka 3], p. 211-215, pour plus de détails.

Théorème **(2.1.2.6).** — *Soit* V *un* I-*module. Alors les pentes* λ *de* V *sont des nombres rationnels. Plus précisément, pour chaque* $\lambda \in \Lambda(V)$, *le nombre* $\lambda . r(V_\lambda)$ *est un entier. En particulier* $s(V)$ *est un entier.*

Il résulte des définitions que ce résultat est *a fortiori* vérifié par les G-modules.

Pour toute partie $\Lambda \subset \mathbf{R}_+$, on notera $\mathscr{P}_\Lambda$, $\mathscr{I}_\Lambda$ et $\mathscr{G}_\Lambda$ la sous-catégorie strictement pleine de $\mathscr{P}$, $\mathscr{I}$ et $\mathscr{G}$ respectivement formée des V tels que $\Lambda(V) \subset \Lambda$. On a des projecteurs

$$\mathscr{P} \to \mathscr{P}_\Lambda, \quad \mathscr{I} \to \mathscr{I}_\Lambda \quad \text{et} \quad \mathscr{G} \to \mathscr{G}_\Lambda,$$

notés $V \mapsto V_\Lambda$ et définis par

$$V_\Lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(V) \cap \Lambda} V_\lambda;$$

ces projecteurs commutent aux foncteurs restrictions. D'après (2.1.2.3), $\mathscr{P}_\Lambda$, $\mathscr{I}_\Lambda$ et $\mathscr{G}_\Lambda$ sont des sous-catégories abéliennes de $\mathscr{P}$, $\mathscr{I}$ et $\mathscr{G}$ respectivement, stables par sous-quotients et extensions. Les projecteurs ci-dessus sont exacts et les fonctions r et s sont additives sur les suites exactes courtes.

Proposition **(2.1.2.7).** — *Soit* L *un* I-*module de rang* 1 *et de conducteur de Swan* 1. *Alors, pour tout* I-*module* V, *on a* :

(i) $s(V \otimes L) = r(V_{[0,1[}) + s(V_1 \otimes L) + s(V_{]1,+\infty[})$

(ii) $s(V_1 \otimes L) \leqslant r(V_1)$ *avec égalité si et seulement si*

$$(V_1 \otimes L)^{I^{(1-\varepsilon)}} = 0$$

pour au moins un $\varepsilon \in [0, 1/r(V_1)[$.

Preuve. — On a

$$V \otimes L = (V_{[0,1[} \otimes L) \oplus (V_1 \otimes L) \oplus (V_{]1,+\infty[} \otimes L).$$

Or, pour tout P-module simple W de pente λ, le P-module $W \otimes L$ est encore simple de pente $\mathrm{Sup}(1, \lambda)$ si $\lambda \neq 1$ et de pente $\mu \leqslant 1$ si $\lambda = 1$. Ceci démontre (i) et l'inégalité dans (ii).

Supposons maintenant que $s(V_1 \otimes L) = r(V_1)$, alors, pour tout P-module simple W intervenant dans V_1, on a aussi $s(W \otimes L) = r(W)$ (additivité de r et s et inégalité $s(W \otimes L) \leqslant r(W)$ déjà démontrée). Par suite $\Lambda(V_1 \otimes L) = \{1\}$ et $(V_1 \otimes L)^{I^{(1-\varepsilon)}} = 0$ pour tout $\varepsilon \geqslant 0$.

Réciproquement, si $(V_1 \otimes L)^{I^{(1-\varepsilon)}} = 0$ pour un $\varepsilon \in [0, 1/r(V_1)[$ et si W est un sous-P-module simple de la restriction de V_1 à P, on a $(W \otimes L)^{I^{(1-\varepsilon)}} = 0$ pour un $\varepsilon \in [0, 1/r(W)[$; par suite, si μ est la pente de $W \otimes L$, on a $\mu \geqslant 1 - \varepsilon > 1 - 1/r(W)$.

Or, $\mu . r(\mathrm{W})$ est entier, d'où $\mu \geqslant 1$ et donc $\mu = 1$, puisque $\mu \leqslant 1$ (comme on l'a vu ci-dessus). Mais alors, $s(\mathrm{W} \otimes \mathrm{L}) = r(\mathrm{W})$ et, par additivité, $s(\mathrm{V}_1 \otimes \mathrm{L}) = r(\mathrm{V}_1)$.

Exemple **(2.1.2.8)**. — Fixons une uniformisante π de T et soit

$$\mathrm{R}' = \mathrm{R}[\pi']/(\pi'^p + \pi . \pi'^{p-1} - \pi)$$

($1/\pi'$ est donc solution de l'équation d'Artin-Schreier

$$(1/\pi')^p - (1/\pi') = (1/\pi)).$$

R′ est aussi un anneau de valuation discrète hensélien, de corps résiduel k, et π' est une uniformisante de R′. Si η' est le point générique de $\mathrm{T}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{R}')$, $\eta' \to \eta$ est un revêtement fini étale galoisien de groupe de Galois $\mathbf{F}_p$ ($\alpha \in \mathbf{F}_p$ agit sur π' par $\pi' \mapsto \pi'/(1 + \alpha\pi')$). Le caractère $\psi^{-1} : \mathbf{F}_p \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ (cf. (0.2)) du groupe de Galois de η'/η définit alors un G-module de rang 1 et de conducteur de Swan 1 ([Se 1], chap. IV, § 2, exercice 5) que l'on notera $\mathrm{L}_\psi(1/\pi)$ (ou même simplement $\mathrm{L}(1/\pi)$ si aucune confusion n'en résulte).

(2.1.3) On note $\mathrm{V}^\vee$ le dual $\mathscr{H}om(\mathrm{V}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ de V. On a $r(\mathrm{V}^\vee) = r(\mathrm{V})$, $\Lambda(\mathrm{V}^\vee) = \Lambda(\mathrm{V})$, $(\mathrm{V}^\vee)_\lambda = (\mathrm{V}_\lambda)^\vee$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}_+$ et $s(\mathrm{V}^\vee) = s(\mathrm{V})$.

On a $(\mathrm{L}_\psi(1/\pi))^\vee \simeq \mathrm{L}_{\psi^{-1}}(1/\pi)$.

(2.1.4) Un I-module V est dit *modéré* s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) P agit trivialement et donc l'action de I sur V se factorise par le quotient modéré $\mathrm{I} \xrightarrow{t} \hat{\mathbf{Z}}(1)\ (\bar{k})$,

(ii) V est purement de pente 0 ($\mathrm{V} \in \mathrm{ob}\, \mathscr{S}_{\{0\}}$),

(iii) $s(\mathrm{V}) = 0$.

Comme $\hat{\mathbf{Z}}(1)\ (\bar{k})$ est un groupe profini abélien, tout I-module modéré simple est de rang 1 et sa classe d'isomorphie est donnée par un caractère $\chi : \hat{\mathbf{Z}}(1)\ (\bar{k}) \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$.

Un G-module V est dit *modéré* si le I-module sous-jacent l'est; il revient au même de dire que l'action de G sur V se factorise par le quotient $\mathrm{G}^{\mathrm{mod}} := \mathrm{G}/\mathrm{P}$. Ce quotient est une extension de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ par $\hat{\mathbf{Z}}(1)\ (\bar{k})$ et l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ sur $\hat{\mathbf{Z}}(1)\ (\bar{k})$ par automorphisme intérieur dans $\mathrm{G}^{\mathrm{mod}}$ est l'action naturelle.

(2.1.5) Un G-module V est dit *géométriquement constant* ou *non ramifié* si I agit trivialement sur V.

Pour un G-module V les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) V n'a pas de sous-quotient géométriquement constant non trivial,

(ii) $\mathrm{V}^\mathrm{I} = 0$,

(iii) $\mathrm{V}_\mathrm{I} = 0$.

En outre, ces conditions ne portent que sur la partie de pente 0 de V (elles sont automatiquement vérifiées si $\mathrm{V}_0 = 0$).

On notera $\mathscr{G}_{(0,\infty[}$ la sous-catégorie strictement pleine des $V \in \mathrm{ob}\,\mathscr{G}$ qui vérifient les conditions équivalentes ci-dessus. Pour $\lambda \in \mathbf{R}^+$, on pose

$$\mathscr{G}_{(0,\lambda[} = \mathscr{G}_{[0,\lambda[} \cap \mathscr{G}_{(0,\infty[}$$

et

$$\mathscr{G}_{(0,\lambda]} = \mathscr{G}_{[0,\lambda]} \cap \mathscr{G}_{(0,\infty[}.$$

Toutes ces catégories sont des sous-catégories abéliennes de $\mathscr{G}$ stables par sous-quotients et extensions.

La dualité $V \mapsto V^\vee$ envoie $\mathscr{G}_{(0,\infty[}$ dans elle-même.

(2.2) *Ramification des* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceaux sur les courbes : rappels* ([Ra], [SGA 5] X et [Ka 2] 1).

(2.2.1) Soit X une courbe connexe et lisse sur k. Pour tout $x \in |X|$, on note G_x le groupe de Galois du trait hensélien $X_{(x)}$, I_x son groupe d'inertie et P_x la partie sauvage de I_x.

Si F est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau, pour tout $x \in |X|$, $F_{\bar\eta_x}$ est un G_x-module (cf. (2.1.2)) que l'on appelle la *monodromie locale* de F en x. Le rang de $F_{\bar\eta_x}$ est indépendant du point $x \in |X|$ et est égal au *rang générique* $r(F)$ de F. Pour tout $x \in |X|$, on pose

$$\begin{aligned} r_x(F) &= \dim_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}(F_{\bar x}) \\ s_x(F) &= s(F_{\bar\eta_x}) \\ a_x(F) &= r(F) + s_x(F) - r_x(F) \end{aligned}$$

(le lecteur vérifiera que ces entiers ne dépendent que de $F \mid X_{(x)}$ et non des choix des points géométriques $\bar x$, $\bar\eta_x$ faits en (0.4)).

Si $K \in \mathrm{ob}\, D^b_c(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on définit les entiers $r(K)$, $r_x(K)$, $s_x(K)$ et $a_x(K)$ (pour $x \in |X|$) par additivité à partir du cas des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux. On appellera les entiers $r(K)$, $r_x(K)$, $s_x(K)$ et $a_x(K)$ respectivement le *rang générique* de K, le *rang en* x de K, le *conducteur de Swan en* x de K et la *chute totale du rang en* x de K.

Si K est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau pervers sur X, pour tout $x \in |X|$, $K_{\bar\eta_x}$ est concentré en degré -1 et on appellera encore *monodromie locale en* x de K le G_x-module $H^{-1}(K_{\bar\eta_x})$.

Lemme **(2.2.1.1).** — *Soient* $K \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Perv}(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *et* $x \in |X|$. *Alors on a les inégalités*

$$a_x(K) \leqslant r(K) - r_x(K) \leqslant 0$$

et les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathscr{H}^0(K)_{\bar x} = 0$ *et* $\mathscr{H}^{-1}(K)$ *est lisse en* x,

(ii) $a_x(K) = 0$,

(iii) $r_x(K) = r(K)$.

Preuve. — $\mathscr{H}^0(K)$ est à support ponctuel, $\mathscr{H}^{-1}(K)$ n'a pas de sections à support ponctuel, les autres $\mathscr{H}^i(K)$ sont nuls ([B-B-D] (4.0)).

On appellera *ouvert de lissité* de K ($K \in \mathrm{ob\,Perv}(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$) l'ouvert défini par les conditions équivalentes de (2.2.1.1).

On utilisera aussi la *formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič* ([Ra] et [SGA 5] X 7) :

Théorème **(2.2.1.2).** — *Supposons de plus* X *projective sur* k *et soit* $K \in \mathrm{ob}\, D^b_c(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *Alors*

$$\chi(X \otimes_k \bar{k}, K) = \chi(X \otimes_k \bar{k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) . r(K) - \sum_{x \in |X|} \deg(x) . a_x(K),$$

avec
$$\chi(X \otimes_k \bar{k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) = C.(2 - 2g),$$

où C *est le nombre de composantes connexes de* $X \otimes_k \bar{k}$ *et où* g *est le genre de l'une quelconque d'entre elles.*

(2.2.2) Pour démontrer des résultats locaux (*i.e.* sur un trait hensélien), il est souvent nécessaire de passer du local au global pour se ramener à des résultats globaux (*i.e.* sur une courbe projective). Pour ce passage du local au global, nous utiliserons le résultat de prolongement de Gabber et Katz ci-dessous ([Ka 2]) (1.4)).

Considérons la droite projective $\mathbf{P}^1_k$ complétion de la droite affine

$$\mathbf{A}^1_k = \mathbf{P}^1_k - \{\infty\} = \mathrm{Spec}(k[u]).$$

Notons $k\{u\}$ l'hensélisé de l'anneau local $k[u]_{(u)}$, de sorte que $(\mathbf{A}^1_k)_{(0)} = \mathrm{Spec}(k\{u\})$, et $k\{u\}[u^{-1}]$ son corps des fractions, de sorte que $\xi = \mathrm{Spec}(k\{u\}[u^{-1}])$ est le point générique de $(\mathbf{A}^1_k)_{(0)}$. L'inclusion

$$k[u, u^{-1}] \hookrightarrow k\{u\}[u^{-1}]$$

induit un morphisme de schémas

$$\xi \xrightarrow{i} \mathbf{G}_{m,k} = \mathbf{A}^1_k - \{0\}.$$

Fixons un point géométrique $\bar{\xi}$ localisé en ξ.

Si $\pi_1(\xi, \bar{\xi}) \twoheadrightarrow \pi_1(\xi, \bar{\xi})^{\mathrm{mod}}$ est le quotient modéré (cf. (2.1.1)) et si

$$\pi_1(\mathbf{G}_{m,k}, \bar{\xi}) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbf{G}_{m,k}, \bar{\xi})^{\mathrm{mod}.\infty} \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbf{G}_{m,k}, \bar{\xi})^{\mathrm{mod}}$$

sont les quotients qui classifient les revêtements finis étales de $\mathbf{G}_{m,k}$ qui sont respectivement modérément ramifiés en ∞ et modérément ramifiés en 0 et ∞, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(\mathbf{G}_{m,k}, \bar{\xi}) \arrow[d, two heads] \\
\pi_1(\xi, \bar{\xi}) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[r, "i_*^{\mathrm{mod}.\infty}"] \arrow[d, two heads] & \pi_1(\mathbf{G}_{m,k}, \bar{\xi})^{\mathrm{mod}.\infty} \arrow[d, two heads] \\
\pi_1(\xi, \bar{\xi})^{\mathrm{mod}} \arrow[r, "i_*^{\mathrm{mod}}"] & \pi_1(\mathbf{G}_{m,k}, \bar{\xi})^{\mathrm{mod}}
\end{tikzcd}$$

Passant de k à $\bar{k}$, on a de même un diagramme commutatif qui s'envoie naturellement dans le précédent

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(\mathbf{G}_{m,\bar{k}}, \bar{\xi}) \arrow[d, two heads] \\
\pi_1(\xi \otimes_k \bar{k}, \bar{\xi}) \arrow[ur, "\bar{i}_*"] \arrow[r, "\bar{i}_*^{\mathrm{mod}.\infty}"] \arrow[d, two heads] & \pi_1(\mathbf{G}_{m,\bar{k}}, \bar{\xi})^{\mathrm{mod}.\infty} \arrow[d, two heads] \\
\pi_1(\xi \otimes_k \bar{k}, \bar{\xi})^{\mathrm{mod}} \arrow[r, "\bar{i}_*^{\mathrm{mod}}"] & \pi_1(\mathbf{G}_{m,\bar{k}}, \bar{\xi})^{\mathrm{mod}}
\end{tikzcd}$$

Lemme **(2.2.2.1)**. — *Les homomorphismes i_*^{mod} et $\bar{i}_*^{\mathrm{mod}}$ sont des isomorphismes.*

Preuve. — Il suffit de montrer que $\bar{i}_*^{\mathrm{mod}}$ est un isomorphisme. Or $\pi_1(\xi \otimes_k \bar{k}, \bar{\xi})^{\mathrm{mod}}$ et $\pi_1(\mathbf{G}_{m,\bar{k}}, \bar{\xi})^{\mathrm{mod}}$ sont canoniquement isomorphes à $\hat{\mathbf{Z}}(1)$ $(\bar{k})$ (cf. (2.1.1) et (1.1.3.7)) et ces isomorphismes identifient $\bar{i}_*^{\mathrm{mod}}$ à l'identité de $\hat{\mathbf{Z}}(1)$ $(\bar{k})$: le revêtement de Kummer de $\mathbf{G}_{m,\bar{k}}$ d'équation $v^{\mathrm{N}} = u$ induit le revêtement de Kummer de $\xi \otimes_k \bar{k}$ de même équation.

Le théorème de Gabber et Katz est une extension de ce résultat. Plus précisément, il s'énonce :

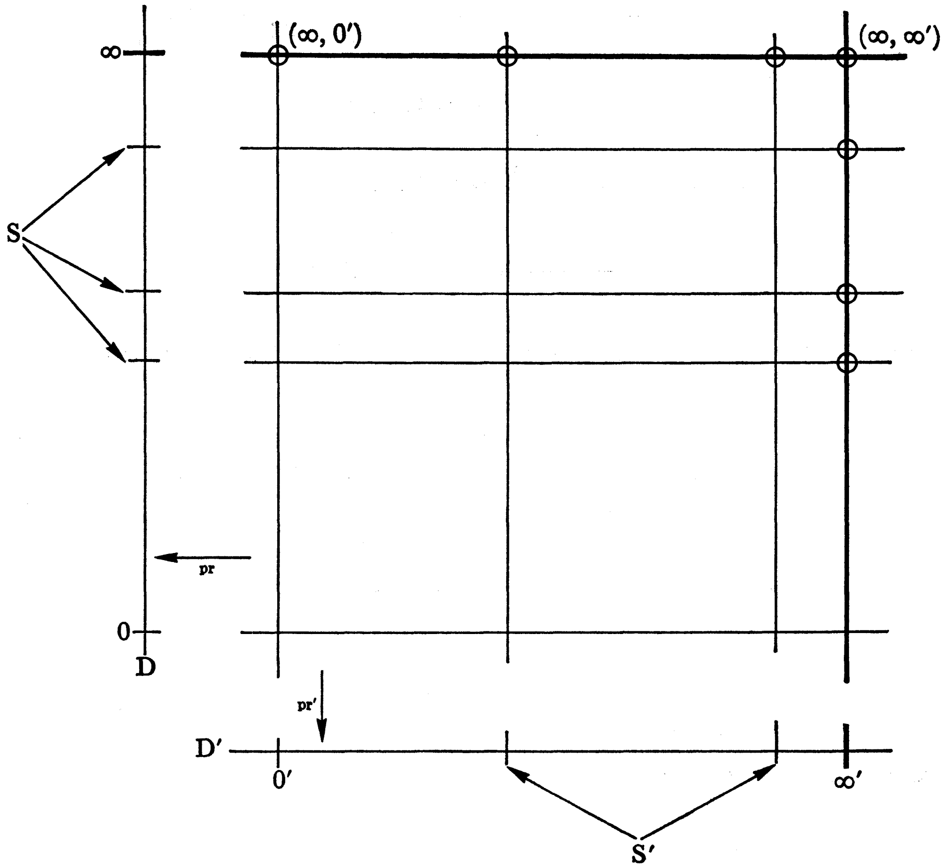
Théorème **(2.2.2.2)**. — *L'homomorphisme $\bar{i}_*^{\mathrm{mod}.\infty}$ est injectif et admet une unique rétraction continue $\bar{r}$. De plus $i_*^{\mathrm{mod}.\infty}$ est aussi injectif et il existe une unique rétraction continue r de $i_*^{\mathrm{mod}.\infty}$ qui prolonge la rétraction $\bar{r}$.*

Il résulte de ce théorème que les homomorphismes $\bar{i}_*$ et i_* sont injectifs et admettent des rétractions continues canoniques (mais non nécessairement uniques).

Si V est un $\pi_1(\xi, \bar{\xi})$-module (cf. (2.1.2)), on appellera, suivant Gabber et Katz, *prolongement canonique* de V le $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau lisse F sur $\mathbf{G}_{m,k}$, modérément ramifié en ∞, tel que $\mathrm{F}_{\bar{\xi}} = \mathrm{V}$ et que l'action de $\pi_1(\mathbf{G}_{m,k}, \bar{\xi})^{\mathrm{mod}.\infty}$ sur $\mathrm{F}_{\bar{\xi}}$ soit la composée de la rétraction r et de l'action de $\pi_1(\xi, \bar{\xi})$ sur V. Une propriété immédiate mais importante du prolongement canonique est la suivante : si V est *à monodromie géométrique finie, i.e.* si $\pi_1(\xi \otimes_k \bar{k}, \bar{\xi})$ agit à travers un quotient fini sur V, il en est de même de son prolongement canonique F, *i.e.* $\pi_1(\mathbf{G}_{m,\bar{k}}, \bar{\xi})$ agit à travers un quotient fini sur $\mathrm{F}_{\bar{\xi}}$. Il est d'autre part clair que le prolongement canonique est fonctoriel en V et est un foncteur exact.

(2.3) *Monodromies locales de $\mathscr{F}$*(K) *pour* K *un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau pervers sur* A.

(2.3.1) On reprend les notations de (1.4.1). Soit $\mathrm{K} \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Perv}(\mathrm{A}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Alors, d'après (1.3.2.3), $\mathrm{K}' := \mathscr{F}(\mathrm{K})$ est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau pervers sur A′. On note $j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{A}$ (resp. $j' : \mathrm{U}' \hookrightarrow \mathrm{A}'$) l'ouvert de lissité de K (resp. K′) (cf. (2.2.1.1)) et $i : \mathrm{S} \hookrightarrow \mathrm{A}$ (resp. $i' : \mathrm{S}' \hookrightarrow \mathrm{A}'$) le fermé réduit complémentaire; on note F (resp. F′) le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse $\mathscr{H}^{-1}(\mathrm{K}) \mid \mathrm{U}$ (resp. $\mathscr{H}^{-1}(\mathrm{K}') \mid \mathrm{U}'$).



Proposition **(2.3.1.1).** — *Avec les notations ci-dessus, on a les formules suivantes :*

(i) $r(K') = \sum_{s \in S} \deg(s) . a_s(K) + r((F_{\bar{\eta}_\infty})_{]1,\infty[}) - s((F_{\bar{\eta}_\infty})_{]1,\infty[})$,

(i)′ $r(K) = \sum_{s' \in S'} \deg(s') . a_{s'}(K') + r((F'_{\bar{\eta}_{\infty'}})_{]1,\infty[}) - s((F'_{\bar{\eta}_{\infty'}})_{]1,\infty[})$,

(ii) *pour tout* $s' \in |A'| - \{0'\}$,

$$r_{s'}(K') = r(K') + r((F_{\bar{\eta}_\infty})_1) - s((F_{\bar{\eta}_\infty})_1 \otimes \mathscr{L}(x.s')_{\bar{\eta}_\infty}),$$

(ii)′ *pour tout* $s \in |A| - \{0\}$

$$r_s(K) = r(K) + r((F'_{\bar{\eta}_{\infty'}})_1) - s((F'_{\bar{\eta}_{\infty'}})_1 \otimes \mathscr{L}(s.x')_{\bar{\eta}_{\infty'}}),$$

(iii) $r_{0'}(K') = r(K') + r((F_{\bar{\eta}_\infty})_{[0,1[}) - s((F_{\bar{\eta}_\infty})_{[0,1[})$,

(iii)′ $r_0(K) = r(K) + r((F'_{\bar{\eta}_{\infty'}})_{[0,1[}) - s((F'_{\bar{\eta}_{\infty'}})_{[0,1[})$.

Preuve. — D'après le théorème de changement de base propre, on a, pour tout $s' \in |A'|$,

$$r_{s'}(K') = -\chi_c(A \otimes_k \bar{k}, K \otimes \mathscr{L}(x.\bar{s}'))$$

et donc, d'après la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič (2.2.1.2), on a

$$r_{s'}(\mathrm{K}') = -r(\mathrm{K}) + \sum_{s \in \mathrm{S}} \deg(x).a_s(\mathrm{K}) - s(\mathrm{F}_{\bar{\eta}_\infty} \otimes \mathscr{L}(x.s')_{\bar{\eta}_\infty}).$$

Ceci démontre la formule (iii), ainsi que la formule (ii), compte tenu de (2.1.2.7) (i).

D'autre part, pour $a'_1, a'_2 \in \bar{k}$ distincts, on a

$$(\mathscr{L}(x.a'_1)_{\bar{\eta}_\infty} \otimes (\mathscr{L}(x.a'_2)_{\bar{\eta}_\infty})^\vee)^{\mathrm{I}_\infty^{(1)}} = 0,$$

puisque $\mathscr{L}(x.(a'_1 - a'_2))_{\bar{\eta}_\infty}$ est de pente 1 (cf. (2.1.2.8)); par suite, pour presque tout $a' \in \bar{k}$, on a

$$((\mathrm{F}_{\bar{\eta}_\infty})_1 \otimes \mathscr{L}(x.a')_{\bar{\eta}_\infty})^{\mathrm{I}_\infty^{(1)}} = 0.$$

Ceci achève la preuve de la formule (i), compte tenu de (2.1.2.7) (ii).

Les formules (i)', (ii)' et (iii)' se déduisent des formules (i), (ii) et (iii) respectivement par involutivité de la transformation de Fourier-Deligne (1.3.2.3).

Corollaire **(2.3.1.2).** — *L'ouvert* U' *ne dépend de* K *que par l'intermédiaire du* P_∞*-module* $(\mathrm{F}_{\bar{\eta}_\infty})_{[0,1]}$. *Plus précisément* $s' \in |\mathrm{A}'|$ *est dans* U' *si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :*

a) $s' \neq 0'$ *et il existe* $\varepsilon \in [0, 1/r((\mathrm{F}_{\bar{\eta}_\infty})_1)[$ *tel que*

$$((\mathrm{F}_{\bar{\eta}_\infty})_1 \otimes \mathscr{L}(x.s')_{\bar{\eta}_\infty})^{\mathrm{I}_\infty^{(1-\varepsilon)}} = 0,$$

b) $s' = 0'$ *et* $(\mathrm{F}_{\bar{\eta}_\infty})_{[0,1[} = 0$.

Preuve. — C'est une conséquence immédiate de (2.2.1.1) et de (2.3.1.1).

Les cas particuliers suivants de (2.3.1.1) et (2.3.1.2) nous seront plus spécialement utiles :

Corollaire **(2.3.1.3).** — (i) *Si le* P_∞*-module* $\mathrm{F}_{\bar{\eta}_\infty}$ *est non nul et purement de pentes* < 1, *alors on a*

$$\mathrm{U}' = \mathrm{A}' - \{0'\},$$

$$r(\mathrm{K}') = \sum_{s \in \mathrm{S}} \deg(s).a_s(\mathrm{K})$$

et

$$r_{0'}(\mathrm{K}') = r(\mathrm{K}) + r(\mathrm{F}_{\bar{\eta}_\infty}) - s(\mathrm{F}_{\bar{\eta}_\infty}).$$

(ii) *Si le* P_∞*-module* $\mathrm{F}_{\bar{\eta}_\infty}$ *est purement de pentes* > 1, *alors on a*

$$\mathrm{U}' = \mathrm{A}'$$

et

$$r(\mathrm{K}') = -r(\mathrm{K}) + \sum_{s \in \mathrm{S}} \deg(s).a_s(\mathrm{K}) - s(\mathrm{F}_{\bar{\eta}_\infty}).$$

(2.3.2) Pour tout $s' \in \mathrm{S}'$, on a d'une part un triangle distingué

$$sp^*(\mathrm{K}' \mid s') \to \mathrm{K}' \mid \eta_{s'} \to \mathrm{R}\Phi_{\eta_{s'}}(\mathrm{K}') \to$$

dans $D^b_c(\eta_{s'}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ (cf. [SGA 7] XIII (1.4.2.2)) qui induit une suite exacte longue de $G_{s'}$-modules

$$\dots \to \mathscr{H}^i(K'_{\bar{s}'}) \to \mathscr{H}^i(K'_{\bar{\eta}_{s'}}) \to R^i\,\Phi_{\bar{\eta}_{s'}}(K') \to \mathscr{H}^{i+1}(K'_{\bar{s}'}) \to \dots,$$

où $G_{s'}$ agit sur $\mathscr{H}^i(K'_{\bar{s}'})$ à travers son quotient $\pi_1(s', \bar{s}')$. Comme K' est pervers, cette suite exacte longue se réduit à la suite exacte

$$0 \to \mathscr{H}^{-1}(K'_{\bar{s}'}) \to F'_{\bar{\eta}_{s'}} \to R^{-1}\,\Phi_{\bar{\eta}_{s'}}(K') \to \mathscr{H}^0(K'_{\bar{s}'}) \to 0,$$

les autres termes étant tous nuls. D'autre part, on a les cycles évanescents

$$R\Phi_{\eta_{s'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_!\,K) \otimes \overline{\mathscr{L}}(x.x')\,[1]) \in \mathrm{ob}\, D^b_c(D \times_k \eta_{s'}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

pour la projection $\overline{\mathrm{pr}}' : D \times_k A'_{(s')} \to A'_{(s')}$ (cf. [SGA 7] XIII (2.1.1)).

Proposition **(2.3.2.1)**. — *Avec les notations ci-dessus,*

(i) *la restriction de* $R\Phi_{\eta_{s'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_!\,K) \otimes \overline{\mathscr{L}}(x.x')\,[1])$ *à* $A \times_k \eta_{s'}$ *est nulle,*

(ii) *pour tout entier* $i \neq -1$, *le* $G_{s'}$*-module*

$$R^i\,\Phi_{\bar{\eta}_{s'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_!\,K) \otimes \overline{\mathscr{L}}(x.x')\,[1])_{(\overline{\infty}, \bar{s}')}$$

est nul,

(iii) *on a un isomorphisme fonctoriel en* $K \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Perv}(A, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$

$$R^{-1}\,\Phi_{\bar{\eta}_{s'}}(K') \simeq R^{-1}\,\Phi_{\bar{\eta}_{s'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_!\,K) \otimes \overline{\mathscr{L}}(x.x')\,[1])_{(\overline{\infty}, \bar{s}')}$$

de $G_{s'}$*-modules.*

Preuve. — Puisque $\overline{\mathscr{L}}(x.x')$ est lisse sur $A \times_k A'_{(s')}$, (i) résulte de [SGA 4½] [Th. Finitude] (2.16). D'après [SGA 7] XIII (2.1.7.1), on a alors des isomorphismes canoniques de $G_{s'}$-modules

$$R^i\,\Phi_{\bar{\eta}_{s'}}(K') \simeq R^i\,\Phi_{\bar{\eta}_{s'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_!\,K) \otimes \overline{\mathscr{L}}(x.x')\,[1])_{(\overline{\infty}, \bar{s}')}$$

pour tout $i \in \mathbf{Z}$, d'où (ii) et (iii).

Remarque **(2.3.2.2)**. — Compte tenu de l'assertion (i), l'assertion (ii) ci-dessus est un cas particulier du théorème de Artin et Gabber sur la t-exactitude des foncteurs $R\Psi$ et $R\Phi$ (cf. [B-B-D] (4.4)).

Corollaire **(2.3.2.3)**. — *Le rang du* $G_{s'}$*-module* $R^{-1}\,\Phi_{\bar{\eta}_{s'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_!\,K) \otimes \overline{\mathscr{L}}(x.x')\,[1])_{(\overline{\infty}, \bar{s}')}$ *est donné par les formules suivantes :*

(i) $r((F_{\bar{\eta}_\infty})_1) - s((F_{\bar{\eta}_\infty})_1 \otimes \mathscr{L}(x.s')_{\bar{\eta}_\infty})$ *si* $s' \neq 0'$,

(ii) $r((F_{\bar{\eta}_\infty})_{[0,1[}) - s((F_{\bar{\eta}_\infty})_{[0,1[})$ *si* $s' = 0'$.

Remarque **(2.3.2.4)**. — C'est un cas particulier du théorème de semi-continuité du conducteur de Swan prouvé par Deligne (cf. [Lau 3] (5.1.1)), compte tenu de (2.1.2.7) (i).

(2.3.3) Considérons maintenant d'une part le $G_{\infty'}$-module $F'_{\bar{\eta}_{\infty'}}$ et d'autre part les cycles évanescents

$$R\Phi_{\eta_{\infty'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_! K) \otimes \bar{\mathscr{L}}(x.x')[1]) \in \mathrm{ob}\, D^b_c(D \times_k \eta_{\infty'}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

pour la projection $\overline{\mathrm{pr}}' : D \times_k D'_{(\infty')} \to D'_{(\infty')}$ (cf. [SGA 7] XIII (2.1.1)).

Proposition **(2.3.3.1)**. — *Avec les notations ci-dessus,*

(i) *la restriction de* $R\Phi_{\eta_{\infty'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_! K) \otimes \bar{\mathscr{L}}(x.x')[1])$ *à* $U \times_k \eta_{\infty'}$ *est nulle,*

(ii) *pour tout entier* $i \neq -1$, *les* $G_{s \times_k \infty'}$*-modules*

$$R^i \Phi_{\bar{\eta}_{\infty'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_! K) \otimes \bar{\mathscr{L}}(x.x')[1])_{(\bar{s}, \bar{\infty})}$$

($s \in S$) *et le* $G_{\infty'}$*-module*

$$R^i \Phi_{\bar{\eta}_{\infty'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_! K) \otimes \bar{\mathscr{L}}(x.x')[1])_{(\bar{\infty}, \bar{\infty}')}$$

sont nuls,

(iii) *on a un isomorphisme fonctoriel en* $K \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Perv}(A, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$

$$F'_{\bar{\eta}_{\infty'}} \simeq \bigoplus_{s \in S} \mathrm{Ind}^{G_{\infty'}}_{G_{s \times_k \infty'}}(R^{-1} \Phi_{\bar{\eta}_{\infty'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_! K) \otimes \bar{\mathscr{L}}(x.x')[1])_{(\bar{s}, \bar{\infty}')})$$

$$\oplus R^{-1} \Phi_{\bar{\eta}_{\infty'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_! K) \otimes \bar{\mathscr{L}}(x.x')[1])_{(\bar{\infty}, \bar{\infty}')}$$

de $G_{\infty'}$*-modules.*

Preuve. — L'assertion (i) résulte aussitôt de (1.3.1.2) pour $A_1 = A'$, $D_1 = D'$, $A_2 = A$. Comme, d'après [SGA 7] XIII (2.1.7.1), on a

$$K'_{\bar{\eta}_{\infty'}} = R\Gamma(D \otimes_k \bar{\infty}', R\Psi_{\bar{\eta}_{\infty'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_! K) \otimes \bar{\mathscr{L}}(x.x')[1])),$$

les assertions (ii) et (iii) résultent de l'assertion (i) et du fait que $R\Psi_{\bar{\eta}_{\infty'}} = R\Phi_{\bar{\eta}_{\infty'}}$ dans notre situation, puisque

$$(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_! K) \otimes \bar{\mathscr{L}}(x.x')[1]) \mid D \times_k \infty' = 0,$$

par définition de $\bar{\mathscr{L}}(x.x')$.

Remarque **(2.3.3.2)**. — Même remarque qu'en (2.3.2.2).

Remarque **(2.3.3.3)**. — Une comparaison de (2.3.1.1) (i) et de (2.3.3.1) (iii) suggère les formules suivantes :

$$r(R^{-1} \Phi_{\bar{\eta}_{\infty'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_! K) \otimes \bar{\mathscr{L}}(x.x')[1])_{(\bar{s}, \bar{\infty}')}) = a_s(K),$$

pour $s \in S$, et

$$r(R^{-1} \Phi_{\bar{\eta}_{\infty'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_! K) \otimes \bar{\mathscr{L}}(x.x')[1])_{(\bar{\infty}, \bar{\infty}')} = r((F_{\bar{\eta}_{\infty}})_{]1, \infty[}) - s((F_{\bar{\eta}_{\infty}})_{]1, \infty[}).$$

Nous les démontrerons plus loin (cf. (2.4.3) (i) b), pour $s = 0$, et (2.4.3) (iii) b)).

(2.4) *Transformations de Fourier locales : définitions et énoncés des propriétés fondamentales.*

(2.4.1) Soient T et T′ deux traits henséliens d'égale caractéristique p, à corps résiduel k, *munis d'uniformisantes* π et π' respectivement. On notera pr et pr′ les projections canoniques de $\mathrm{T}\times_k\mathrm{T}'$ sur T et T′ respectivement. On a les $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux $\mathscr{L}_\psi(\pi/\pi')$, $\mathscr{L}_\psi(\pi'/\pi)$ et $\mathscr{L}_\psi(1/\pi\pi')$ sur $\mathrm{T}\times_k\eta'$, $\eta\times_k\mathrm{T}'$ et $\eta\times_k\eta'$ respectivement, où η et η' sont les points génériques de T et T′ respectivement; on notera $\overline{\mathscr{L}}_\psi(\pi/\pi')$, $\overline{\mathscr{L}}_\psi(\pi'/\pi)$ et $\overline{\mathscr{L}}_\psi(1/\pi\pi')$ les prolongements par zéro de ces $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux à $\mathrm{T}\times_k\mathrm{T}'$ tout entier.

On utilisera librement les notations de (2.1) (sans modification quand elles sont relatives à T et affectées d'un exposant ′ quand elles sont relatives à T′).

Pour tout $\mathrm{V}\in\mathrm{ob}\,\mathscr{G}$ (resp. $\mathrm{V}'\in\mathrm{ob}\,\mathscr{G}'$), identifié à un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau sur η (resp. η'), on notera $\mathrm{V}_!$ (resp. $\mathrm{V}'_!$) le prolongement par zéro de ce dernier $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau à T (resp. T′) tout entier.

(2.4.2) Pour $\mathrm{V}\in\mathrm{ob}\,\mathscr{G}$, on a les cycles évanescents

$$\mathrm{R}\Phi_{\eta'}(\mathrm{pr}^*(\mathrm{V}_!)\otimes\overline{\mathscr{L}}_\psi(\pi/\pi'))$$
$$\mathrm{R}\Phi_{\eta'}(\mathrm{pr}^*(\mathrm{V}_!)\otimes\overline{\mathscr{L}}_\psi(\pi'/\pi))$$
et
$$\mathrm{R}\Phi_{\eta'}(\mathrm{pr}^*(\mathrm{V}_!)\otimes\overline{\mathscr{L}}_\psi(1/\pi\pi'))$$

dans $\mathrm{D}^b_c(\mathrm{T}\times_k\eta',\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, relatifs à $\mathrm{pr}':\mathrm{T}\times_k\mathrm{T}'\to\mathrm{T}'$ (cf. [SGA 7] XIII (2.1.1)). Le lemme suivant est immédiat :

Lemme **(2.4.2.1).** — *Soient* $\mathrm{V}\in\mathrm{ob}\,\mathscr{G}$ *et* $\mathrm{K}\in\mathrm{ob}\,\mathrm{Perv}(\mathrm{A},\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

(i) *Si* $\pi:\mathrm{T}\to\mathrm{A}$ *et* $\pi':\eta'\to\eta_{\infty'}$ *sont les k-morphismes définis par* $\pi\mapsto x$ *et* $\pi'\mapsto 1/x'$ *respectivement, alors tout isomorphisme de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux pervers* $\pi^*\mathrm{K}\simeq\mathrm{V}_![1]$ *sur* T *induit un isomorphisme de*

$$(\pi\times\pi')^*\,\mathrm{R}\Phi_{\eta_{\infty'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_!\,\mathrm{K})\otimes\overline{\mathscr{L}}_\psi(x.x')\,[1])$$
sur
$$\mathrm{R}\Phi_{\eta'}(\mathrm{pr}^*(\mathrm{V}_!)\otimes\overline{\mathscr{L}}_\psi(\pi/\pi'))\,[2]$$

dans $\mathrm{D}^b_c(\mathrm{T}\times_k\eta',\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

(ii) *Si* $\pi:\mathrm{T}\to\mathrm{D}$ *et* $\pi':\eta'\to\eta_{0'}$, *sont les k-morphismes définis par* $\pi\mapsto 1/x$ *et* $\pi'\mapsto x'$ *respectivement, alors tout isomorphisme de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux pervers* $\pi^*\mathrm{K}\simeq\mathrm{V}[1]$ *sur* η *induit un isomorphisme de*

$$(\pi\times\pi')^*\,\mathrm{R}\Phi_{\eta_{0'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_!\,\mathrm{K})\otimes\overline{\mathscr{L}}_\psi(x.x')\,[1])$$
sur
$$\mathrm{R}\Phi_{\eta'}(\mathrm{pr}^*(\mathrm{V}_!)\otimes\overline{\mathscr{L}}_\psi(\pi'/\pi))\,[2]$$

dans $\mathrm{D}^b_c(\mathrm{T}\times_k\eta',\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

(iii) *Si* $\pi:\mathrm{T}\to\mathrm{D}$ *et* $\pi':\eta'\to\eta_{\infty'}$ *sont les k-morphismes définis par* $\pi\mapsto 1/x$ *et* $\pi'\mapsto 1/x'$ *respectivement, alors tout isomorphisme de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux pervers* $\pi^*\mathrm{K}\simeq\mathrm{V}[1]$ *sur* η *induit un isomorphisme de*

$$(\pi\times\pi')^*\,\mathrm{R}\Phi_{\eta_{\infty'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_!\,\mathrm{K})\otimes\overline{\mathscr{L}}_\psi(x.x')\,[1])$$
sur
$$\mathrm{R}\Phi_{\eta'}(\mathrm{pr}^*(\mathrm{V}_!)\otimes\overline{\mathscr{L}}_\psi(1/\pi\pi'))\,[2]$$

dans $\mathrm{D}^b_c(\mathrm{T}\times_k\eta',\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

Proposition **(2.4.2.2).** — *Soit* $V \in \mathrm{ob}\,\mathscr{G}$. *Alors les cycles évanescents*

$$R\Phi_{\eta'}(\mathrm{pr}^*(V_!) \otimes \bar{\mathscr{L}}_\psi(\pi/\pi'))$$
$$R\Phi_{\eta'}(\mathrm{pr}^*(V_!) \otimes \bar{\mathscr{L}}_\psi(\pi'/\pi))$$
et
$$R\Phi_{\eta'}(\mathrm{pr}^*(V_!) \otimes \bar{\mathscr{L}}_\psi(1/\pi\pi'))$$

sont concentrés sur $t \times_k \eta' \subset T \times_k \eta'$ *et n'ont de cohomologie non nulle qu'en degré* 1.

Preuve. — Compte tenu de (2.2.2.1) et (2.4.2.1), la proposition résulte aussitôt de (2.3.2.1) (i) et (ii) et de (2.3.3.1) (i) et (ii).

Définition **(2.4.2.3).** — *On appellera transformation de Fourier locale chacun des foncteurs*

$$\mathscr{F}_\psi^{(0,\infty')}, \mathscr{F}_\psi^{(\infty,0')}, \mathscr{F}_\psi^{(\infty,\infty')} : \mathscr{G} \to \mathscr{G}'$$

définis par

$$\mathscr{F}_\psi^{(0,\infty')}(V) = R^1\Phi_{\bar{\eta}'}(\mathrm{pr}^*(V_!) \otimes \bar{\mathscr{L}}_\psi(\pi/\pi'))_{(\bar{t},\bar{t}')},$$
$$\mathscr{F}_\psi^{(\infty,0')}(V) = R^1\Phi_{\bar{\eta}'}(\mathrm{pr}^*(V_!) \otimes \bar{\mathscr{L}}_\psi(\pi'/\pi))_{(\bar{t},\bar{t}')},$$
$$\mathscr{F}_\psi^{(\infty,\infty')}(V) = R^1\Phi_{\bar{\eta}'}(\mathrm{pr}^*(V_!) \otimes \bar{\mathscr{L}}_\psi(1/\pi\pi'))_{(\bar{t},\bar{t}')}.$$

En échangeant les rôles de (T, π) et (T', π'), on définit de même trois foncteurs

$$\mathscr{F}_\psi^{(0',\infty)}, \mathscr{F}_\psi^{(\infty',0)}, \mathscr{F}_\psi^{(\infty',\infty)} : \mathscr{G}' \to \mathscr{G}.$$

Dans la suite, on laissera tomber l'indice ψ des notations $\mathscr{F}_\psi$ et $\mathscr{L}_\psi$ quand cela ne prête pas à confusion. On notera $a : T \to T$ l'automorphisme défini par $\pi \mapsto -\pi$

Théorème **(2.4.3).** — *Les transformations de Fourier locales ont les propriétés suivantes.*

(i) a) *Le foncteur* $\mathscr{F}^{(0,\infty')}$ *est exact.*

b) *Pour tout* $V \in \mathrm{ob}\,\mathscr{G}$, *on a*

$$r(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(V)) = r(V) + s(V),$$
$$s(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(V)) = s(V),$$

de sorte que $\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\mathscr{G}) \subset \mathscr{G}'_{[0,1[}$.

c) *Le foncteur* $\mathscr{F}^{(0,\infty')} : \mathscr{G} \to \mathscr{G}'_{[0,1[}$ *est une équivalence de catégories abéliennes de quasi-inverse* $a^*\mathscr{F}^{(\infty',0)}(-)$ (1).

d) *On a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathscr{F}_\psi^{(0,\infty')}(V)^\vee \simeq \mathscr{F}_{\psi^{-1}}^{(0,\infty')}(V^\vee)\ (1)$$

pour $V \in \mathrm{ob}\,\mathscr{G}_{(0,\infty[}$ (cf. (2.1.5)).

(ii) a) *Le foncteur* $\mathscr{F}^{(\infty,0')}$ *est exact.*

b) *Pour tout* $V \in \mathrm{ob}\,\mathscr{G}_{[1,\infty[}$, *on a*

$$\mathscr{F}^{(\infty,0')}(V) = 0$$

et, pour tout $V \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}_{[0,1[}$, *on a*

$$r(\mathscr{F}^{(\infty,0')}(V)) = r(V) - s(V),$$
$$s(\mathscr{F}^{(\infty,0')}(V)) = s(V).$$

c) *Le foncteur* $\mathscr{F}^{(\infty,0')} : \mathscr{G}_{[0,1[} \to \mathscr{G}'$ *est une équivalence de catégories abéliennes de quasi-inverse* $a^* \mathscr{F}^{(0',\infty)}(-)(1)$.

d) *On a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathscr{F}_{\psi}^{(\infty,0')}(V)^{\vee} \simeq \mathscr{F}_{\psi^{-1}}^{(\infty,0')}(V^{\vee})(1)$$

pour $V \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}_{(0,1[}$ (cf. (2.1.5)).

(iii) a) *Le foncteur* $\mathscr{F}^{(\infty,\infty')}$ *est exact.*

b) *Pour tout* $V \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}_{[0,1]}$, *on a*

$$\mathscr{F}^{(\infty,\infty')}(V) = 0$$

et, pour tout $V \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}_{]1,\infty[}$, *on a*

$$r(\mathscr{F}^{(\infty,\infty')}(V)) = s(V) - r(V),$$
$$s(\mathscr{F}^{(\infty,\infty')}(V)) = s(V),$$

de sorte que $\mathscr{F}^{(\infty,\infty')}(\mathscr{G}_{]1,\infty[}) \subset \mathscr{G}'_{]1,\infty[}$.

c) *Le foncteur* $\mathscr{F}^{(\infty,\infty')} : \mathscr{G}_{]1,\infty[} \to \mathscr{G}'_{]1,\infty[}$ *est une équivalence de catégories abéliennes de quasi-inverse* $a^* \mathscr{F}^{(\infty',\infty)}(-)(1)$.

d) *On a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathscr{F}_{\psi}^{(\infty,\infty')}(V)^{\vee} \simeq \mathscr{F}_{\psi^{-1}}^{(\infty,\infty')}(V^{\vee})(1)$$

pour $V \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}_{]1,\infty[}$.

La démonstration du théorème ci-dessus sera donnée en (2.5).

Remarques **(2.4.3.1)**. — Katz a défini et étudié un produit de convolution géométrique sur $\mathbf{G}_{m,k}$ et une variante locale de celui-ci (cf. [Ka] V et VI). Le produit de convolution avec $\mathscr{L}_{\psi} \mid \mathbf{G}_{m,k}$ est relié à $\mathscr{F}_{\psi}$ et une partie des résultats de (2.4.3) (i) b) et (ii) b) peut se déduire de *loc. cit.* VII et VIII.

(2.4.3.2) Nous verrons en (3.5.2) comment sont reliés, dans le cas où $k = \mathbf{F}_q$, le caractère central (ou déterminant) et la constante locale d'un objet V de $\mathscr{G}$ et de ses transformés de Fourier locaux.

(2.4.3.3) Dans les assertions (i) d) et (ii) d), on doit écarter les V qui admettent des sous-quotients géométriquement constants non triviaux car le foncteur $V \mapsto V_!$ ne commute pas à la dualité pour ceux-ci. Par contre, si $V \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}_{(0,\infty[}$, $V_!$ coïncide avec le prolongement intermédiaire V_* de V à T qui, lui, commute à la dualité.

(2.5) *Transformations de Fourier locales : démonstration du théorème* (2.4.3).

(2.5.1) Les assertions (i) a), (ii) a) et (iii) a) de (2.4.3) résultent immédiatement de (2.4.2.2). Pour démontrer les assertions (i) b), (ii) b) et (iii) b) de (2.4.3), on peut, par conséquent, se limiter au cas où le G-module V est *simple*.

(2.5.2) Il résulte aussitôt des définitions que les transformations de Fourier locales commutent aux changements de base $k \hookrightarrow k_1$ (k_1 extension de k contenue dans $\bar{k}$) : pour $f : \eta \otimes_k k_1 \to \eta$ et $f' : \eta' \otimes_k k_1 \to \eta'$ les projections canoniques et pour $(.,.) = (0, \infty')$, $(\infty, 0')$ ou (∞, ∞'), le carré de foncteurs (avec les notations évidentes)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "\mathcal{F}^{(.,.)}"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathcal{G}' \arrow[d, "f'^*"] \\ \mathcal{G}_1 \arrow[r, "\mathcal{F}_1^{(.,.)}"] & \mathcal{G}'_1 \end{tikzcd}$$

est « commutatif ». Ceci ramène la preuve des assertions (i) b), (ii) b) et (iii) b) de (2.4.3) au cas où k est *algébriquement clos*.

(2.5.3) Montrons maintenant les assertions (i) b), (ii) b) et (iii) b) de (2.4.3) pour un G-module V *modérément ramifié*.

D'après (2.5.1), (2.5.2) et (2.1.4), il suffit pour cela de montrer la proposition suivante :

Proposition **(2.5.3.1).** — (i) *Pour le* G-*module trivial* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$, *on a canoniquement*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(0,\infty')}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell) &= \overline{\mathbf{Q}}_\ell, \\ \mathcal{F}^{(\infty,0')}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell) &= \overline{\mathbf{Q}}\ (-1), \\ \mathcal{F}^{(\infty,\infty')}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell) &= 0. \end{aligned}$$

(ii) *Pour tout* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-*faisceau de Kummer non trivial* $\mathcal{K}_\chi$ *sur* $\mathbf{G}_{m,k} = \mathrm{Spec}(k[u, u^{-1}])$, *notons* V_χ (*resp.* V'_χ) *le* G-*module* $\mathcal{K}_\chi(\pi)$ (*resp.* G'-*module* $\mathcal{K}_\chi(\pi')$), *où* $\pi : \eta \to \mathbf{G}_{m,k}$ (*resp.* $\pi' : \eta' \to \mathbf{G}_{m,k}$) *est le morphisme qui envoie* π *sur* u (*resp.* π' *sur* u) (cf. (1.1.3.7)). *Alors, on a canoniquement*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\psi^{(0,\infty')}(\mathrm{V}_\chi) &= \mathrm{V}'_\chi \otimes \mathrm{G}(\chi, \psi), \\ \mathcal{F}_\psi^{(\infty,0')}(\mathrm{V}_\chi) &= \mathrm{V}'_\chi \otimes \mathrm{G}(\chi^{-1}, \psi), \\ \mathcal{F}_\psi^{(\infty,\infty')}(\mathrm{V}_\chi) &= 0, \end{aligned}$$

où

$$\mathrm{G}(\chi, \psi) = \mathrm{H}^1_c(\mathbf{G}_{m,\bar{k}}, \mathcal{K}_\chi \otimes \mathcal{L}_\psi)$$

est vu comme un G'-*module non ramifié.*

Preuve. — On a vu d'une part que

$$\mathscr{F}(\overline{\mathbf{Q}}_{\ell,\mathrm{A}}) = \overline{\mathbf{Q}}_{\ell,\{0'\}}(-1)\,[-1],$$
$$\mathscr{F}(\overline{\mathbf{Q}}_{\ell,\{0\}}) = \overline{\mathbf{Q}}_{\ell,\mathrm{A}'}[1],$$
$$\mathscr{F}_\psi(j_*\mathscr{K}_\chi(x)) = j'_*\mathscr{K}_{\chi^{-1}}(x') \otimes \mathrm{G}(\chi,\psi)$$

(cf. (1.2.3.1) et (1.4.3.2) (iii)) et d'autre part que, pour $\pi' : \eta' \to \eta_{0'}$, $\pi' \mapsto x'$,

$$\pi'^* \mathrm{R}^0\Phi_{\eta_{0'}}(\mathscr{F}(\overline{\mathbf{Q}}_{\ell,\mathrm{A}})) \simeq \mathscr{F}^{(\infty,0')}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$
$$\pi'^* \mathrm{R}^0\Phi_{\eta_{0'}}(\mathscr{F}_\psi(j_*\mathscr{K}_\chi(x))) \simeq \mathscr{F}_\psi^{(\infty,0')}(\mathscr{K}_\chi(\pi^{-1}))$$

et que, pour $\pi' : \eta' \to \eta_{\infty'}$, $\pi' \mapsto 1/x' = \widetilde{x}'$,

$$\pi'^*(\mathscr{F}(\overline{\mathbf{Q}}_{\ell,\mathrm{A}}) \mid \eta_{\infty'}) = \mathscr{F}^{(\infty,\infty')}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell),$$
$$\pi'^*(\mathscr{F}(\overline{\mathbf{Q}}_{\ell,\mathrm{A}-\{0\}}) \mid \eta_{\infty'}) = \mathscr{F}^{(0,\infty')}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell) \oplus \mathscr{F}^{(\infty,\infty')}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$
$$\pi'^*(\mathscr{F}_\psi(j_*\mathscr{K}_\chi(x)) \mid \eta_{\infty'}) \simeq \mathscr{F}_\psi^{(0,\infty')}(\mathscr{K}_\chi(\pi)) \oplus \mathscr{F}_\psi^{(\infty,\infty')}(\mathscr{K}_\chi(\pi^{-1}))$$

(cf. (2.3.2.1), (2.3.3.1) et (2.4.2.1)). On en déduit aussitôt l'assertion (2.5.3.1) (i) et les isomorphismes canoniques suivants

$$\mathscr{F}_\psi^{(\infty,0')}(\mathrm{V}_{\chi^{-1}}) \simeq \mathrm{V}'_{\chi^{-1}} \otimes \mathrm{G}(\chi,\psi)$$
$$\mathscr{F}_\psi^{(0,\infty')}(\mathrm{V}_\chi) \oplus \mathscr{F}_\psi^{(\infty,\infty')}(\mathrm{V}_{\chi^{-1}}) \simeq \mathrm{V}'_\chi \otimes \mathrm{G}(\chi,\psi).$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $\mathscr{F}_\psi^{(\infty,\infty')}(\mathrm{V}_\chi) = 0$, *i.e.* que

$$\mathrm{R}\Phi^1_{\overline{\eta}_{\infty'}}(\overline{\mathscr{K}}_\chi(\widetilde{x}) \otimes \overline{\mathscr{L}}_\psi(1/\widetilde{x}.\widetilde{x}'))_{(\overline{\infty},\overline{\infty}')} = 0,$$

où les cycles évanescents sont relatifs à la projection $\overline{\mathrm{pr}}' : (\mathrm{D}-\{0\}) \times_k \mathrm{D}'_{(\infty')} \to \mathrm{D}'_{(\infty')}$ et où $\overline{\mathscr{K}}_\chi(\widetilde{x})$ (resp. $\overline{\mathscr{L}}_\psi(1/\widetilde{x}.\widetilde{x}')$) est le prolongement par zéro à $(\mathrm{D}-\{0\}) \times_k \mathrm{D}'_{(\infty')}$ du $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang un $\mathscr{K}_\chi(\widetilde{x})$ (resp. $\mathscr{L}_\psi(1/\widetilde{x}.\widetilde{x}')$) sur $(\mathrm{D}-\{0,\infty\}) \times_k \mathrm{D}'_{(\infty')}$ (resp. $(\mathrm{D}-\{0,\infty\}) \times_k \eta_{\infty'}$) (on rappelle que $\widetilde{x} = 1/x$, $\widetilde{x}' = 1/x'$). Or, on peut factoriser $\overline{\mathrm{pr}}'$ en

$$(\mathrm{D}-\{0\}) \times_k \mathrm{D}'_{(\infty')} \xrightarrow{h} \mathbf{A}^1_k \times_k \mathrm{D}'_{(\infty')} \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathrm{D}'_{(\infty')}$$

où $\quad h(\widetilde{x},\widetilde{x}') = (\widetilde{x}.\widetilde{x}',\widetilde{x}')$

est une carte affine de l'éclatement de $\mathbf{A}^1_k \times_k \mathrm{D}'_{(\infty')}$ le long de $(0,\infty')$ et où, par suite, $h_{\eta_{\infty'}} : (\mathrm{D}-\{0\}) \times_k \eta_{\infty'} \to \mathbf{A}^1_k \times_k \eta_{\infty'}$ est un isomorphisme. De plus

$$(h_{\eta_{\infty'}})_*\,(\overline{\mathscr{K}}_\chi(\widetilde{x}) \otimes \overline{\mathscr{L}}_\psi(1/\widetilde{x}.\widetilde{x}')) \simeq \overline{\mathscr{K}}_\chi(y) \otimes \overline{\mathscr{L}}_\psi(1/y) \otimes \mathscr{K}_\chi(1/\widetilde{x}')$$

où maintenant $\overline{\mathscr{K}}_\chi(y)$ et $\overline{\mathscr{L}}_\psi(1/y)$ sont les prolongements par zéro à $\mathbf{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[y])$ de $\mathscr{K}_\chi(y)$ et $\mathscr{L}_\psi(1/y)$ sur $\mathbf{A}^1_k - \{0\}$. On remarque enfin que (∞,∞') est un point de non locale acyclicité isolé dans $h^{-1}((0,\infty')) = (\mathrm{D}-\{0\}) \times \{\infty'\}$ pour $\overline{\mathrm{pr}}'$ relativement à $\overline{\mathscr{K}}_\chi(\widetilde{x}) \otimes \overline{\mathscr{L}}_\psi(1/\widetilde{x}.\widetilde{x}')$ (cf. (1.3.1.2)) et que pr_2 est universellement localement acyclique relativement à $\overline{\mathscr{K}}_\chi(y) \otimes \overline{\mathscr{L}}_\psi(1/y) \otimes \overline{\mathscr{K}}_\chi(1/\widetilde{x}')$, où $\overline{\mathscr{K}}_\chi(1/\widetilde{x}')$ est le prolongement par zéro de $\mathscr{K}_\chi(1/\widetilde{x}')$ à $\mathrm{D}'_{(\infty')}$ (cf. [SGA 4 ½] [Th. Finitude] (2.16)). Par suite la nullité de $\mathscr{F}_\psi^{(\infty,\infty')}(V_\chi)$ et l'assertion (2.5.3.1) (ii) résultent du lemme suivant, appliqué à

$$f := \overline{\mathrm{pr}}', \quad g := \mathrm{pr}_2, \quad h := h, \quad x := (\infty, \infty')$$

et $$K := \mathscr{K}_\chi(\tilde{x}) \otimes \mathscr{L}_\psi(1/\tilde{x}.\tilde{x}') \mid (D - \{0\}) \times_k \eta_{\infty'} :$$

Lemme **(2.5.3.2)**. — *Soient* (S, s, η) *un trait strictement hensélien,*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

un triangle commutatif de morphismes séparés de type fini, x un point fermé de X_s d'image y dans Y_s et $K \in \mathrm{ob}\, D_c^b(X_\eta, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. On suppose que h est compactifiable, que $h_\eta : X_\eta \to Y_\eta$ est propre et que x est un point isolé dans $h^{-1}(y) = X_y$ de l'intersection du support de $R\Psi_{\bar\eta}(K)$ avec X_y. Alors, pour tout point géométrique $\bar{x}$ localisé en x d'image $\bar{y}$ dans Y, $R\Psi_{\bar\eta}(K)_{\bar x}$ est facteur direct de $R\Psi_{\bar\eta}(Rh_{\eta *} K)_{\bar y}$ dans $D_c^b(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

Preuve. — On peut supposer h propre et alors $R\Psi_{\bar\eta}(Rh_{\eta *} K) = Rh_{s*} R\Psi_{\bar\eta}(K)$ ([SGA 7] XIII (2.1.7.1)), d'où $R\Psi_{\bar\eta}(Rh_{\eta *} K)_{\bar y} = R\Gamma(X_{\bar y}, R\Psi_{\bar\eta}(K))$. Or $R\Psi_{\bar\eta}(K)_{\bar x}$ est facteur direct de $R\Gamma(X_{\bar y}, R\Psi_{\bar\eta}(K))$ par hypothèse, d'où la conclusion.

(2.5.4) Montrons que $\mathscr{F}^{(\infty,0')}(V) = 0$ pour $V \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}_{[1,\infty[}$ et que $\mathscr{F}^{(\infty,\infty')}(V) = 0$ pour $V \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}_{[0,1]}$.

Dans les deux cas, il existe, d'après (2.2.2.2), un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau F lisse sur $A - \{0\}$, modérément ramifié en 0 et tel que

$$\pi^* F \simeq V$$

où $\pi : \eta \to A - \{0\}$ est le k-morphisme qui envoie π sur $1/x$.

La nullité de $\mathscr{F}^{(\infty,0')}(V)$ pour $V \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}_{[1,\infty[}$ résulte alors de (2.3.2.3) (ii) et (2.4.2.1) (ii).

Pour $V \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}_{[0,1]}$, on a, d'après (2.3.1.1) (i),

$$r(\mathscr{F}(j_! F)) = a_0(j_! F) = r(F \mid \eta_0)$$

où $j : A - \{0\} \hookrightarrow A$ est l'inclusion, et la nullité de $\mathscr{F}^{(\infty,\infty')}(V)$ dans ce cas résulte alors de (2.3.3.1) (iii), (2.4.2.1) et (2.5.3) par un comptage de dimensions.

(2.5.5) Terminons maintenant la preuve des assertions (i) b), (ii) b) et (iii) b) de (2.4.3).

Soient $V \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}$ et F un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur $A - \{0\}$, modérément ramifié en ∞ et tel que

$$\pi^* F \simeq V$$

(où $\pi : \eta \to A - \{0\}$ est le k-morphisme qui envoie π sur x) (cf. (2.2.2.2)). On a, d'après (2.3.1.3) (i),

$$r(\mathscr{F}(j_! F)) = a_0(j_! F) = r(V) + s(V),$$

où $j : A - \{0\} \hookrightarrow A$ est l'inclusion, et on a, d'après (2.3.3.1) (iii), (2.4.2.1) (ii) et (iii) et (2.5.3),

$$\pi'^*(\mathscr{F}(j_! F) \mid \eta_{\infty'}) \simeq \mathscr{F}^{(0,\infty')}(V)$$

(pour $\pi' : \eta' \to \eta_{\infty'}$, $\pi' \mapsto 1/x' = \tilde{x}'$) de sorte que l'on a

$$r(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(V)) = r(V) + s(V).$$

D'autre part, on sait que $\mathscr{F}(j_! F) \mid A' - \{0'\}$ est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse (de rang $r(V) + s(V)$), placé en degré 0 (cf. (2.3.1.3) (i)), que $r_{0'}(\mathscr{F}(j_! F)) = s(V)$ (cf. (2.3.1.3) (i)) et que $\mathscr{F}(j_! F) \mid \eta_{0'}$ est modérément ramifié (cf. (2.3.2.1), (2.4.2.1) et (2.5.3)). Par suite, comme

$$R\Gamma_c(A' \otimes_k \bar{k}, \mathscr{F}(j_! F)) = 0$$

par involutivité de la transformation de Fourier-Deligne et changement de base propre, la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič implique que

$$s(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(V)) = s(V)$$

et (2.4.3) (i) b) est démontré.

Soient $V \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}_{[0,1[}$ (resp. $V \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}_{]1,\infty]}$) et F un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur $A - \{0\}$, modérément ramifié en 0 et tel que

$$\pi^* F \simeq V$$

(où $\pi : \eta \to A - \{0\}$ est maintenant le k-morphisme qui envoie π sur $\tilde{x} = 1/x$) (cf. (2.2.2.2)). On a, d'après (2.3.1.3) (i) (resp. (ii)),

$$r(\mathscr{F}(j_! F)) = r(V)$$

et $$r_0(\mathscr{F}(j_! F)) = s(V)$$

(resp. $$r(\mathscr{F}(j_! F)) = s(V)),$$

où $j : A - \{0\} \hookrightarrow A$ est l'inclusion, et on a, d'après (2.3.2.1) (iii) (resp. (2.3.3.1) (iii)) et (2.4.2.1) (i) (resp. (ii) et (iii)),

$$\pi'^* R^0 \Phi_{\eta_{0'}}(\mathscr{F}(j_! F)) \simeq \mathscr{F}^{(\infty,0')}(V)$$

(resp. $$\pi'^*(\mathscr{F}(j_! F) \mid \eta_{\infty'}) \simeq \mathscr{F}^{(0,\infty')}(F \mid \eta_0) \oplus \mathscr{F}^{(\infty,\infty')}(V))$$

(pour $\pi' : \eta' \to \eta_{0'}$, $\pi' \mapsto x'$ (resp. $\pi' : \eta' \to \eta_{\infty'}$, $\pi' \mapsto 1/x' = \tilde{x}'$)) de sorte que l'on a

$$r(\mathscr{F}^{(\infty,0')}(V)) = r(V) - s(V)$$

(resp. $$r(\mathscr{F}^{(\infty,\infty')}(V)) = s(V) - r(V),$$

d'après (2.5.3)). D'autre part, on sait que $\mathscr{F}(j_! F) \mid A' - \{0'\}$ (resp. $\mathscr{F}(j_! F)$) est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse (de rang $r(V)$ (resp. $s(V)$)), placé en degré 0 (cf. (2.3.1.3) (i) (resp. (ii))) et que $\mathscr{F}(j_! \mathrm{F}) \mid \eta_{\infty'}$ (resp. $\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\mathrm{F} \mid \eta_0)$) est modérément ramifié (cf. (2.3.3.1) (iii), (2.4.2.1) (ii) et (iii), (2.5.3) et (2.5.4) (resp. (2.5.3))). Par suite, comme

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\mathrm{A}' \otimes_k \bar{k}, \mathscr{F}(j_! \mathrm{F})) = 0$$

par involutivité de la transformation de Fourier-Deligne et changement de base propre, la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič implique que

$$s(\mathscr{F}^{(\infty,0')}(\mathrm{V})) = s(\mathrm{V})$$

(resp. $\qquad s(\mathscr{F}^{(\infty,\infty')}(\mathrm{V})) = s(\mathrm{V})$)

et (2.4.3) (ii) b) (resp. (iii) b)) est démontré.

(2.5.6) Définissons un isomorphisme fonctoriel

$$a^* \mathscr{F}^{(\infty',0)} \circ \mathscr{F}^{(0,\infty')}(\mathrm{V})\ (1) \simeq \mathrm{V}$$

pour $\mathrm{V} \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}$. Pour cela, considérons le prolongement canonique F de $\pi_* \mathrm{V}$ à $\mathrm{A} - \{0\}$ (où $\pi : \eta \to \eta_0$ est le k-morphisme qui envoie π sur x) (cf. (2.2.2.2)). Alors, par involutivité de la transformation de Fourier-Deligne on a un isomorphisme fonctoriel en F et donc en V

$$a^* \mathscr{F}' \circ \mathscr{F}(j_! \mathrm{F})\ (1) \simeq j_! \mathrm{F}$$

où $j : \mathrm{A} - \{0\} \hookrightarrow \mathrm{A}$ est l'inclusion (cf. (1.2.2.3)). Or, d'après (2.3.2.1) et (2.4.2.1) (ii), on a

$$\pi^* \mathrm{R}\Phi^0_{\eta_0}(\mathscr{F}'(\mathscr{F}(j_! \mathrm{F}))) \simeq \mathscr{F}^{(\infty',0)}(\pi'^*(\mathscr{F}(j_! \mathrm{F}) \mid \eta_{\infty'}))$$

(où $\pi' : \eta' \to \eta_{\infty'}$, $\pi' \mapsto 1/x' = \tilde{x}'$) et, d'après (2.3.3.1), (2.4.2.1) (i) et (iii) et (2.5.3), on a

$$\pi'^*(\mathscr{F}(j_! \mathrm{F}) \mid \eta_{\infty'}) \simeq \mathscr{F}^{(0,\infty')}(\mathrm{V}).$$

D'où l'isomorphisme cherché.

On construit de manière analogue des isomorphismes fonctoriels

$$a^* \mathscr{F}^{(0',\infty)} \circ \mathscr{F}^{(\infty,0')}(\mathrm{V})\ (1) \simeq \mathrm{V}$$

pour $\mathrm{V} \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}_{[0,1[}$ et

$$a^* \mathscr{F}^{(\infty',\infty)} \circ \mathscr{F}^{(\infty,\infty')}(\mathrm{V})\ (1) \simeq \mathrm{V}$$

pour $\mathrm{V} \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}_{]1,\infty[}$.

Les assertions (2.4.3) (i) c), (ii) c) et (iii) c) sont conséquence immédiate de l'existence de ces isomorphismes et des isomorphismes qu'on en déduit en échangeant les rôles de T et T'.

(2.5.7) Un argument parallèle à celui de (2.5.6) permet de déduire les assertions (2.4.3) (i) d), (ii) d) et (iii) d) de la commutation à la dualité de la transformation de Fourier-Deligne (cf. (1.3.2.2)). Les détails sont laissés au lecteur.

(2.6) *Transformations de Fourier locales : applications et exemples.*

(2.6.1) Supposons k algébriquement clos et soit $f: T_1 \to T$ un revêtement fini, galoisien de groupe de Galois H, de traits strictement henséliens, d'égale caractéristique p, à corps résiduel k. Le groupe fini H est le quotient du groupe de Galois G de T par le groupe de Galois G_1 de T_1.

Le *caractère d'Artin de* H est la fonction centrale $a_H : H \to \mathbf{Z}$ définie par

$$a_H(h) = \begin{cases} -\, v_1(h(\pi_1) - \pi_1) & \text{si } h \neq 1 \\ -\sum\limits_{h' \neq 1} a_H(h') & \text{si } h = 1 \end{cases}$$

où π_1 est une uniformisante de T_1 et v_1 la valuation discrète de T_1 (normalisée par $v_1(\pi_1) = 1$) (cf. [Se 1] VI, § 2). La fonction centrale a_H est en fait le caractère d'une représentation linéaire de H (cf. *loc. cit.*, Thm. 1) et Serre a montré que cette représentation peut être définie sur $\mathbf{Q}_\ell$ ($\ell \neq p$) (cf. [Se 4] Thm. 2 ou [Se 2] (19.2), Thm. 44). Ces résultats sont des énoncés d'existence : ils ne donnent pas de réalisation explicite de la représentation d'Artin. Dans [We 2] (voir aussi [Se 1] VI, § 4), Weil pose le problème de trouver une réalisation explicite de Art_H. Comme me l'a fait remarquer Deligne, $\mathscr{F}^{(0,\infty')}$ donne une solution à ce problème (pour une autre solution basée sur le prolongement canonique de (2.2.2.2) et la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič, voir [Ka 2] (1.6)).

Fixons donc une uniformisante π de T et soient (T', π') et $\mathscr{F}^{(0,\infty')} : \mathscr{G} \to \mathscr{G}'_{[0,1[}$ comme en (2.4). Notons $\varepsilon_H : \overline{\mathbf{Q}}_\ell[H] \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell$ l'augmentation canonique $(\sum\limits_h \lambda_h . h \mapsto \sum\limits_h \lambda_h)$ et $\operatorname{Ker} \varepsilon_H$ son noyau. C'est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-vectoriel de dimension $| H | - 1$, muni de deux actions de H qui commutent entre elles, l'un à gauche et l'autre à droite (actions par translation). Composant l'action à gauche avec l'application quotient $G \twoheadrightarrow H$, on munit $\operatorname{Ker} \varepsilon_H$ d'une structure de G-module et H opère à droite sur ce G-module (en tant que $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau sur η, $\operatorname{Ker} \varepsilon_H$ n'est autre que $R\Phi^0_\eta(f_* \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ puisque $\operatorname{Ker} \varepsilon_H \simeq \overline{\mathbf{Q}}_\ell[H]/\overline{\mathbf{Q}}_\ell$, où $\overline{\mathbf{Q}}_\ell \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell[H]$, $\lambda \mapsto \sum\limits_h \lambda . h$). On peut alors former le G'-module $\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\operatorname{Ker} \varepsilon_H)$ et ce G'-module est muni naturellement (par fonctorialité de $\mathscr{F}^{(0,\infty')}$) d'une action à droite de H. On posera

$$\mathrm{Art}_H = \mathscr{F}^{(0,\infty')}(\operatorname{Ker} \varepsilon_H)$$

vu comme H-module à droite (on oublie la structure de G'-module).

Théorème **(2.6.1)**. — Art_H *a pour caractère* a_H *et est donc une réalisation sur* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ (*rationnelle sur* $\mathbf{Q}_\ell(\psi(1))$, *où* $\psi : \mathbf{F}_p \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ *est le caractère additif non trivial utilisé pour construire* $\mathscr{F}^{(0,\infty')}$) *de la représentation d'Artin de* H.

Preuve. — Pour tout $\overline{\mathbf{Q}}_\ell[H]$-module à gauche V, on a, d'après (2.4.3) (i) b),

$$r(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\operatorname{Ker} \varepsilon_H \otimes_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell[H]} V)) = r(\operatorname{Ker} \varepsilon_H \otimes_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell[H]} V) + s(\operatorname{Ker} \varepsilon_H \otimes_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell[H]} V).$$

Or,

$$r(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\operatorname{Ker} \varepsilon_{\mathrm{H}} \otimes_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell[\mathrm{H}]} \mathrm{V})) = \dim_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}(\operatorname{Art}_{\mathrm{H}} \otimes_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell[\mathrm{H}]} \mathrm{V}),$$

$$r(\operatorname{Ker} \varepsilon_{\mathrm{H}} \otimes_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell[\mathrm{H}]} \mathrm{V}) = \frac{1}{|\mathrm{H}|} \sum_{h \neq 1} (\operatorname{Tr}(1, \mathrm{V}) - \operatorname{Tr}(h, \mathrm{V}))$$

et

$$s(\operatorname{Ker} \varepsilon_{\mathrm{H}} \otimes_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell[\mathrm{H}]} \mathrm{V}) = \frac{1}{|\mathrm{H}|} \sum_{h} s_{\mathrm{H}}(h) \operatorname{Tr}(h, \mathrm{V}),$$

où

$$s_{\mathrm{H}}(h) = \begin{cases} 1 - v_1(h(\pi_1) - \pi_1) & \text{si } h \neq 1 \\ -\sum\limits_{h' \neq 1} s_{\mathrm{H}}(h') & \text{si } h = 1 \end{cases}$$

(cf. [Se 2] (19.2)), d'où

$$\dim_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}(\operatorname{Art}_{\mathrm{H}} \otimes_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell[\mathrm{H}]} \mathrm{V}) = \frac{1}{|\mathrm{H}|} \sum_{h} a_{\mathrm{H}}(h) \operatorname{Tr}(h, \mathrm{V})$$

et la conclusion.

(2.6.2) Dans ce numéro, on suppose que $k = \mathbf{F}_q$ et que T est un trait hensélien, d'égale caractéristique p, à corps résiduel k. Comme me l'a fait remarquer Kazhdan, les transformations de Fourier locales permettent de construire les G-modules irréductibles primitifs.

Rappelons qu'un G-module irréductible V est dit *induit* (par un G_1-module V_1) s'il existe une extension finie séparable non triviale $\eta_1 \xrightarrow{f} \eta$ et un G_1-module (irréductible) V_1 tel que V soit isomorphe à $f_* \mathrm{V}_1$. Les G-modules irréductibles non induits, appelés encore *primitifs*, sont les pièces de base dans la classification des G-modules irréductibles : en effet tout G-module irréductible est clairement induit par un G_1-module irréductible primitif. Rappelons aussi que, si V est un G-module irréductible primitif, le P-module sous-jacent est encore irréductible (P est la partie sauvage du groupe d'inertie $\mathrm{I} \subset \mathrm{G}$), par conséquent, le rang de V est une puissance de p (cf. [Ko 2] (2.2)); en particulier, tout G-module irréductible de rang premier à p est *monomial*, *i.e.* induit par un G_1-module V_1 de rang 1, pour $\eta_1 \xrightarrow{f} \eta$ de degré $r(\mathrm{V})$.

Nous allons illustrer la construction des G-modules irréductibles primitifs V par transformation de Fourier locale dans le cas particulier suivant : V satisfait

(2.6.2.1) $$\begin{cases} r(\mathrm{V}) = p^n & \text{pour un entier } n \geqslant 1 \\ s(\mathrm{V}) = 1. \end{cases}$$

La première remarque est que :

Lemme **(2.6.2.2)**. — *Tout* G-*module irréductible* V *vérifiant* (2.6.2.1) *est primitif.*

Preuve. — On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une extension finie séparable non triviale $\eta_1 \xrightarrow{f} \eta$ et un G_1-module irréductible V_1 tel que $\mathrm{V} \simeq f_* \mathrm{V}_1$. Si k_1

est le corps résiduel du normalisé de T dans η_1, k_1/k est une extension finie galoisienne ($\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ est abélien) et on peut factoriser f en

$$\eta_1 \xrightarrow{f'} \eta \otimes_k k_1 \xrightarrow{g} \eta$$

où $\eta \otimes_k k_1 \xrightarrow{g} \eta$ est l'extension non ramifiée associée à k_1/k.

Montrons tout d'abord que $k_1 = k$. En effet, on a $V \simeq g_* f'_* V_1$, de sorte que

$$s(V) = [k_1 : k]\, s(f'_* V_1),$$

et, comme $s(V) = 1$, cela implique que $[k_1 : k] = 1$.

Maintenant, d'après [Se 1] VI, § 2, on a

$$s(V) = s(V_1) + r(V_1)\, s(f_* \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

et donc $s(V) = 1$ implique soit $s(f_* \overline{\mathbf{Q}}_\ell) = 0$ et $s(V_1) = 1$, soit $s(V_1) = 0$, $r(V_1) = 1$ et $s(f_* \overline{\mathbf{Q}}_\ell) = 1$.

Le premier cas est clairement impossible puisque le degré de η_1/η est une puissance non triviale de p (ce degré divise $r(V)$ et est non trivial par hypothèse). Il reste donc à montrer que le second cas mène à une contradiction. Or, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, hook] & I_1 \arrow[r] \arrow[d, hook] & I_1/P_1 \arrow[r] \arrow[d, hook] & 1 \\
1 \arrow[r] & P \arrow[r] & I \arrow[r] & I/P \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes et les flèches verticales sont injectives ($P_1 \subset P$ car P_1 est un sous-pro-p-groupe de I et $P \cap I_1 \subset P_1$ car $P \cap I_1$ est un sous-pro-p-groupe de I_1, de sorte que $P_1 = P \cap I_1$). Par suite, comme l'indice de I_1 dans I, égal au degré de η_1 sur η ($k_1 = k$), est une puissance de p ($r(V) = p^n$), la flèche $I_1/P_1 \hookrightarrow I/P$ est un isomorphisme (I/P est un pro-groupe d'ordre premier à p). Il s'ensuit que $V_1 \simeq f^* W$ pour un G-module W modérément ramifié de rang 1. Ceci contredit l'irréductibilité de $V \simeq f_* f^* W$ puisque alors W est un sous-G-module de V. D'où le lemme.

Ceci étant, fixons une uniformisante π de T, et un autre trait hensélien, d'égale caractéristique p, à corps résiduel k, T', lui aussi muni d'une uniformisante π'. On dispose alors de la transformation de Fourier locale $\mathscr{F}^{(0,\infty')}$ qui induit une bijection entre les ensembles des classes d'isomorphie des modules suivants (cf. (2.4.3) (i)) :

— les G-modules irréductibles V avec $r(V) = p^n$ pour un entier $n \geqslant 1$ et $s(V) = 1$;
— les G'-modules irréductibles V' avec $r(V') = p^n + 1$ pour un entier $n \geqslant 1$ et $s(V') = 1$.

Or ces derniers G'-modules sont monomiaux puisque $(p^n + 1, p) = 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$, donc faciles à construire, d'où la construction cherchée des G-modules irréductibles primitifs avec $r(V) = p^n$ et $s(V) = 1$. Par exemple, si $q = p^2$, si $\eta'_1 \to \eta'$ est l'extension de Kummer définie par $\pi_1'^{p+1} = \pi'$ et si $V'_1 = \mathrm{L}_\psi(1/\pi'_1)$ (cf. (2.1.2.8)), on a $V' = f'_* V'_1$ qui est un G'-module irréductible avec $r(V') = p + 1$ et $s(V') = 1$, de sorte que $V = a^* \mathscr{F}^{(\infty', 0)}(V')$ (1) (cf. (2.4.3) (i) c)) est un G-module primitif de rang p et de conducteur de Swan 1.

Remarque **(2.6.2.3)**. — En utilisant les transformations de Fourier locales, il est aussi possible de démontrer la *conjecture de Langlands locale numérique* (cf. [Ko 1]) pour un corps local F d'égale caractéristique $p > 0$. C'est ce que vient de faire Henniart (cf. [He 2]). Son résultat précis est le suivant. Soient $n \geqslant 1$ et $j \geqslant 0$ deux entiers et soit $C_{n,j}$ le nombre des orbites sous l'action du groupe des caractères non ramifiés de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ de classes d'isomorphie de représentations σ complexes, continues et irréductibles de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ vérifiant : $r(\sigma)$ divise n, $s(\sigma)/r(\sigma) \leqslant j/n$ et la restriction de σ au groupe d'inertie de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ est encore irréductible. Alors

$$C_{n,j} = nq^j(q-1),$$

i.e. $C_{n,j}$ est égal au nombre des orbites sous l'action du groupe des caractères non ramifiés de $F^\times$ de classes d'isomorphie de représentations ρ complexes, admissibles, irréductibles et donc de dimension finie de $D_n^\times$ telles que $j(\rho) \leqslant j$ et que $\rho \mid \mathscr{D}_n^\times$ soit encore irréductible. On a noté D_n l'algèbre à division centrale sur F de degré réduit n et $\mathscr{D}_n^\times$ son groupe des unités. Si $F = \mathbf{F}_q((\pi))$, on a $D_n = \mathbf{F}_{q^n}((\tau))$ avec $\tau^n = \pi$ et $a.\tau = \tau.a^q$ pour tout $a \in \mathbf{F}_{q^n}$, on a $\mathscr{D}_n = \mathbf{F}_{q^n}[[\tau]]$ et le groupe des unités admet la filtration

$$\mathscr{D}_n^\times \supset 1 + \tau\mathbf{F}_{q^n}[[\tau]] \supset 1 + \tau^2\,\mathbf{F}_{q^n}[[\tau]] \supset \ldots;$$

une représentation comme ci-dessus est automatiquement triviale sur $1 + \tau^j\,\mathbf{F}_{q^n}[[\tau]]$ pour $j \gg 0$ et $j(\rho)$ est le plus grand entier j tel que

$$\rho \mid (1 + \tau^j\,\mathbf{F}_{q^n}[[\tau]]) \neq 1$$

(avec la convention $j(\rho) = 0$ si $\rho \mid (1 + \tau\mathbf{F}_{q^n}[[\tau]]) = 1$).

(2.6.3) Dans ce numéro, on suppose k algébriquement clos et on considère deux traits complets T et T', d'égale caractéristique $p > 0$, à corps résiduel k, munis d'uniformisantes π et π' respectivement.

Pour tout couple d'entiers $r, s \geqslant 1$, premiers à p, et toute série de Laurent en $\pi^{1/r}$ à coefficients dans k

$$\alpha(\pi) = \sum_{i=-s}^{\infty} a_i\,\pi^{i/r}$$

avec $a_{-s} \neq 0$, on note $L_\psi(\alpha(\pi))$ le G-module irréductible de rang r et de conducteur de Swan s défini comme suit : soit $\eta_1 \xrightarrow{f} \eta$ l'extension finie galoisienne modérément ramifiée donnée par $\pi_1^r = \pi$, alors $L_\psi(\alpha(\pi_1^r))$ est un G_1-module de rang 1 et de conducteur de Swan s (cf. (2.1.2.8)) et on pose

$$L_\psi(\alpha(\pi)) = f_*\,L_\psi(\alpha(\pi_1^r)).$$

Des calculs classiques de développements asymptotiques liés à la phase stationnaire et qui m'ont été expliqués par Malgrange, suggèrent, pour $p \gg r, s$, la méthode suivante pour calculer les transformés de Fourier locaux de $L_\psi(\alpha(\pi))$. Supposons, tout d'abord, que $s > r$ et que l'on veuille calculer

$$\mathscr{F}_\psi^{(\infty,\infty')}(L_\psi(\alpha(\pi)));$$

alors, on élimine la variable π du système d'équation suivant, où $\alpha'(\pi')$ est l'inconnue

$$\begin{cases} \alpha(\pi) + \dfrac{1}{\pi\pi'} = \alpha'(\pi') \\ \dfrac{d\alpha}{d\pi}(\pi) - \dfrac{1}{\pi^2\,\pi'} = 0 \end{cases}$$

et on obtient une série de Laurent en $\pi^{1/r'}$ à coefficients dans k

$$\alpha'(\pi') = \sum_{i=-s'}^{\infty} a'_i\,\pi^{i/r'}$$

avec $r' = r - s$ et $s' = s$; $\mathscr{F}_\psi^{(\infty,\infty')}(L_\psi(\alpha(\pi)))$ doit être isomorphe à $L_\psi(\alpha'(\pi'))$. Pour $\mathscr{F}_\psi^{(0,\infty')}(L_\psi(\alpha(\pi)))$ (resp. $s < r$ et $\mathscr{F}_\psi^{(\infty,0')}(L_\psi(\alpha(\pi)))$) la méthode est la même à cela près qu'il faut remplacer $\dfrac{1}{\pi\pi'}$ et $-\dfrac{1}{\pi^2\pi'}$ par $\dfrac{\pi}{\pi'}$ et $\dfrac{1}{\pi'}$ $\left(\text{resp. } \dfrac{\pi'}{\pi} \text{ et } -\dfrac{\pi'}{\pi^2}\right)$ dans le système d'équations ci-dessus.

Pour $r = 1$ et $(s, p) = (s - 1, p) = 1$, Katz a vérifié effectivement que $\mathscr{F}_\psi^{(\infty,\infty')}(L_\psi(\alpha(\pi)))$ est bien donné par la règle ci-dessus (cf. [Ka 4]).

(2.7) *Produit de convolution (additive) local et transformations de Fourier locales.*

(2.7.1) Le produit de convolution pour $A = \mathrm{Spec}(k[x])$,

$$* : D_c^b(A, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \times D_c^b(A, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D_c^b(A, \overline{\mathbf{Q}}_\ell),$$

(cf. (1.2.2.6)) admet une variante locale.

Soit T un trait hensélien d'égale caractéristique p, à corps résiduel k, *muni d'une uniformisante* π. On a alors le diagramme de k-morphismes

$$\begin{tikzcd} T & (T \times_k T)_{(t,t)} \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\pi\times\pi"] & T \\ & (A \times_k A)_{(0,0)} \arrow[d, "s"] & \\ & A_{(0)} & \\ & T \arrow[u, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

où $s : A \times_k A \to A$ est la loi d'addition, et, pour $V_1, V_2 \in \mathrm{ob}\,\mathscr{G}$, on peut former les cycles évanescents

$$R\Phi_{\eta_0}(\mathrm{pr}_1^*(V_{1!}) \otimes \mathrm{pr}_2^*(V_{2!}))$$

dans $D^b_c((s\circ(\pi\times\pi))^{-1}(0)\times_k \eta_0, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, relatifs à $s\circ(\pi\times\pi):(T\times_k T)_{(t,t)}\to A_{(0)}$ (cf. [SGA 7] XIII (2.1.1)), où $V_{1!}$ et $V_{2!}$ sont les prolongements par zéro à T tout entier des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux V_1 et V_2 sur η.

Lemme **(2.7.1.1).** — *Soient* F_1, F_2 *deux* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceaux lisses sur* $A-\{0\}$, *modérément ramifiés à l'infini de* A. *On note* $j: A-\{0\}\hookrightarrow A$ *l'inclusion. Alors :*

(i) $(j_! F_1) * (j_! F_2) \in \operatorname{ob} D^b_c(A, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *est à cohomologie lisse sur* $A-\{0\}$ *et modérément ramifiée à l'infini de* A,

(ii) $R\Phi_{\eta_0}((j_! F_1) * (j_! F_2)) \in \operatorname{ob} D^b_c(\eta_0, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *n'a de cohomologie qu'en degré* 1,

(iii) *les cycles évanescents*

$$R\Phi_{\eta_0}((j_! F_1)\boxtimes_k (j_! F_2)) \in \operatorname{ob} D^b_c(s^{-1}(0)\times_k \eta_0, \overline{\mathbf{Q}}_\ell),$$

relatifs à $s: A\times_k A\to A$ (cf. [SGA 7] XIII (2.1.1)), *sont concentrés au point fermé* (0, 0) *de* $s^{-1}(0)$ *et en degré* 1 *et on a un isomorphisme bifonctoriel en* F_1, F_2

$$R\Phi^1_{\bar\eta_0}((j_! F_1)\boxtimes_k (j_! F_2))_{(\bar 0,\bar 0)} \simeq R\Phi^1_{\bar\eta_0}((j_! F_1) * (j_! F_2))$$

de G_0*-modules.*

Preuve. — Pour prouver (i) et (ii), utilisons la transformation de Fourier-Deligne $\mathscr{F}: D^b_c(A, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)\to D^b_c(A', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. On a vu (cf. (2.3.1.3), (2.3.2.1), (2.3.3.1), (2.4.2.1) et (2.4.3) (i) b) et (ii) b)) que $\mathscr{F}(j_! F_i)\mid A'-\{0'\}$ est à cohomologie lisse et concentrée en degré 0, que $\mathscr{H}^0(\mathscr{F}(j_! F_i)_{\bar\eta_{0'}})$ est modérément ramifié et que $\mathscr{H}^0(\mathscr{F}(j_! F_i)_{\bar\eta_{\infty'}})$ a toutes ses pentes <1 $(i=1,2)$. Par suite

$$(\mathscr{F}(j_! F_1)\otimes \mathscr{F}(j_! F_2))\mid A'-\{0'\}$$

est aussi à cohomologie lisse et concentrée en degré 0, $\mathscr{H}^0((\mathscr{F}(j_! F_1)\otimes \mathscr{F}(j_! F_2))_{\bar\eta_{0'}})$ est aussi modérément ramifié et $\mathscr{H}^0((\mathscr{F}(j_! F_1)\otimes \mathscr{F}(j_! F_2))_{\bar\eta_{\infty'}})$ a aussi toutes ses pentes <1 (avec les notations de (2.1.2), si W_1 et W_2 sont deux P-modules simples, on a trivialement $\Lambda(W_1\otimes W_2)\subset[0, \operatorname{Sup}(\lambda(W_1), \lambda(W_2))]$ car $I^{(\lambda)}$ agit trivialement sur W_1 et W_2 et donc sur $W_1\otimes W_2$ si $\lambda > \operatorname{Sup}(\lambda(W_1), \lambda(W_2))$). Or, d'après (1.2.2.7) et l'involutivité de la transformation de Fourier-Deligne, on a

$$(j_! F_1) * (j_! F_2) = a^* \mathscr{F}'(\mathscr{F}(j_! F_1)\otimes \mathscr{F}(j_! F_2))(1)[-1]$$

et, comme on peut dévisser $\mathscr{F}(j_! F_1)\otimes \mathscr{F}(j_! F_2)$ dans $D^b_c(A', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ en

$$j'_! j'^*(\mathscr{F}(j_! F_1)\otimes \mathscr{F}(j_! F_2))$$

et en un objet à support $\{0'\}$ (on a noté $j': A'-\{0'\}\hookrightarrow A'$ l'inclusion), les assertions (i) et (ii) résultent de ce qui précède, de (2.3.2.3) (i), (1.4.2.1) et de (2.3.3.1) (iii), (2.4.3) (i) b) et (iii) b).

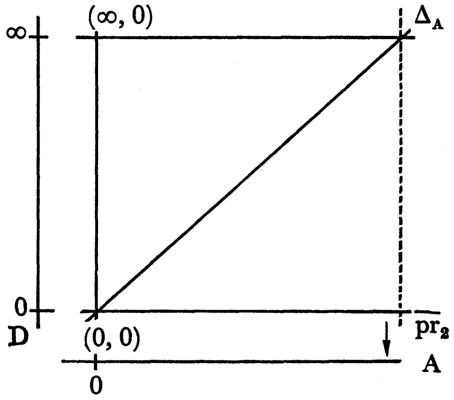
Pour prouver (iii), on commence par compactifier $s : A \times_k A \to A$ en

$$\begin{tikzcd} A \times_k A \arrow[r, "(\mathrm{id}, s)", "\sim"'] \arrow[dr, "s"'] & A \times_k A \arrow[r, hook, "\alpha \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & D \times_k A \arrow[dl, "\overline{\mathrm{pr}}_2"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau

$$(\alpha \times \mathrm{id})_! \, (\mathrm{id}, s)_! \, (\mathrm{pr}_1^* j_! \, F_1 \otimes \mathrm{pr}_2^* j_! \, F_2)$$

est lisse sur $D \times_k A - (\Delta_A \cup \{0, \infty\} \times_k A)$, où Δ_A est la diagonale de $A \times_k A$, et il est modérément ramifié le long de $\{\infty\} \times_k A$



Par suite les cycles évanescents

$$R\Phi_{\eta_0}((\alpha \times \mathrm{id})_! \, (\mathrm{id}, s)_! \, (\mathrm{pr}_1^* j_! \, F_1 \otimes \mathrm{pr}_2^* j_! \, F_2))$$

relatifs à la projection $\overline{\mathrm{pr}}_2 : D \times_k A_{(0)} \to A_{(0)}$ sont concentrés en $(0, 0)$ ([SGA 7] XIII (2.1.5) et (2.1.11)) et, d'après [SGA 7] XIII (2.1.8.9), on a

$$R\Phi_{\bar{\eta}_0}((j_! \, F_1) \boxtimes_k (j_! \, F_2))_{(\bar{0}, \bar{0})} \simeq R\Phi_{\bar{\eta}_0}((j_! \, F_1) * (j_! \, F_2))$$

d'où l'assertion (iii).

Remarque **(2.7.1.2)**. — Pour une démonstration de (2.7.1.1) qui n'utilise pas la transformation de Fourier-Deligne, voir [De 2] et [Lau 1] 7.

Corollaire **(2.7.1.3)**. — *Pour tous* $V_1, V_2 \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}$, *les cycles évanescents*

$$R\Phi_{\eta_0}(\mathrm{pr}_1^*(V_{1!}) \otimes \mathrm{pr}_2^*(V_{2!}))$$

sont concentrés en (t, t) *et en degré* 1.

Preuve. — Compte tenu de (2.2.2.2), ce corollaire résulte aussitôt de (2.1.7.1.1) (iii).

Définition (2.7.2). — *Pour* $V_1, V_2 \in \operatorname{ob} \mathscr{G}$, *on appellera produit de convolution (additive) local de* V_1 *et* V_2 *le* G-*module*

$$\pi^* \, R\Phi^1_{\bar\eta_0}(\mathrm{pr}_1^*(V_{1!}) \otimes \mathrm{pr}_2^*(V_{2!})).$$

On a donc un foncteur

$$(-) * (-) : \mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathscr{G}$$

et il résulte aussitôt de (2.1.7.3) que ce foncteur est exact en chacun de ses arguments. On laisse le soin au lecteur de formuler et de démontrer des énoncés de commutativité et d'associativité pour ce produit de convolution ainsi que le fait que le G-module trivial $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ est une unité.

Proposition (2.7.2.1). — *Soient* $V_1, V_2 \in \operatorname{ob} \mathscr{G}$. *Alors*

$$r(V_1 * V_2) = r(V_1)\, r(V_2) + r(V_1)\, s(V_2) + s(V_1)\, r(V_2) - s(V_1 \otimes [-1]^* V_2)$$

et

$$s(V_1 * V_2) = s(V_1)\, s(V_2) + s(V_1 \otimes [-1]^* V_2),$$

où $[-1] : \eta \to \eta$ *est le* k-*automorphisme de* η *induit par* $\pi \mapsto -\pi$. *En particulier*

$$r(V_1 * V_2) + s(V_1 * V_2) = (r(V_1) + s(V_1))\,(r(V_2) + s(V_2)).$$

Preuve. — On utilise un argument global basé sur (2.2.2.2). Avec les notations de (2.1.7.1), on a, pour $V_i \simeq \pi^*(F_i \mid \eta_0)$ $(i = 1, 2)$,

$$V_1 * V_2 \simeq \pi^* \, R\Phi^1_{\bar\eta_0}((j_! \, F_1) * (j_! \, F_2))$$

et les autres $R\Phi^i_{\bar\eta_0}$ $(i \neq 1)$ sont nuls. Par suite on a

$$r(V_1 * V_2) = r_0(K) - r(K),$$
$$s(V_1 * V_2) = -\, s_0(K),$$

où on a posé $K = (j_! \, F_1) * (j_! \, F_2)$. Or, d'après la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič, on a

$$r_0(K) = -\, s(V_1 \otimes [-1]^* V_2)$$
$$r(K) = -\, r(V_1)\, r(V_2) - r(V_1)\, s(V_2) - s(V_1)\, r(V_2)$$

et

$$\chi_c(A \otimes_k \bar k, K) = r_0(K) - s_0(K)$$

(on utilise la compactification de $A \times_k A$ introduite dans la preuve de (2.7.1.1) pour les deux premières formules et l'assertion (2.7.1.1) (i) pour la dernière). Enfin

$$\chi_c(A \otimes_k \bar k, K) = \chi_c(A \otimes_k \bar k, j_! \, F_1) \,.\, \chi_c(A \otimes_k \bar k, j_! \, F_2)$$

(suite spectrale de Leray et formule de Künneth pour la cohomologie étale, cf. [SGA 4]) et donc

$$\chi_c(A \otimes_k \bar k, K) = (-\, s(V_1)) \,.\, (-\, s(V_2)) = s(V_1) \,.\, s(V_2)$$

(une nouvelle application de la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič).

Proposition **(2.7.2.2).** — *Avec les notations de* (2.4.3), *on a* :

(i) *un isomorphisme fonctoriel en* $(V_1, V_2) \in \mathrm{ob}(\mathscr{G} \times \mathscr{G})$

$$\mathscr{F}^{(0,\infty')}(V_1 * V_2) \simeq \mathscr{F}^{(0,\infty')}(V_1) \otimes \mathscr{F}^{(0,\infty')}(V_2)$$

de G'-modules,

(ii) *un isomorphisme fonctoriel en* $(V_1, V_2) \in \mathrm{ob}(\mathscr{G}_{[0,1[} \times \mathscr{G}_{[0,1[})$

$$\mathscr{F}^{(\infty,0')}(V_1 \otimes V_2) \simeq \mathscr{F}^{(\infty,0')}(V_1) * \mathscr{F}^{(\infty,0')}(V_2)$$

de G'-modules.

Preuve. — D'après (2.4.3) (i) c) et (ii) c), il suffit de montrer l'assertion (i). Pour cela on utilise l'existence du prolongement canonique, (2.7.1.1), (1.2.2.7) et (2.4.2.1) (i).

3. Formules du produit pour la constante de l'équation fonctionnelle des fonctions L

(3.1) *Fonctions* L *et constantes locales* : *rappels* ([Gr], [SGA 5] XV, [SGA 4 ½] [Rapport], [De 1], [De 2] et [Go-Ja]).

(3.1.1) Soient X une courbe projective et lisse sur le corps fini $\mathbf{F}_q$ et $K \in \mathrm{ob}\, D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. La *fonction* L *de Grothendieck* associée à (X, K) est par définition la série formelle (à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$) développement du produit infini

$$L(X, K; t) = \prod_{x \in |X|} \frac{1}{\det(1 - t^{\deg(x)}.\mathrm{Frob}_x, K)}$$

(cf. (0.9)); on a même $L(X, K; t) \in 1 + t\overline{\mathbf{Q}}_\ell[[t]]$.

Un résultat fondamental de Grothendieck assure que $L(X, K; t)$ est en fait le développement d'une fraction rationnelle à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$:

Théorème **(3.1.1.1)** (Grothendieck, [Gr] et [SGA 5] XV). — *La série* $L(X, K; t)$ *est le développement de la fraction rationnelle* (*à coefficients dans* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$)

$$\det(1 - t.\mathrm{Frob}_q, R\Gamma(X \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, K))^{-1}.$$

Remarque **(3.1.1.2).** — L'énoncé ci-dessus vaut bien entendu dans un cadre beaucoup plus général (X de type fini sur $\mathbf{F}_q$); il est équivalent à la formule des traces de Grothendieck pour Frobenius rappelée en (1.1.1.3).

Maintenant si $D_{X/\mathbf{F}_q}(K)$ est le dual de K (cf. (0.5)), la dualité de Poincaré ([SGA 5] I et [SGA 4 ½] [Dualité]) fournit un accouplement parfait

$$R\Gamma(X \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, K) \otimes R\Gamma(X \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, D_{X/\mathbf{F}_q}(K)) \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell.$$

On en déduit que la fonction $L(X, K; t)$ satisfait *l'équation fonctionnelle* ([De 1] § 10)

(3.1.1.3) $$L(X, K; t) = \varepsilon(X, K) . t^{a(X,K)} . L(X, D_{X/\mathbf{F}_q}(K); t^{-1})$$

où le *conducteur* $a(X, K) \in \mathbf{Z}$ et la *constante* $\varepsilon(X, K) \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ sont donnés par

(3.1.1.4) $$a(X, K) = -\chi(X, K)$$

(3.1.1.5) $$\varepsilon(X, K) = \det(-\operatorname{Frob}_q, R\Gamma(X \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, K))^{-1}$$

(on a, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$, l'égalité

$$\frac{1}{1-\alpha t} = (-\alpha)^{-1} . t^{-1} . \frac{1}{1-\alpha^{-1} t^{-1}}\Big).$$

Si $K' \to K \to K'' \to K'[1]$ est un triangle distingué dans $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a

(3.1.1.6) $$\begin{cases} L(X, K; t) = L(X, K'; t) . L(X, K''; t) \\ a(X, K) = a(X, K') + a(X, K'') \\ \varepsilon(X, K) = \varepsilon(X, K') . \varepsilon(X, K''). \end{cases}$$

Par dévissage pervers, on voit donc que l'étude des fonctions $L(X, K; t)$ peut se ramener à deux cas particuliers : le cas trivial où K est à support ponctuel et le cas essentiel où $K = j_* F$ pour $j : U \to X$ un ouvert (non vide) et F un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse (non nul) sur U. Dans ce dernier cas on notera encore $L(X, F; t)$, $a(X, F)$ et $\varepsilon(X, F)$ la fonction L, le conducteur et la constante correspondant à $(X, j_* F)$.

D'autre part, on a, pour tout $K \in \operatorname{ob} D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ et tout $n \in \mathbf{Z}$,

(3.1.1.7) $$\begin{cases} L(X, K(n); t) = L(X, K; q^{-n} t) \\ a(X, K(n)) = a(X, K) \\ \varepsilon(X, K(n)) = q^{-n . a(X,K)} . \varepsilon(X, K). \end{cases}$$

Par suite, pour F un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur un ouvert de X, de dual naïf $F^\vee = \mathcal{H}om(F, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, l'équation fonctionnelle pour $L(X, F; t)$ peut se réécrire

(3.1.1.8) $$L(X, F; t) = \varepsilon(X, F)\, t^{a(X,F)}\, L(X, F^\vee; q^{-1} t^{-1})$$

$$(D_{X/\mathbf{F}_q}(j_* F) = j_* F^\vee[2](1)).$$

(3.1.2) Pour X connexe, de corps des fonctions K, on peut aussi attacher des fonctions L aux représentations automorphes sur K et ces fonctions L ont des propriétés tout à fait similaires à celles des fonctions L de Grothendieck. Rappelons leur définition dans le cas cuspidal ([Go-Ja]).

Notons $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles de K et fixons un entier $n \geqslant 1$ et un caractère

$$\chi : \mathbf{A}^\times / K^\times \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$$

L'espace des *formes automorphes cuspidales sur* $GL_n(\mathbf{A})$ *à valeurs dans* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$, *de caractère central* χ, est le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-espace vectoriel

$$L_0(GL_n(\mathbf{A})/GL_n(K), \chi)$$

des fonctions

$$f : \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}) \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell$$

ayant les propriétés suivantes :

(i) f est invariante à droite sous $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$,

(ii) f est invariante à gauche sous un sous-groupe compact ouvert assez petit de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A})$,

(iii) $f(z.g) = \chi(z) f(g)$ pour tous $z \in \mathbf{A}^\times$ et $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{A})$,

(iv) pour tout sous-groupe parabolique propre P de GL_n, de radical unipotent noté U_P, et tout $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{A})$, on a

$$\int_{\mathrm{U}_\mathrm{P}(\mathbf{A})/\mathrm{U}_\mathrm{P}(\mathrm{K})} f(gu)\, du = 0$$

(l'intégrale ci-dessus se réduit à une somme finie d'après (ii) de sorte que le fait que f soit à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ ne pose pas de problème : la topologie de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ ne joue aucun rôle dans la définition de L_0).

Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A})$ agit linéairement par translation à gauche, sur le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-espace vectoriel $\mathrm{L}_0(\mathrm{GL}_n(\mathbf{A})/\mathrm{GL}_n(\mathrm{K}), \chi)$ et cet espace est somme directe dénombrable de sous-représentations admissibles irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A})$, chacune intervenant avec multiplicité 1 (cf. [Bo-Ja], [Pi 2]).

Définition **(3.1.2.1)**. — *Une représentation automorphe cuspidale de* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A})$, *de caractère central* χ, *est une représentation* π *admissible irréductible de* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A})$ *qui intervient dans la décomposition ci-dessus de* $\mathrm{L}_0(\mathrm{GL}_n(\mathbf{A})/\mathrm{GL}_n(\mathrm{K}), \chi)$.

A la décomposition de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A})$ en produit restreint $\prod'_{x \in |\mathrm{X}|} \mathrm{GL}_n(\mathrm{K}_x)$ (K_x est le complété local de K en la place x) correspond une décomposition de chaque représentation automorphe cuspidale π de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A})$ en produit tensoriel restreint

$$\bigotimes_{x \in |\mathrm{X}|}' \pi_x$$

de représentations admissibles irréductibles π_x de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K}_x)$. A chaque π_x est attachée une *fonction* L (locale) (relative à $\mathbf{F}_q$)

$$\textbf{(3.1.2.2)} \qquad \mathrm{L}(\pi_x; t) = \frac{1}{\mathrm{P}(\pi_x; t)},$$

où $\mathrm{P}(\pi_x; t) \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell[t]$ a pour terme constant 1 et est de degré $\leqslant n$, avec égalité sauf pour au plus un nombre fini de $x \in |\mathrm{X}|$. Le produit infini

$$\textbf{(3.1.2.3)} \qquad \mathrm{L}(\mathrm{X}, \pi; t) = \prod_{x \in |\mathrm{X}|} \mathrm{L}(\pi_x; t^{\deg(x)})$$

qui converge clairement dans $1 + t\overline{\mathbf{Q}}_\ell[[t]]$, est appelé la *fonction* L (globale) attachée à la représentation automorphe π. La fonction $L(X, \pi; t)$ est aussi le développement en série d'une fraction rationnelle à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ et satisfait l'*équation fonctionnelle*

$$\textbf{(3.1.2.4)} \qquad L(X, \pi; t) = \varepsilon(X, \pi)\, t^{a(X,\pi)}\, L(X, \check{\pi}; q^{-1} t^{-1})$$

où $\varepsilon(X, \pi) \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ est appelé la *constante*, $a(X, \pi) \in \mathbf{Z}$ est appelé le *conducteur* et où $\check{\pi}$ est la représentation automorphe cuspidale de $GL_n(\mathbf{A})$, de caractère central χ^{-1}, contragrédiente de π (cf. [Go-Ja] (13.8)).

(3.1.3) A la différence de l'équation fonctionnelle (3.1.1.8) pour $L(X, F; t)$ qui est obtenue par voie cohomologique globale, l'équation fonctionnelle (3.1.2.4) est obtenue comme « produit » d'équations fonctionnelles locales pour les $L(\pi_x; t)$.

Fixons un $x \in |X|$ et rappelons d'abord comment Godement et Jacquet obtiennent l'*équation fonctionnelle locale* pour une représentation irréductible admissible (π_x, V_x) de $GL_n(K_x)$ ([Go-Ja] (3.3)).

Notons $\mathcal{O}_x \subset K_x$ l'anneau des entiers de K_x, $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_x$, $q_x = q^{\deg(x)}$ le nombre d'éléments du corps résiduel $k(x) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ de K_x, $v_x : K_x \to \mathbf{Z}$ la valuation discrète ($v_x(a) = 1$ si $a \in \mathfrak{m}_x - \mathfrak{m}_x^2$) et $\mathscr{C}_c^\infty(M_n(K_x))$ le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-espace vectoriel des fonctions sur $M_n(K_x)$ (matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K_x) à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ qui sont *lisses* (*i.e.* localement constantes) et à support compact.

Notons $\mathrm{End}_f(V_x) \subset \mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}(V_x)$ l'idéal bilatère formé des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-endomorphismes de V_x de rang fini. Soit $u \in \mathrm{End}_f(V_x)$. Le *coefficient* de π_x associé à u est la fonction $f_u : GL_n(K_x) \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell$ définie par

$$f_u(g) = \mathrm{Tr}(u \circ \pi_x(g)).$$

Si $(\check{\pi}_x, \check{V}_x)$ est la contragrédiente de (π_x, V_x) et si $\check{u}$ est l'endomorphisme de $\check{V}_x$ transposé de u, $\check{u}$ est aussi de rang fini et le coefficient $f_{\check{u}}$ de $\check{\pi}_x$ associé à $\check{u}$ coïncide avec la fonction $g \mapsto f_u(g^{-1})$ (cette généralisation de la notion de coefficients m'a été signalée par Deligne).

Fixons une racine carrée $p^{1/2}$ de p et donc une racine carrée de toute puissance de p (par exemple, de q et q_x) et fixons une mesure de Haar $d^\times g$ sur $GL_n(K_x)$. Alors Godement et Jacquet associent à $u \in \mathrm{End}_f(V_x)$ la distribution sur $M_n(K_x)$ à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell((t))$ définie par

$$\begin{aligned} Z(\varphi, u; t) &= \int_{GL_n(K_x)} \varphi(g)\, f_u(g)\, (t q_x^{-\frac{n-1}{2}})^{v_x(\det g)}\, d^\times g \\ &= \sum_{m \in \mathbf{Z}} (t q_x^{-\frac{n-1}{2}})^m \int_{\substack{GL_n(K_x) \\ v_x(\det g) = m}} \varphi(g)\, f_u(g)\, d^\times g \end{aligned}$$

($\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(M_n(K_x))$). Ils montrent que l'idéal formé des $P(t) \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell[t]$ tels que

$$P(t)\, Z(\varphi, u; t) \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell[t, t^{-1}],$$

pour tout $u \in \mathrm{End}_f(V_x)$ et tout $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(M_n(K_x))$, est non trivial et ils définissent $P(\pi_x; t) = L(\pi_x; t)^{-1}$ comme le générateur, normalisé par $P(\pi_x; 0) = 1$, de cet idéal ([Go-Ja] (3.3)). Enfin Godement et Jacquet montrent que, pour tout caractère additif non trivial $\Psi_x : K_x \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$, $Z(\varphi, u; t)/L(\pi_x; t)$ satisfait l'équation fonctionnelle *(loc. cit.)*

$$\frac{Z(\hat{\varphi}, \check{u}; q_x^{-1} t^{-1})}{L(\check{\pi}_x; q_x^{-1} t^{-1})} = q_x^{-nc(\Psi_x)/2}.\varepsilon(\pi_x, \Psi_x)\, t^{a(\pi_x, \Psi_x)} \frac{Z(\varphi, u; t)}{L(\pi_x; t)},$$

où $c(\Psi_x) \in \mathbf{Z}$ est le *conducteur* de Ψ_x (*i.e.* le plus grand entier c tel que $\Psi_x \mid m_x^{-c} \equiv 1$) et où

$$\hat{\varphi}(g') = \int_{M_n(K_x)} \varphi(g)\, \Psi_x(\mathrm{Tr}(gg'))\, dg$$

est la transformation de Fourier sur $\mathscr{C}_c^\infty(M_n(K_x))$ relative à Ψ_x, normalisée par $\hat{\hat{\varphi}}(g) = \varphi(-g)$ pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(M_n(K_x))$ (dg est la mesure de Haar autoduale sur $M_n(K_x)$ et

$$\int_{M_n(\mathcal{O}_x)} dg = q_x^{n^2 c(\Psi_x)/2}).$$

Le *facteur local* $L(\pi_x; t)$ ne dépend que de π_x et $q_x^{\frac{1}{2}}$, le *conducteur local* $a(\pi_x, \Psi_x) \in \mathbf{Z}$ ne dépend que de π_x et $c(\Psi_x)$ et la *constante locale* $\varepsilon(\pi_x, \Psi_x) \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ ne dépend que de π_x, Ψ_x et $q_x^{\frac{1}{2}}$. Plus précisément, on a ([Go-Ja])

$$a(\pi_x, \Psi_x) = a(\pi_x) + nc(\Psi_x),$$

où $a(\pi_x) \in \mathbf{N}$ ne dépend que de π_x et est appelé le *conducteur* de π_x, et

$$\varepsilon(\pi_x, \Psi'_x) = \chi_x(b) . q_x^{nv_x(b)} . \varepsilon(\pi_x, \Psi_x),$$

où Ψ'_x est le caractère de K_x défini par

$$\Psi'_x(a) = \Psi_x(ab)$$

et où χ_x est le caractère central de π_x.

Remarques **(3.1.3.1)**. — Godement et Jacquet notent plutôt $\varepsilon(s, \pi_x, \Psi_x)$ le produit

$$\varepsilon(\pi_x, \Psi_x)\, q_x^{-(nc(\Psi_x)/2) - sa(\pi_x, \Psi_x)}.$$

(3.1.3.2) Pour $n = 1$, π_x coïncide avec son caractère central χ_x et les résultats rappelés ci-dessus sont en fait dus à Tate ([Ta 1]). De plus, on a des formules explicites pour $L(\chi_x; t)$, $a(\chi_x)$ et $\varepsilon(\chi_x, \Psi_x)$ (cf. *loc. cit.* ou [De 1] 3) :

$$L(\chi_x; t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\chi_x(a)} & \text{où } v_x(a) = 1 \quad \text{si } \chi_x \mid \mathcal{O}_x^\times \equiv 1 \\ 1 & \text{si } \chi_x \mid \mathcal{O}_x^\times \not\equiv 1 \end{cases}$$

$$a(\chi_x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi_x \mid \mathcal{O}_x^\times \equiv 1 \\ \text{le plus petit entier } a \geqslant 1 \text{ tel que } \chi_x \mid (1+\mathfrak{m}^a) \equiv 1 & \text{si } \chi_x \mid \mathcal{O}_x^\times \not\equiv 1 \end{cases}$$

et
$$\varepsilon(\chi_x, \Psi_x) = \begin{cases} \chi_x(\pi_x^{c(\Psi_x)})\, q^{c(\Psi_x)} & \text{si } \chi_x \mid \mathcal{O}_x^\times \equiv 1 \\ \displaystyle\int_{\gamma_x^{-1}.\mathcal{O}_x^\times} \chi_x^{-1}(z)\, \Psi_x(z)\, dz & \text{si } \chi_x \mid \mathcal{O}_x^\times \not\equiv 1 \end{cases}$$

où $\gamma_x = \gamma_{(\chi_x, \Psi_x)} \in K_x^\times$ est un élément arbitraire de valuation $a(\chi_x) + c(\Psi_x)$ et où la mesure de Haar dz sur K_x est normalisée par $\int_{\mathcal{O}_x} dz = 1$.

(3.1.3.3) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ et $\chi_\alpha : B_n(K_x) \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ le caractère du Borel de $GL_n(K_x)$ des matrices triangulaires supérieures défini par

$$\chi_\alpha(b) = \alpha_1^{v_x(b_{11})} \ldots \alpha_n^{v_x(b_{nn})}.$$

La représentation induite

$$\mathrm{Ind}_{B_n(K_x)}^{GL_n(K_x)}(\chi_\alpha) = \{f : GL_n(K_x) \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell \text{ lisses} \mid \text{pour tous } g \in GL_n(K_x) \text{ et } b \in B_n(K_x), \text{ on a } f(gb) = \delta(b)^{\frac{1}{2}} \chi_\alpha(b) f(g)\}$$

(où $\delta(b) = \prod_{i=1}^{n} q_x^{(2i-n-1)\,v_x(b_{ii})}$ est le module de $B_n(K_x)$ et où $GL_n(K_x)$ agit par translation à gauche) n'est pas nécessairement irréductible mais admet un unique sous-quotient irréductible $\pi_x(\boldsymbol{\alpha})$ non ramifié (*i.e.* ayant un vecteur fixe non nul sous $GL_n(\mathcal{O}_x)$). Pour presque tout $x \in |X|$, π_x est équivalente à $\pi_x(\boldsymbol{\alpha}_x)$ pour un n-uple $(\alpha_{1,x}, \ldots, \alpha_{n,x}) \in (\overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)^n$ uniquement déterminé à l'ordre près et alors ([Go-Ja])

$$L(\pi_x; t) = L(\pi_x(\boldsymbol{\alpha}_x); t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1-\alpha_{x,i}\, t)}$$

$$a(\pi_x) = a(\pi_x(\boldsymbol{\alpha}_x)) = 0$$

et
$$\varepsilon(\pi_x, \Psi_x) = \varepsilon(\pi_x(\boldsymbol{\alpha}_x), \Psi_x) = \prod_{i=1}^{n} (q_x\, \alpha_{x,i})^{c(\Psi_x)}.$$

Finalement, Godement et Jacquet fixent un caractère additif non trivial

$$\Psi : \mathbf{A}/K \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$$

induisant, pour chaque $x \in |X|$, un caractère $\Psi_x : K_x \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$, et montrent en utilisant la théorie de Fourier sur $M_n(\mathbf{A})$ l'équation fonctionnelle (3.1.2.4) avec comme conducteur global

(3.1.3.4) $$a(X, \pi) = \sum_{x \in |X|} \deg(x) . a(\pi_x, \Psi_x)$$

et comme constante globale

(3.1.3.5) $$\varepsilon(X, \pi) = q^{nC(1-g)} \prod_{x \in |X|} \varepsilon(\pi_x, \Psi_x)$$

où C est le nombre des composantes connexes de $X \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}$ et g le genre de l'une quelconque d'entre elles $(C.(1-g) = \chi(X, \theta_X))$ ([Go-Ja] (13.8)).

Remarque **(3.1.3.6)**. — Comme on a fixé en (0.2) un caractère additif $\psi : \mathbf{F}_p \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ non trivial, les caractères additifs non triviaux $\Psi_x : K_x \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ (resp. $\Psi : \mathbf{A}/K \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$) sont paramétrés par $\Omega^1_{K_x} - \{0\}$ (resp. $\Omega^1_K - \{0\}$) : à ω_x (resp. ω), on associe Ψ_x (resp. Ψ) défini par

$$\Psi_x(a) = \psi(\mathrm{Tr}_{k(x)/\mathbf{F}_p}(\mathrm{Res}(a.\omega_x)))$$

$$(\text{resp. } \Psi((a_x)_{x \in |X|}) = \psi(\sum_{x \in |X|} \mathrm{Tr}_{k(x)/\mathbf{F}_p}(\mathrm{Res}_x(a_x.\omega_x))),$$

où $\omega_x \in \Omega^1_{K_x} - \{0\}$ est l'image de ω; la formule des résidus assure que $\Psi(K) = 1$). Si Ψ_x correspond à ω_x, on a

$$c(\Psi_x) = v_x(\omega_x)$$

(où $v_x(a\, db) = v_x(a)$ si $a, b \in K_x$ et $v_x(b) = 1$). Si Ψ correspond à ω, la restriction Ψ_x de Ψ à K_x correspond à l'image ω_x de ω dans $\Omega^1_{K_x} - \{0\}$ et on a

$$\sum_{x \in |X|} \deg(x).c(\Psi_x) = \sum_{x \in |X|} \deg(x).v_x(\omega_x) = C(2g-2).$$

(3.1.4) Soit T un trait hensélien d'égale caractéristique p et de corps résiduel fini k et soit K_t le complété du corps des fonctions de T. La théorie du corps de classe abélien locale ([Se 1] XIII) fournit un homomorphisme continu, injectif et d'image dense, dit de *réciprocité*,

$$i_{K_t} : K_t^\times \to \mathrm{Gal}(\overline{K}_t/K_t)^{ab} = G^{ab},$$

où G est le groupe de Galois de T (cf. (2.1)). On adopte la normalisation de Deligne ([De 1] (2.3)) : i_{K_t} envoie les uniformisantes (*i.e.* les éléments de K_t de valuation 1) sur les Frobenius géométriques (*i.e.* les éléments de G^{ab} dont l'image dans $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ est le Frobenius géométrique relativement à k).

La théorie du corps de classe abélien globale ([Ar-Ta]) fournit quant à elle un homomorphisme continu, injectif et d'image dense, dit encore *de réciprocité*

$$i_K : \mathbf{A}^\times/K^\times \to \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)^{ab}$$

et, pour tout $x \in |X|$, le carré

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}^\times/K^\times \arrow[r, "i_K"] & \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)^{ab} \\ K_x^\times \arrow[u] \arrow[r, "i_{K_x}"] & G_x^{ab} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les flèches évidentes, est commutatif (ceci normalise i_K).

(3.1.5) D'après une conjecture de Langlands, à tout $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse et irréductible de rang $n \geqslant 1$, F, sur un ouvert dense U de X, doit correspondre une représentation automorphe cuspidale π_{F} sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A})$, de telle sorte que

$$\mathrm{L}(\mathrm{X}, \pi_{\mathrm{F}}; t) = \mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{F}; t)$$

(cf. [Lan 2], [Bo], [De 2]).

Pour $n = 1$, cette correspondance est celle induite par l'homomorphisme de réciprocité (F est donné par un caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})^{\mathrm{ab}}$ qui induit un caractère χ de $\mathbf{A}^\times/\mathrm{K}^\times$ et

$$1/\det(1 - t.\mathrm{Frob}_x, j_* \mathrm{F}) = \mathrm{L}(\chi_x; t)$$

pour tout $x \in |\mathrm{X}|$, où $j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$ est l'inclusion). Pour $n = 2$, cette correspondance a été établie par Drinfeld ([Dr 2] et [Dr 3]; voir aussi (3.2.2)).

Cette conjecture de Langlands implique l'existence de conducteurs locaux et de constantes locales associés à un tel $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau F, ainsi que des formules analogues à (3.1.3.4) et (3.1.3.5) pour le conducteur global $a(\mathrm{X}, \mathrm{F})$ et la constante globale $\varepsilon(\mathrm{X}, \mathrm{F})$.

L'existence des conducteurs locaux est due à Artin et l'analogue de (3.1.3.4) est une variante de la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič. L'existence des constantes locales a été démontrée tout d'abord au signe près par Dwork ([Dw]) puis inconditionnellement par Langlands ([Lan 1]). La preuve de Langlands est purement locale; Deligne l'a considérablement simplifiée par l'introduction d'arguments globaux ([De 1]). L'analogue de (3.1.3.5) pour $\varepsilon(\mathrm{X}, \mathrm{F})$ est le résultat principal de ce chapitre et sera énoncé au numéro suivant.

Plus précisément, considérons les triplets $(\mathrm{T}, \mathrm{K}, \omega)$ constitués :

— d'un trait hensélien T d'égale caractéristique p, à corps résiduel fini $k \supset \mathbf{F}_q$;

— de $\mathrm{K} \in \mathrm{ob}\, \mathrm{D}^b_c(\mathrm{T}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$;

— d'une 1-forme méromorphe ω non identiquement nulle sur T ($\omega \in \Omega^1_{k(\eta)} - \{0\}$).

On note K_t le complété du corps des fonctions $k(\eta)$ de T et $v_t : \mathrm{K}_t^\times \to \mathbf{Z}$ sa valuation discrète naturelle. On note $q_t = q^{\deg(t)}$ le nombre d'éléments de k. On note encore $v_t : \Omega^1_{\mathrm{K}_t} - \{0\} \to \mathbf{Z}$ l'application définie par $v_t(a.db) = v_t(a)$ si $a, b \in \mathrm{K}_t^\times$ et $v_t(b) = 1$.

A tout triplet $(\mathrm{T}, \mathrm{K}, \omega)$ on associe son *conducteur local* $a(\mathrm{T}, \mathrm{K}, \omega) \in \mathbf{Z}$ défini par

$$a(\mathrm{T}, \mathrm{K}, \omega) = a(\mathrm{T}, \mathrm{K}) + r(\mathrm{K}_{\bar\eta}).v_t(\omega), \tag{3.1.5.1}$$

où

$$a(\mathrm{T}, \mathrm{K}) = r(\mathrm{K}_{\bar\eta}) + s(\mathrm{K}_{\bar\eta}) - r(\mathrm{K}_{\bar t}) \tag{3.1.5.2}$$

(cf. (2.1.2) et (2.2.1)). La formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič admet la variante immédiate suivante, où l'on suppose X connexe :

(3.1.5.3) *Pour toute* 1*-forme méromorphe* ω *non identiquement nulle sur* X ($\omega \in \Omega^1_{\mathrm{K}} - \{0\}$) *et tout* $\mathrm{K} \in \mathrm{ob}\, \mathrm{D}^b_c(\mathrm{X}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, *on a*

$$a(\mathrm{X}, \mathrm{K}) = \sum_{x \in |\mathrm{X}|} \deg(x).a(\mathrm{X}_{(x)}, \mathrm{K} \mid \mathrm{X}_{(x)}, \omega \mid \mathrm{X}_{(x)}).$$

D'autre part, l'énoncé de Langlands-Deligne d'existence des constantes locales (dans le cas d'un trait d'égale caractéristique $p > 0$) admet la variante suivante ([De 1] (4.1), [De 2] et [Ta 2]).

Théorème **(3.1.5.4).** — *Il existe une et une seule application* ε_ψ (ψ *est le caractère additif non trivial de* $\mathbf{F}_p$ *fixé en* (0.2)) *qui associe à chaque triplet* $(\mathrm{T}, \mathrm{K}, \omega)$ *comme ci-dessus* $\varepsilon_\psi(\mathrm{T}, \mathrm{K}, \omega) \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ *et qui vérifie les axiomes* (i) *à* (v) *ci-dessous.*

(i) $\varepsilon_\psi(\mathrm{T}, \mathrm{K}, \omega)$ *ne dépend que de la classe d'isomorphie du triplet* $(\mathrm{T}, \mathrm{K}, \omega)$.

(ii) *Pour tout triangle distingué*

$$\mathrm{K}' \to \mathrm{K} \to \mathrm{K}'' \to \mathrm{K}'[1]$$

dans $\mathrm{D}_c^b(\mathrm{T}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, *on a*

$$\varepsilon_\psi(\mathrm{T}, \mathrm{K}, \omega) = \varepsilon_\psi(\mathrm{T}, \mathrm{K}', \omega) \,.\, \varepsilon_\psi(\mathrm{T}, \mathrm{K}'', \omega).$$

(iii) *Si* K *est supporté par le point fermé* t *de* T (*i.e.* $\mathrm{K}_{\bar\eta} = 0$), *alors*

$$\varepsilon_\psi(\mathrm{T}, \mathrm{K}, \omega) = \det(-\,\mathrm{Frob}_t, \mathrm{K})^{-1}$$

(cf. (0.9)).

(iv) *Si* η_1/η *est une extension finie séparable, si* $f : \mathrm{T}_1 \to \mathrm{T}$ *est le normalisé de* T *dans* η_1 *et si* $\mathrm{K}_1 \in \mathrm{ob}\, \mathrm{D}_c^b(\mathrm{T}_1, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *est tel que* $r(\mathrm{K}_{1, \bar\eta_1}) = 0$, *on a*

$$\varepsilon_\psi(\mathrm{T}, f_* \mathrm{K}_1, \omega) = \varepsilon_\psi(\mathrm{T}_1, \mathrm{K}_1, f^* \omega).$$

(v) *Si* V *est un* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau (lisse) de rang* 1 *sur* η, *qui induit un caractère* $\chi : \mathrm{K}_t^\times \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ *via l'homomorphisme de réciprocité* $i_{\mathrm{K}_t} : \mathrm{K}_t^\times \to \mathrm{G}^{\mathrm{ab}}$ (cf. (3.1.4)) *et si* $j : \eta \hookrightarrow \mathrm{T}$ *est l'inclusion, on a*

$$\varepsilon_\psi(\mathrm{T}, j_* \mathrm{V}, \omega) = \varepsilon(\chi, \Psi)$$

où le caractère $\Psi = \Psi_\omega : \mathrm{K}_t \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ *est défini par*

$$\Psi_\omega = \psi \circ \mathrm{Tr}_{k/\mathbf{F}_p}(\mathrm{Res}(a \,.\, \omega))$$

et a pour conducteur $c(\Psi) = v_t(\omega)$, *et où* $\varepsilon(\chi, \Psi)$ *est la constante locale de Tate* (cf. (3.1.3.2)).

Dans la suite, on notera simplement $\varepsilon(\mathrm{T}, \mathrm{K}, \omega)$ la constante locale $\varepsilon_\psi(\mathrm{T}, \mathrm{K}, \omega)$ quand aucun risque de confusion n'en résulte.

La constante locale $\varepsilon(\mathrm{T}, \mathrm{K}, \omega)$ a en outre les propriétés suivantes ([De 1] 5) :

(3.1.5.5) *Pour tout* $a \in k(\eta)^\times$, *on a*

$$\varepsilon(\mathrm{T}, \mathrm{K}, a \,.\, \omega) = \chi_{\mathrm{K}}(a) \,.\, q_t^{r(\mathrm{K}_{\bar\eta}) \,.\, v_t(a)} \,.\, \varepsilon(\mathrm{T}, \mathrm{K}, \omega),$$

où $\chi_{\mathrm{K}} : \mathrm{K}_t^\times \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ *est le caractère induit par le* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau (lisse) de rang* 1, $\det(\mathrm{K} \mid \eta)$, *sur* η, *via l'homomorphisme de réciprocité* (cf. (3.1.4)).

(3.1.5.6) *Si* F *est un* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau lisse de rang* $r(\mathrm{F})$ *sur* T, *on a*

$$\varepsilon(\mathrm{T}, \mathrm{K} \otimes \mathrm{F}, \omega) = \det(\mathrm{Frob}_t, \mathrm{F})^{a(\mathrm{T}, \mathrm{K}, \omega)} \,.\, \varepsilon(\mathrm{T}, \mathrm{K}, \omega)^{r(\mathrm{F})}.$$

Pour V un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau (lisse sur η (*i.e.* un G-module, cf. (2.1.2)), on posera encore (suivant Deligne, [De 1] 5)

$$\varepsilon(\mathrm{T}, \mathrm{V}, \omega) = \varepsilon(\mathrm{T}, j_* \mathrm{V}, \omega)$$

et

$$\varepsilon_0(\mathrm{T}, \mathrm{V}, \omega) = \varepsilon(\mathrm{T}, j_! \mathrm{V}, \omega)$$

où $j : \eta \to \mathrm{V}$ est l'inclusion.

Remarque **(3.1.5.7)**. — Si $0 \to \mathrm{V}' \to \mathrm{V} \to \mathrm{V}'' \to 0$ est une suite exacte courte de G-modules, on a

$$\varepsilon_0(\mathrm{T}, \mathrm{V}, \omega) = \varepsilon_0(\mathrm{T}, \mathrm{V}', \omega) . \varepsilon_0(\mathrm{T}, \mathrm{V}'', \omega)$$

mais en général

$$\varepsilon(\mathrm{T}, \mathrm{V}, \omega) \neq \varepsilon(\mathrm{T}, \mathrm{V}', \omega) . \varepsilon(\mathrm{T}, \mathrm{V}'', \omega);$$

cela ne contredit pas cependant [De 1] (4.1) (1) puisque dans cet énoncé les G-modules considérés sont supposés I-semi-simples.

On posera aussi

$$a(\mathrm{T}, \mathrm{V}, \omega) = a(\mathrm{T}, j_* \mathrm{V}, \omega)$$
$$a(\mathrm{T}, \mathrm{V}) = a(\mathrm{T}, j_* \mathrm{V})$$

et

$$a_0(\mathrm{T}, \mathrm{V}, \omega) = a(\mathrm{T}, j_! \mathrm{V}, \omega)$$
$$a_0(\mathrm{T}, \mathrm{V}) = a(\mathrm{T}, j_! \mathrm{V})$$

(avec les notations ci-dessus).

Remarque **(3.1.5.8)**. — Dans [De 1] (4.1), la constante ε définie par Deligne dépend en outre du choix d'une mesure de Haar dx sur K_t. Nous avons implicitement choisi comme dx la mesure standard, *i.e.* celle qui est normalisée par $\int_{\mathcal{O}_t} dx = 1$, où $\mathcal{O}_t \subset \mathrm{K}_t$ est l'anneau de la valuation v_t.

(3.2) *Formule du produit pour* $\varepsilon(\mathrm{X}, \mathrm{K})$ *: énoncé et conséquence pour la conjecture de Langlands.*

(3.2.1) L'énoncé ci-dessous a été conjecturé par Deligne ([De 2]). C'est le résultat principal de ce chapitre.

Théorème **(3.2.1.1)**. — *Soient* X *une courbe projective, lisse et connexe sur* $\mathbf{F}_q$, ω *une* 1*-forme méromorphe non identiquement nulle sur* X *et* $\mathrm{K} \in \operatorname{ob} \mathrm{D}^b_c(\mathrm{X}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *Alors la constante globale* $\varepsilon(\mathrm{X}, \mathrm{K})$ *de l'équation fonctionnelle* (3.1.1.3) *vérifie la formule du produit*

$$\varepsilon(\mathrm{X}, \mathrm{K}) = q^{\mathrm{C}(1-g)\, r(\mathrm{K})} \prod_{x \in |\mathrm{X}|} \varepsilon(\mathrm{X}_{(x)}, \mathrm{K} \mid \mathrm{X}_{(x)}, \omega \mid \mathrm{X}_{(x)})$$

où C *est le nombre des composantes connexes de* $\mathrm{X} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}$ *et* g *le genre de l'une quelconque d'entre elles.*

Remarques **(3.2.1.2)**. — On a aussi

$$q^{C(1-g)} = \frac{\# H^0(X, \mathcal{O}_X)}{\# H^1(X, \mathcal{O}_X)}$$

(3.2.1.3) Le second membre de la formule du produit est bien indépendant du choix de ω (cf. (3.1.5.5) et la formule des résidus sous la forme

$$\sum_{x \in |X|} \deg(x) . v_x(a) = 0, \quad \forall\, a \in K).$$

(3.2.1.4) La formule du produit pour $\varepsilon(X, K)$ contient la formule (3.1.5.3) pour $a(X, K)$: si l'on remplace K par $K(m)$ $(m \in \mathbf{Z})$, on a

$$\varepsilon(X, K(m)) = q^{-ma(X, K)}\, \varepsilon(X, K)$$

alors que, pour tout $x \in |X|$,

$$\varepsilon(X_{(x)}, K(m) \mid X_{(x)}, \omega \mid X_{(x)}) = q_x^{-ma(X_{(x)}, K \mid X_{(x)}, \omega \mid X_{(x)})} . \varepsilon(X_{(x)}, K \mid X_{(x)}, \omega \mid X_{(x)}),$$

d'après (3.1.5.6).

(3.2.1.5) Pour K à support fini, la formule du produit est triviale.

Compte tenu de cette dernière remarque, la formule du produit est équivalente (par dévissage) à son cas particulier suivant : soit F un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur un ouvert dense U de X, alors

(3.2.1.6) $$\varepsilon(X, F) = q^{C(1-g)\, r(F)} \prod_{x \in |X|} \varepsilon(X_{(x)}, F \mid \eta_x, \omega \mid X_{(x)})$$

(avec les conventions de (3.1.1) et (3.1.5)).

Proposition **(3.2.1.7)**. — *Si* F *est à monodromie géométrique finie,* i.e. *s'il existe un revêtement fini étale* U′ *de* U *tel que* $F \mid U'$ *soit géométriquement constant, alors la formule du produit ci-dessus pour* $\varepsilon(X, F)$ *est satisfaite.*

Preuve. — Soit G un groupe profini qui est extension de $\hat{\mathbf{Z}}$ par un groupe fini, alors toute représentation ℓ-adique irréductible ρ de G est la forme $\rho = \rho_1 . \chi$, où ρ_1 est une représentation ℓ-adique de G qui se factorise par un quotient fini de G et où χ est un caractère ℓ-adique de G qui se factorise par le quotient $G \twoheadrightarrow \hat{\mathbf{Z}}$ (on a un homomorphisme continu central $\hat{\mathbf{Z}} \hookrightarrow G$ tel que le composé $\hat{\mathbf{Z}} \hookrightarrow G \twoheadrightarrow \hat{\mathbf{Z}}$ soit de conoyau fini). On peut donc supposer F de la forme $F_1 \otimes L$ où F_1 est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur U à monodromie finie et où L est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur U qui est géométriquement constant. Compte tenu de (3.1.5.6), (3.1.5.3) et de l'égalité

$$R\Gamma(X \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_*(F \otimes L)) = R\Gamma(X \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* F) \otimes M$$

où M est le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau (lisse) de rang 1 sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{F}_q)$ dont L est l'image réciproque sur U, on est ramené au cas où $L = \overline{\mathbf{Q}}_{\ell, U}$, *i.e.* où F est à monodromie finie. Par suite, (3.1.1.6), (3.1.5.4) (i), (3.1.5.4) (iv), la suite spectrale de Leray pour un revêtement fini de X et la théorie de Brauer, nous ramènent au cas où F est lisse de rang 1 sur U et à monodromie finie. Ce dernier cas résulte de la thèse de Tate ([Ta 1]), compte tenu de (3.1.5.5) (v) et de la théorie du corps de classes abélien.

Remarques **(3.2.1.8)**. — Deligne a aussi donné une démonstration géométrique de la proposition (3.2.1.7) ([De 6] et [De 1] (10.12.1)), basée sur le corps de classe abélien géométrique de Serre ([Se 3]).

(3.2.1.9) Outre la proposition (3.2.1.7), les cas particuliers suivants de (3.2.1.6) sont déjà démontrés :

a) F fait partie d'un système compatible infini de $\overline{\mathbf{Q}}_{\ell'}$-faisceaux ($\ell' \neq p$) lisses sur U : ce cas est dû à Deligne ([De 1] (9.3)),

b) F est modérément ramifié le long de X — U : ce cas est aussi dû à Deligne ([De 2]),

c) F est de rang 2 : ce dernier cas est conséquence de la théorie de Hecke pour GL_2 ([We 1] ou [Ja-La]) et de la correspondance de Langlands pour GL_2 sur les corps de fonctions établie par Drinfel'd ([Dr. 1], [Dr. 2] et [Dr. 3]).

(3.2.2) On a vu que l'énoncé (3.2.1.1) est motivé par la correspondance de Langlands entre représentations de Galois et formes automorphes (cf. (3.1.5)). Réciproquement, l'application la plus importante du théorème (3.2.1.1) est le principe de récurrence, dégagé par Piatetski-Shapiro et Deligne, pour établir cette correspondance ([De 2]).

Soit n un entier $\geqslant 1$. Langlands considère les deux ensembles $\mathscr{A}_n$ et $\mathscr{G}_n$ suivants :

— $\mathscr{A}_n$ est l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations automorphes cuspidales de $GL_n(\mathbf{A})$ (à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$) dont le caractère central $K^\times \backslash \mathbf{A}^\times \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ se prolonge de façon continue à $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)^{ab}$ *via* l'homomorphisme de réciprocité i_K (cf. (3.1.2) et (3.1.4));

— $\mathscr{G}_n$ est l'ensemble des classes d'isomorphie de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux (lisses) irréductibles de rang n sur le point générique de X, qui se prolongent en un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur un ouvert dense de X (*i.e.* des représentations ℓ-adiques irréductibles de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ presque partout non ramifiées).

La correspondance de Langlands pour GL_n sur le corps de fonctions K s'énonce alors ainsi ([Lan 2], [Dr 1], [De 2]).

Correspondance (conjecturale) de Langlands **(3.2.2.1)**.

$(\mathrm{i})_n$ *Il existe une application*

$$F_\bullet : \mathscr{A}_n \to \mathscr{G}_n, \quad \pi \mapsto F_\pi,$$

telle que, pour tout $\pi \in \mathscr{A}_n$, *on ait*

$$\det(1 - t\,\mathrm{Frob}_x; \mathrm{F}_\pi) = \mathrm{P}(\pi_x; t)$$

pour presque tout $x \in |\mathrm{X}|$ (cf. (3.1.1) *et* (3.1.2.2)).

(ii)$_n$ *Il existe une application*

$$\pi_\bullet : \mathscr{G}_n \to \mathscr{A}_n, \qquad \mathrm{F} \mapsto \pi_\mathrm{F},$$

telle que, pour tout $\mathrm{F} \in \mathscr{G}_n$, *on ait*

$$\mathrm{P}(\pi_{\mathrm{F},x}; t) = \det(1 - t\,\mathrm{Frob}_x, \mathrm{F})$$

pour presque tout $x \in |\mathrm{X}|$ (cf. (3.1.1) *et* (3.1.2.2)).

Remarques **(3.2.2.2)**. — Il résulte du théorème de densité de Čebotarev ([Se 5] Thm 7) que l'application $\mathrm{F}_\bullet$ est unique si elle existe et il résulte du théorème fort de multiplicité un pour GL_n ([Pi 2]) que l'application $\pi_\bullet$ est unique si elle existe. De plus $\mathrm{F}_\bullet$ et $\pi_\bullet$ sont automatiquement des bijections réciproques l'une de l'autre dès qu'elles existent simultanément (3.2.2.3). Pour $n = 1$, les assertions (i)$_n$ et (ii)$_n$ de (3.2.2.1) sont tautologiques. Pour $n = 2$, l'assertion (i)$_n$ a été établie par Drinfel'd *via* sa théorie des stukas ([Dr 1]). Le principe de récurrence ci-dessous permet alors d'en déduire les assertions (ii)$_n$ pour $n = 2$ et 3. Signalons cependant que Drinfel'd a donné une démonstration de (ii)$_n$ pour $n = 2$ totalement différente ([Dr 2] et [Dr 3]).

Principe de récurrence **(3.2.2.3)** (Deligne, [De 2]). — *Soit n un entier* $\geqslant 2$. *Supposons que* :

a) *Les assertions* (i)$_{n'}$ *et* (ii)$_{n'}$ *de* (3.2.2.1) *soient établies pour tout entier* $n' \leqslant n - 1$,

b) *Pour tout* $\mathrm{F} \in \mathscr{G}_n$, *tout entier* $n' \leqslant n - 1$ *et tout* $\mathrm{F}' \in \mathscr{G}_{n'}$ *à ramification disjointe de* F, $\varepsilon(\mathrm{X}, \mathrm{F} \otimes \mathrm{F}')$ *vérifie la formule du produit* (3.2.1.6).

Alors l'assertion (ii)$_n$ *est vérifiée.*

Corollaire **(3.2.2.4)**. — *Soit n un entier* $\geqslant 2$. *Supposons que l'assertion* (i)$_{n'}$ *est établie pour tout entier* $n' \leqslant n - 1$. *Alors, l'assertion* (ii)$_{n'}$ *est vérifiée pour tout entier* $n' \leqslant n$.

Preuve. — Compte tenu de (3.2.1.1), le corollaire est conséquence immédiate du principe de récurrence ci-dessus.

Esquisse de la preuve du principe de récurrence. — Soit $\mathrm{F} \in \mathscr{G}_n$. Pour tout $n' \leqslant n - 1$ et tout $\pi' \in \mathscr{A}_{n'}$ à ramification disjointe de F, on peut former la fonction L

$$\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{F}, \pi'; t) = \prod_{x \in |\mathrm{X}|} \mathrm{L}_x(\mathrm{F}, \pi'; t^{\deg(x)})$$

avec
$$\mathrm{L}_x(\mathrm{F}, \pi'; t) = \prod_{i,j} (1 - \alpha_i \beta_j t)^{-1}$$

si
$$\det(1 - t\,\mathrm{Frob}_x, \mathrm{F}) = \prod_i (1 - \alpha_i t)$$

et
$$\mathrm{P}(\pi'_x; t) = \prod_j (1 - \beta_j t).$$

D'après la théorie de Hecke inverse pour GL_n ([Pi 1]), pour démontrer l'existence de π_F il suffit de vérifier que $L(X, F, \pi'; t)$ satisfait, pour tout entier $n' \leqslant n-1$ et tout $\pi' \in \mathscr{A}_{n'}$, aux conditions suivantes :

(α) $L(X, F, \pi'; t)$ est le développement en série formelle d'une fraction rationnelle,

(β) $L(X, F, \pi'; t)$ vérifie une équation fonctionnelle

$$L(X, F, \pi'; t) = \varepsilon(X, F, \pi').t^{a(X,F,\pi')}.L(X, F^\vee, \check{\pi}'; q^{-1}t^{-1})$$

où le conducteur $a(X, F, \pi')$ et la constante $\varepsilon(X, F, \pi')$ vérifient des formules analogues à (3.1.5.3) et (3.2.1.6).

Or, par hypothèse, $F_{\pi'}$ existe, de sorte que

$$L(X, F, \pi'; t) = L(X, F \otimes F_{\pi'}; t)$$

à un nombre fini de facteurs locaux près, d'où la conclusion.

(3.3) *Formule du produit pour* $\varepsilon(X, K)$: *une première réduction.*

(3.3.1) Soient $A = \mathrm{Spec}(\mathbf{F}_q[x])$ une droite affine sur $\mathbf{F}_q$, de complétion projective $D = A \cup \{\infty\}$, $\omega_0 = -dx$ la 1-forme différentielle méromorphe, holomorphe sur A et admettant un pôle double en ∞, qui est induite par x, $S \subset A$ un fermé fini réduit et F un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang $r \geqslant 1$ sur $U := A - S$. On notera $j : U \hookrightarrow A$ et $\alpha : A \hookrightarrow D$ les inclusions et on fait l'hypothèse suivante :

(3.3.1.1) F *est non ramifié en* ∞, i.e. $(\alpha \mid U)_* F$ *est un* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau lisse sur* $U \cup \{\infty\}$.

On notera simplement $F_{\bar\infty}$ la fibre de $(\alpha \mid U)_* F$ au point géométrique $\bar\infty$.

Théorème **(3.3.1.2).** — *Avec les notations et hypothèses ci-dessus, on a*

$$\det(-\mathrm{Frob}_q, R\Gamma_c(U \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, F))^{-1}.q^r.\det(-\mathrm{Frob}_\infty, F_{\bar\infty}) = \prod_{s \in S} \varepsilon_0(D_{(s)}, F \mid \eta_s, \omega_0 \mid D_{(s)})$$

(cf. (0.9) *et* (3.1.5)).

La preuve de (3.3.1.2) sera donnée en (3.5.2). Pour le moment, montrons que la formule du produit pour $\varepsilon(X, K)$ est conséquence de (3.3.1.2). Plus précisément :

Proposition **(3.3.2).** — *Les énoncés* (3.2.1.1) *et* (3.3.1.2) *sont équivalents.*

Preuve. — Tout d'abord (3.3.1.2) est le cas particulier suivant de (3.2.1.1) : $X = D$, $\omega = \omega_0$ et $K = \alpha_! j_! F$. En effet, on a d'après (3.1.5.5), (3.1.5.6) et (3.1.5.4) (v)

$$\varepsilon(D_{(\infty)}, F \mid \eta_\infty, \omega_0 \mid D_{(\infty)}) = q^{-2r} \det(-\mathrm{Frob}_\infty, F_{\bar\infty})^{-2}$$

et

$$\varepsilon(D_{(t)}, F \mid \eta_t, \omega_0 \mid D_{(t)}) = 1, \quad \forall\, t \in |A| - S.$$

Inversement montrons la formule du produit pour $\varepsilon(X, K)$ en admettant (3.3.1.2). Comme la formule du produit pour $\varepsilon(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est déjà démontrée (cf. (3.2.1.7)), on peut supposer que $r(K) = 0$ (remplacer K par $K \oplus \overline{\mathbf{Q}}_\ell^{|r(K)|}[-\varepsilon]$, où $\varepsilon = r(K)/|r(K)|$, si $r(K) \neq 0$, cf. (3.1.1.6) et (3.1.5.4) (ii)). Comme il suffit de démontrer la formule du produit pour $\varepsilon(X, K)$ pour une quelconque des 1-formes ω (cf. (3.2.1.3)), on peut alors supposer que $X = \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_q}$ (choisir une fonction méromorphe $f: X \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_q}$ qui fasse de X un revêtement fini, génériquement étale de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_q}$, choisir pour ω une 1-forme qui provient *via* f^* d'une forme sur $\mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_q}$ et remplacer K par $f_* K$, cf. (3.1.5.4) (iv) et l'égalité

$$\varepsilon(\mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_q}, f_* K) = \varepsilon(X, K)$$

donnée par la suite spectrale de Leray pour f). Par dévissage sur K, on se ramène ensuite au cas où K est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur un ouvert dense de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_q}$, prolongé par 0 à $\mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_q}$ tout entier (cf. (3.1.1.6), (3.1.5.4) (ii) et (iii)). Si cet ouvert dense de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_q}$ contient un point rationnel sur $\mathbf{F}_q$, on a terminé (on prend ce point comme point ∞), sinon on conclut par le lemme suivant :

Lemme **(3.3.2.1)**. — *Soient* X, ω *et* K *comme dans* (3.2.1.1); *on suppose de plus* X *géométriquement connexe et on note* X_m, ω_m *et* K_m *les objets déduits de* X, ω *et* K *par le changement de base de* $\mathbf{F}_q$ *à* $\mathbf{F}_{q^m}$, *pour tout entier* $m \geqslant 1$. *Alors, si la formule du produit est démontrée pour* $\varepsilon(X_m, K_m)$ *et* $\varepsilon(X_n, K_n)$ *avec m et n deux entiers* $\geqslant 1$ *premiers entre eux, elle l'est aussi pour* $\varepsilon(X, K)$.

Preuve. — On peut supposer que $r(K) = 0$ (cf. (3.2.1.7)). Puisque le Frobenius géométrique relatif à $\mathbf{F}_{q^m}$ est la puissance m-ième de celui relatif à $\mathbf{F}_q$, on a clairement

$$\varepsilon(X_m, K_m) = (-1)^{(m-1)a(X,K)}\,\varepsilon(X, K)^m.$$

Alors, pour prouver le lemme il ne reste plus qu'à montrer la formule analogue

$$\varepsilon'(X_m, K_m, \omega_m) = (-1)^{(m-1)a(X,K)}\,\varepsilon'(X, K, \omega)^m,$$

où maintenant $\varepsilon'(X, K, \omega)$ désigne le second membre de la formule du produit (3.2.1.1). Or, si $f_m : X_m \to X$ est la projection canonique, il résulte de (3.5.1.4) (iv) et de $r(K) = 0$ que

$$\varepsilon'(X_m, K_m, \omega_m) = \varepsilon'(X, f_{m*} K_m, \omega).$$

Mais on a, par la formule des projections,

$$f_{m*} K_m = K \otimes f_{m*} \overline{\mathbf{Q}}_\ell,$$

avec $f_{m*} \overline{\mathbf{Q}}_\ell$ qui est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur X de rang m, et on a

$$\det(\mathrm{Frob}_x, f_{m*} \overline{\mathbf{Q}}_\ell) = (-1)^{(m-1)\deg(x)},$$

pour tout $x \in |X|$. Par suite, il résulte de (3.1.5.6) que

$$\varepsilon'(X, f_{m*}K_m, \omega) = (-1)^{(m-1)a(X,K)}\varepsilon'(X, K, \omega)^m,$$

d'où la conclusion.

(3.4) *Localisation de* $\det(R\Gamma_c(U \otimes_k \bar{k}, F)$ [1]).

(3.4.1) Considérons de nouveau un corps k arbitraire (k parfait et de caractéristique p, cf. (0.1)). Soient A la droite affine $\mathrm{Spec}(k[x])$, S un ensemble fini de points fermés de A, $j : U \hookrightarrow A$ l'ouvert complémentaire et F un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur U. On note $\alpha : A \hookrightarrow D$ la compactification naturelle de A ($D = A \cup \{\infty\}$) et on fait l'hypothèse suivante :

(3.4.1.1) F *est non ramifié à l'infini, i.e.* $(\alpha \mid U)_* F$ *est un* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau lisse sur* $U \cup \{\infty\}$.

On notera simplement $F_{\bar{\infty}}$ la fibre au point géométrique $\bar{\infty}$ de $(\alpha \mid U)_* F$.

Soient $k\{\pi\}$ l'hensélisé de l'anneau local $k[\pi]_{(\pi)}$ et $T = \mathrm{Spec}(k\{\pi\})$ le trait hensélien correspondant, muni de son uniformisante π. Pour chaque $s \in S$, le trait $A_{(s)}$ est muni canoniquement d'une uniformisante π_s et donc d'un k-morphisme fini étale $\pi_s : A_{(s)} \to T$, $\pi_s \mapsto \pi$: si

$$s \otimes_k \bar{k} = \coprod_{\iota \in \mathrm{Hom}_k(k(s), \bar{k})} s_\iota,$$

on pose

$$\pi_s = \prod_\iota (x - s_\iota) \in k[x] \subset \mathcal{O}_{A_{(s)}, s}$$

(pour $s \in S \cap A(k)$, $\pi_s = x - s$ et $\pi_s : A_{(s)} \to T$ est un isomorphisme). Alors $\pi_{s*}(F \mid \eta_s)$ est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau (lisse) sur le point générique η de T, de rang $\deg(s).r(F \mid \eta_s)$ et de conducteur de Swan $\deg(s).s(F \mid \eta_s)$.

Maintenant, si $T' = \mathrm{Spec}(k\{\pi'\})$, muni de l'uniformisante π' et si

$$\mathscr{F}^{(0,\infty')} : \mathscr{G} \to \mathscr{G}'_{[0,1[}$$

est la transformation de Fourier locale définie en (2.4) (on a fixé $\psi : \mathbf{F}_p \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$, cf. (0.2)), on peut former, pour chaque $s \in S$, le G'-module

$$\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\pi_{s*}(F \mid \eta_s))$$

de rang $\deg(s)\,(r(F \mid \eta_s) + s(F \mid \eta_s))$ et de conducteur de Swan $\deg(s).s(F \mid \eta_s)$ (cf. (2.4.3) (i) b)).

Lemme **(3.4.1.2)**. — *La puissance extérieure maximale*

$$\det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\pi_{s*}(F \mid \eta_s)))$$

de $\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\pi_{s*}(F \mid \eta_s))$ *est un* G'*-module de rang* 1 *modérément ramifié.*

Preuve. — On a $\det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\pi_{s*}(F \mid \eta_s))) \in \mathscr{G}'_{[0,1[}$ et donc le lemme résulte aussitôt de (2.1.2.6).

Soit enfin $A' = \mathrm{Spec}(k[x'])$ la droite vectorielle duale de A et $\alpha' : A' \hookrightarrow D'$ sa compactification naturelle ($D' = A' \cup \{\infty'\}$); on a un k-morphisme

$$\pi' : T' \to D', \quad \pi' \mapsto 1/x'$$

qui induit un isomorphisme $\pi' : T' \xrightarrow{\sim} D'_{(\infty')}$. Pour chaque G-module V, le G'-module de rang 1, $\det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(V))$, admet un prolongement canonique en un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur $A' - \{0'\}$ qui est modérément ramifié en 0′ (et en ∞′) (cf. (2.2.2.1)). On notera

(3.4.1.3) $\qquad \det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(V))_{\pi'}$

le $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-module de rang 1 fibre de ce prolongement canonique au point géométrique $\bar{1}'$ de A' ($1' \in A'(k) = k$).

Théorème **(3.4.2).** — *Pour tout sous-ensemble fini* $S \subset |A|$ *de complémentaire* U *dans* A *et pour tout* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau lisse* F *sur* U *qui vérifie* (3.4.1.1), *on a un isomorphisme de* $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-*modules de rang* 1

$$\det(R\Gamma_c(U \otimes_k \bar{k}, F)[1]) \otimes \det(F_{\bar{\infty}}(-1)) \simeq \bigotimes_{s \in S} \det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\pi_{s*}(F \mid \eta_s)))_{\pi'}$$

fonctoriel en F.

Remarques **(3.4.2.1).** — Pour tout $K \in \mathrm{ob}\, D^b_c(\mathrm{Spec}(k), \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a posé

$$\det(K) = \bigotimes_{i \in \mathbf{Z}} \det(\mathscr{H}^i(K))^{\otimes(-1)^i}$$

et
$$\det(V) = \bigwedge^{r(V)} V$$

pour tout $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-module V.

(3.4.2.2) Bien qu'il ne soit pas vrai en général que chacun des G′-modules $\det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\pi_{s*}(F \mid \eta_s)))$ soit séparément non ramifié, on verra au cours de la démonstration de (3.4.2) que

$$\bigotimes_{s \in S} \det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\pi_{s*}(F \mid \eta_s)))$$

est un G′-module non ramifié, de sorte que le second membre de la formule (3.4.2) est indépendant du choix de π' et par conséquent de la coordonnée affine x sur A.

Preuve de **(3.4.2).** — Considérons le transformé de Fourier global

$$K' := \mathscr{F}(j_! F[1]) \in \mathrm{ob}\, \mathrm{Perv}(A', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

du $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau pervers $j_! F[1]$ sur A (cf. (1.3.2.3)). On sait, d'après (2.3.1.3) (i), que

$$K' \mid A' - \{0'\} = F'[1],$$

où F' est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur $A' - \{0'\}$. De plus, d'après (2.3.2), (2.4.2.1) et (2.5.3.1) (i), on a la suite exacte canonique

$$0 \to \mathscr{H}^{-1}(K'_{\bar{0}'}) \to F'_{\bar{\eta}_{0'}} \to F_{\bar{\infty}}(-1) \to \mathscr{H}^0(K'_{\bar{0}'}) \to 0,$$

avec
$$K'_{\bar{0}'} = R\Gamma_c(U \otimes_k \bar{k}, F)\,[2]$$

par changement de base propre, et on a, d'après (2.3.3.1), (2.4.2.1) (iii) et (2.4.3) (iii) b), un isomorphisme canonique

$$F'_{\bar{\eta}_{\infty'}} \simeq \bigoplus_{s \in S} \mathrm{Ind}_{G_{s \times_k \infty'}}^{G_s} (R^{-1}\Phi_{\bar{\eta}_{\infty'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_! K) \otimes \overline{\mathscr{L}}(x.x')\,[1])_{(\bar{s}, \bar{\infty}')}$$

(avec les notations de *loc. cit.*). En outre, sur $s \times_k A \times_k A'$, on a canoniquement

$$\overline{\mathscr{L}}(x.x') \simeq \overline{\mathscr{L}}((x-s).x') \otimes \overline{\mathscr{L}}(s.x')$$

(cf. (1.1.3.2)), de sorte que

$$R^{-1}\Phi_{\bar{\eta}_{\infty'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_! K) \otimes \overline{\mathscr{L}}(x.x')\,[1])_{(\bar{s}, \bar{\infty}')}$$
$$\overline{\mathscr{L}}(s.x')_{\bar{\eta}_{\infty'}} \otimes R^{-1}\Phi_{\bar{\eta}_{\infty'}}(\overline{\mathrm{pr}}^*(\alpha_! K) \otimes \overline{\mathscr{L}}((x-s).x')\,[1])_{(\bar{s}, \bar{\infty}')}.$$

On déduit alors des résultats précédents que la puissance extérieure maximale de F', $\det(F')$, qui est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur $A' - \{0'\}$, a les propriétés suivantes :

a) $\det(F')$ est non ramifié en $0'$, *i.e.* $j'_* \det(F')$ est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur A' (où $j' : A' - \{0'\} \hookrightarrow A'$ est l'inclusion), et $(j'_* \det(F'))_{\bar{0}'}$ est canoniquement isomorphe au $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-espace vectoriel de rang 1

$$\det(R\Gamma_c(U \otimes_k \bar{k}, F)\,[1]) \otimes \det(F_{\bar{\infty}}(-1)),$$

b) La monodromie de $\det(F')$ en ∞' est donnée par l'isomorphisme canonique

$$\det(F')_{\bar{\eta}_{\infty'}} \simeq \mathscr{L}(\delta_F.x')_{\bar{\eta}_{\infty'}} \otimes \bigotimes_{s \in S} \det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\pi_{s*}(F \mid \eta_s)))$$

où l'on a posé

$$\delta_F = \sum_{s \in S} a_s(j_! F).\mathrm{tr}(s) \in k$$

avec
$$\mathrm{tr}(s) = \sum_{\iota \in \mathrm{Hom}_k(k(s), \bar{k})} s_\iota \in k$$

(on rappelle que

$$s \otimes_k \bar{k} = \coprod_{\iota \in \mathrm{Hom}_k(k(s), \bar{k})} s_\iota).$$

Par suite, le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1

$$\mathscr{L}(-\delta_F.x') \otimes j'_* \det(F')$$

sur A' a pour monodromie à l'infini

$$\bigotimes_{s \in S} \det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\pi_{s*}(F \mid \eta_s)))$$

et donc est modérément ramifié à l'infini d'après (3.4.1.2). Comme tout $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur $\mathbf{A}^1_k$, qui est modérément ramifié à l'infini, est en fait géométriquement constant et que l'on a canoniquement

$$\mathscr{L}(-\delta_{\mathrm{F}}.x')_{\overline{0}'} \simeq \overline{\mathbf{Q}}_\ell$$

(cf. (1.1.3.1)), il suit de ce qui précède que

$$\bigotimes_{s\in\mathrm{S}} \det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\pi_{s*}(\mathrm{F}\mid\eta_s)))$$

est un $\mathrm{G}_{\infty'}$-module non ramifié et que, en tant que $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-module, il est canoniquement isomorphe à

$$\det(\mathrm{R}\Gamma_c(\mathrm{U}\otimes_k \bar{k}, \mathrm{F})\,[1]) \otimes \det(\mathrm{F}_{\overline{\infty}}(-1)).$$

D'où la conclusion.

(3.5) *Interprétation cohomologique des constantes locales et fin de la preuve de la formule du produit pour* $\varepsilon(\mathrm{X}, \mathrm{K})$.

(3.5.1) Soient T et T′ deux traits henséliens d'égale caractéristique p, à corps résiduel $k \supset \mathbf{F}_q$ fini, munis d'uniformisantes π et π' respectivement; on considère la transformation de Fourier locale

$$\mathscr{F}^{(0,\infty')} : \mathscr{G} \to \mathscr{G}'_{[0,1[}$$

définie en (2.4) (relative au caractère ψ fixé en (0.2)).

Pour tout $\mathrm{V} \in \mathrm{ob}\,\mathscr{G}$, on dispose alors de deux nombres ℓ-adiques

a) La constante locale modifiée (cf. (3.1.5))

$$\varepsilon_0(\mathrm{T}, \mathrm{V}, d\pi) \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times,$$

b) La valeur en $\pi' \in \mathrm{K}_{t'}^\times$ du caractère de $\mathrm{K}_{t'}^\times$ déduit de $\det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\mathrm{V}))$ *via* l'homomorphisme de réciprocité $i_{\mathrm{K}_{t'}} : \mathrm{K}_{t'}^\times \to \mathrm{G}'^{\mathrm{ab}}$ (cf. (3.1.4)) que l'on notera simplement

$$\det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\mathrm{V}))\,(\pi') \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times.$$

On a alors l'interprétation cohomologique suivante des constantes locales :

Théorème **(3.5.1.1)**. — *Pour tout* G-*module* V,

$$\varepsilon_0(\mathrm{T}, \mathrm{V}, d\pi) = (-1)^{r(\mathrm{V})+s(\mathrm{V})}.\det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\mathrm{V}))\,(\pi').$$

(3.5.2) Admettons provisoirement (3.5.1.1) et terminons la preuve de la formule du produit pour $\varepsilon(\mathrm{X}, \mathrm{K})$. D'après (3.3.2), il suffit de démontrer le théorème (3.3.1.2). Or on a montré l'existence d'un isomorphisme canonique de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/\mathbf{F}_q)$-module de rang 1

$$\det(\mathrm{R}\Gamma_c(\mathrm{U}\otimes_{\mathbf{F}_q}\bar{k}, \mathrm{F})\,[1]) \otimes \det(\mathrm{F}_{\overline{\infty}}(-1)) \simeq \bigotimes_{s\in\mathrm{S}} \det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\pi_{s*}(\mathrm{F}\mid\eta_s)))_{\pi'}$$

(cf. (3.4.2)) et on a

$$- \chi_c(\mathrm{U} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, \mathrm{F}) + r(\mathrm{F}_{\bar{\infty}}) = \sum_{s \in \mathrm{S}} \deg(s) . a_s(j_! \, \mathrm{F})$$

(cf. (2.2.1.2)), de sorte que

$$\begin{aligned}&\det(- \mathrm{Frob}_q, \mathrm{R}\Gamma_c(\mathrm{U} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, \mathrm{F}))^{-1} \, q^r \det(- \mathrm{Frob}_q, \mathrm{F}_{\bar{\infty}}) \\ &\qquad = \prod_{s \in \mathrm{S}} (-1)^{\deg(s) . a_s(j_! \mathrm{F})} \operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_q, \det(\mathscr{F}^{(0, \infty')}(\pi_{s*}(\mathrm{F} \mid \eta_s)))_{\bar{\pi}'}).\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que, pour tout $s \in \mathrm{S}$, on a

$$\begin{aligned}&\varepsilon_0(\mathrm{D}_{(s)}, \mathrm{F} \mid \eta_s, \omega_0 \mid \mathrm{D}_{(s)}) \\ &\qquad = (-1)^{\deg(s) a_s(j_! \mathrm{F})} \operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_q, \det(\mathscr{F}^{(0, \infty')}(\pi_{s*}(\mathrm{F} \mid \eta_s)))_{\bar{\pi}'}).\end{aligned}$$

Or, $$\varepsilon_0(\mathrm{D}_{(s)}, \mathrm{F} \mid \eta_s, \omega_0 \mid \mathrm{D}_{(s)}) = \varepsilon_0(\mathrm{T}, \pi_{s*}(\mathrm{F} \mid \eta_s), - d\pi)$$

(d'après (3.1.5.4) (iv), il suffit de vérifier cette formule pour $\mathrm{F} \mid \eta_s = \overline{\mathbf{Q}}_\ell$; dans ce cas, le premier membre de la formule vaut trivialement -1 et le second membre se calcule par (3.1.5.6)); par suite, pour achever la preuve de (3.3.1.2), il suffit d'appliquer (3.5.1.1) et le lemme suivant :

Lemme **(3.5.2.1).** — *Pour tout* G'*-module* V' *de rang* 1 *et modérément ramifié, on a*

$$\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_q, \mathrm{V}'_{\bar{\pi}'}) = \mathrm{V}'(-\pi')$$

où $\mathrm{V}'_{\bar{\pi}'}$ *est la fibre en* $\bar{1}'$ *du prolongement canonique de* $\pi'_* \mathrm{V}'$ $(\pi' : \mathrm{T}' \to \mathrm{D}'_{(\infty')}, \ \pi' \mapsto 1/x')$ *en un* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau lisse de rang* 1 *sur* $\mathrm{A}' - \{0'\}$ *qui est modérément ramifié en* 0' (cf. (2.2.2.1)) *et où* $\mathrm{V}'(-\pi')$ *est la valeur en* $-\pi' \in \mathrm{K}_{t'}^\times$ *du caractère de* $\mathrm{K}_{t'}^\times$ *déduit de* V' *par l'homomorphisme de réciprocité* $i_{\mathrm{K}_{t'}} : \mathrm{K}_{t'}^\times \to \mathrm{G}'^{\mathrm{ab}}$ (cf. (3.1.4)).

Preuve. — Par l'homomorphisme de réciprocité global pour $\mathrm{K} = \mathbf{F}_q(x')$,

$$i_{\mathrm{K}} : \mathbf{A}^\times / \mathrm{K}^\times \to \operatorname{Gal}(\bar{\mathrm{K}}/\mathrm{K})^{\mathrm{ab}},$$

le prolongement canonique induit un caractère $\chi : \mathbf{A}^\times / \mathrm{K}^\times \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ tel que $\chi(\mathcal{O}_{s'}^\times) = 1$, pour tout $s' \in |\mathrm{A}'| - \{0'\}$, $\chi(1 + \mathfrak{m}_{0'}) = 1$, $\chi(1 + \mathfrak{m}_{\infty'}) = 1$ et $\chi(-(1/x')_{\infty'}) = \mathrm{V}(-\pi')$ (on a noté $(-)_{s'}$ le plongement de $\mathrm{K}^\times$ dans $\mathrm{K}_{s'}^\times$). Or

$$1 = \chi(1 - x') = \prod_{s' \in |\mathrm{D}'|} \chi((1 - x')_{s'})$$

et
$$\begin{aligned}&\chi((1 - x')_{s'}) = 1, \quad \forall \, s' \in |\mathrm{A}'| - \{1'\} \\ &\chi((1 - x')_{1'}) = \operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_q, \mathrm{V}'_{\bar{\pi}'}) \\ &\chi((1 - x')_{\infty'}) = \chi(-(1/x')_{\infty'})^{-1}\end{aligned}$$

(puisque $1 - x' = -(1 - (1/x'))(1/x')^{-1}$), d'où le lemme.

(3.5.3) *Preuve de* (3.5.1.1).

(3.5.3.1) *Cas où* V *est modérément ramifié.*

On peut supposer V irréductible : les deux membres de la formule à démontrer sont multiplicatifs sur les suites exactes courtes en V (cf. (3.1.5.7) et (2.4.3) (i) a)).

On peut supposer V de rang 1. En effet, tout G-module irréductible modérément ramifié est de la forme $f_{\eta *} V_1$ pour k_1 une extension finie séparable de k contenue dans $\bar{k}$, pour $f: T_1 = T \otimes_k k_1 \to T$ le morphisme non ramifié de traits correspondant et pour V_1 un G_1-module modérément ramifié de rang 1 ($f_\eta : \eta_1 = \eta \otimes_k k_1 \to \eta$ et $G_1 = \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta_1)$). Or, si π_1 est l'uniformisante de T_1 induite par π, on a

$$\varepsilon_0(T, V, d\pi) = \varepsilon_0(T_1, V_1, d\pi_1)$$

(d'après (3.1.5.4) (iv), il suffit de vérifier cette formule pour $V_1 = \overline{\mathbf{Q}}_\ell$; dans ce cas, les deux membres de la formule valent -1 : trivialement pour le second et d'après (3.1.5.6) pour le premier) et on a, avec des notations évidentes,

$$\mathscr{F}^{(0,\infty')}(V) \simeq f'_{\eta'_*} \mathscr{F}^{(0_1,\infty'_1)}(V_1),$$

où $f' : T'_1 = T' \otimes_k k_1 \to T'$ est la projection canonique (cf. [SGA 7] XIII (2.1.7.1)), de sorte que

$$\det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(V))\,(\pi) = (-1)^{[k_1:k]-1} \det(\mathscr{F}^{(0'_1,\infty'_1)}(V_1))\,(\pi'_1),$$

où π'_1 est l'uniformisante de T'_1 induite par π'. D'où l'assertion, puisque $r(V) = [k_1 : k]$, $r(V_1) = 1$ et $s(V) = s(V_1) = 0$.

On peut supposer V de la forme $V_\chi = \mathscr{K}_\chi(\pi)$ pour un caractère $\chi : k^\times \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ (les notations sont celles de (2.5.3.1)). En effet, tout G-module modérément ramifié de rang 1 est de la forme $V = V_\chi \otimes W$ pour un $\chi : k^\times \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ et pour un G-module non ramifié de rang 1, W. Or

$$\varepsilon_0(T, V_\chi \otimes W, d\pi) = \det(W)\,(\pi) . \varepsilon_0(T, V_\chi, d\pi)$$

(cf. (3.1.5.6)) et

$$\mathscr{F}^{(0,\infty')}(V_\chi \otimes W) \simeq \mathscr{F}^{(0,\infty')}(V_\chi) \otimes W',$$

où W′ est l'unique G′-module non ramifié de rang 1 correspondant au même $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-module que W, de sorte que

$$\det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(V_\chi \otimes W))\,(\pi') = \det(W)\,(\pi) . \det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(V_\chi))\,(\pi')$$

($r(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(V_\chi)) = 1$, d'après (2.5.3.1)). D'où l'assertion.

Plaçons-nous donc dans le cas $V = V_\chi$. Alors, d'après (2.5.3.1), on a, pour χ trivial,

$$\mathscr{F}^{(0,\infty')}(V_\chi) = \overline{\mathbf{Q}}_\ell$$

et, pour χ non trivial,

$$\mathscr{F}^{(0,\infty')}(V_\chi) = V'_\chi \otimes G(\chi, \psi)$$

(avec les notations de *loc. cit.*). Or

$$\varepsilon_0(T, V_\chi, d\pi) = \begin{cases} -1 & \text{si } \chi \text{ est trivial} \\ \chi(-1) \sum_{a \in k^\times} \chi(a)\, \psi_k(a) & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\psi_k = \psi \circ \mathrm{Tr}_{k/\mathbf{F}_p}$: en effet, compte tenu de (3.1.5.4) (v), il suffit de remarquer que le caractère $\widetilde{\chi} : K_t^\times \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ induit par V_χ *via* l'homomorphisme de réciprocité $i_{K_t} : K_t^\times \to G^{ab}$ (cf. (3.1.4)) est donné par les formules

$$\begin{cases} \widetilde{\chi}(a) = \chi^{-1}(a) & \text{si } a \in k^\times \subset K_t^\times \\ \widetilde{\chi}(\pi) = \chi(-1) \\ \widetilde{\chi}(1 + \mathfrak{m}_t) = \{1\} \end{cases}$$

(on applique la théorie du corps de classes abélien globale au $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau de Kummer $\mathscr{K}_\chi$ sur $\mathbf{G}_{m,k}$; les détails sont laissés au lecteur). Par suite, (3.5.1.1), pour $V = V_\chi$, est trivial, si χ est trivial, et résulte de la formule des traces de Grothendieck

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_k, G(\chi, \psi)) = -\sum_{a \in k^\times} \chi(a)\, \psi_k(a),$$

si χ est non trivial ($V'_\chi(\pi') = \chi(-1)$).

(3.5.3.2) *Cas général.*

On peut supposer V irréductible (voir (3.5.3.1)) et donc que le groupe d'inertie $I \subset G$ agit à travers un quotient fini (d'après le théorème de monodromie de Grothendieck ([SGA 7] I et [De 4] (1.7)), un sous-groupe ouvert $I_1 \subset I$, qu'on peut supposer distingué, agit de façon unipotente; alors $V^{I_1} \neq 0$ et comme V^{I_1} est I-stable, $V^{I_1} = V$).

Soient D la complétion projective naturelle de $A = \mathrm{Spec}(k[x])$, $\pi : \eta \to \eta_0$ le k-morphisme qui envoie π sur $x/(1-x)$ et F le prolongement canonique de $\pi_* V$ à $D - \{0, 1\}$: F est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur $D - \{0, 1\}$ à *monodromie géométrique finie*, modérément ramifié en 1 et tel que $F \mid \eta_0 \simeq \pi_* V$ (cf. (2.2.2.2)).

D'après (3.2.1.7), on a la formule du produit (cf. (3.3.1.2))

$$\begin{aligned} &\det(-\mathrm{Frob}_k, R\Gamma_c(A \otimes_k \bar{k} - \{\bar{0}, \bar{1}\}, F))^{-1} q^{r(F)} \det(-\mathrm{Frob}_\infty, F_{\bar{\infty}}) \\ &\qquad = \varepsilon_0(T, V, -d\pi) . \varepsilon_0(D_{(1)}, F \mid \eta_1, -dx \mid D_{(1)}). \end{aligned}$$

D'autre part, d'après (3.4.2) et (3.5.2.1), on a

$$\begin{aligned} &\det(-\mathrm{Frob}_k, R\Gamma_c(A \otimes_k \bar{k} - \{\bar{0}, \bar{1}\}, F))^{-1} q^{r(F)} \det(-\mathrm{Frob}_\infty, F_{\bar{\infty}}) \\ &\qquad = (-1)^{r(V)+s(V)} \det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(V))(-\pi') . (-1)^{r(F)} \det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\pi_{1*}(F \mid \eta_1)))(-\pi'). \end{aligned}$$

Or, d'après (3.5.3.1), on a

$$\varepsilon_0(\mathrm{D}_{(1)}, \mathrm{F} \mid \eta_1, -dx \mid \mathrm{D}_{(1)}) = (-1)^{r(\mathrm{F})} \det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\pi_{1*}(\mathrm{F} \mid \eta_1)))(-\pi')$$

($dx = d\pi_1$, où $\pi_1 = x - 1$). D'où le théorème (3.5.1.1).

(3.6) *Constantes locales et transformations de Fourier locales.*

(3.6.1) Soient T, T′ deux traits henséliens d'égale caractéristique p, à corps résiduel fini $k = \mathbf{F}_q$, munis d'uniformisantes π, π' respectivement, comme au numéro (2.4) dont on reprend les notations.

Alors, à tout G-module V, on peut associer deux entiers, à savoir sa dimension $r(\mathrm{V})$ sur $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ et son conducteur de Swan $s(\mathrm{V})$, et trois nombres ℓ-adiques non nuls, à savoir :

(3.6.1.1) Son *déterminant* $\delta(\mathrm{V})$ défini par

$$\delta(\mathrm{V}) = (-1)^{r(\mathrm{V})} \det(\mathrm{V})(\pi) \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times,$$

(3.6.1.2) Son *signe* $\sigma(\mathrm{V})$ défini par

$$\sigma(\mathrm{V}) = \det(\mathrm{V})(-1) \in \{\pm 1\} \subset \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$$

(3.6.1.3) Sa *constante* $\varepsilon_0(\mathrm{V})$ définie par

$$\varepsilon_0(\mathrm{V}) = \varepsilon_0(\mathrm{T}, \mathrm{V}, d\pi) \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$$

(on a identifié $\det(\mathrm{V})$ à un caractère $\det(\mathrm{V}) : \mathrm{K}_t^\times \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ *via* l'homomorphisme de réciprocité $i_{\mathrm{K}_t} : \mathrm{K}_t^\times \to \mathrm{G}^{\mathrm{ab}}$, cf. (3.1.4), et $\varepsilon_0(\mathrm{T}, \mathrm{V}, d\pi)$ est la constante locale modifiée de Deligne, cf. (3.1.5)).

Bien entendu, ces notations valent aussi pour $\mathrm{V}' \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}'$ (on remplace T par T′, π par π' et V par V′).

Théorème **(3.6.2)**. — (i) *Soient* $\mathrm{V} \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}$ *et* $\mathrm{V}' = \mathscr{F}^{(0,\infty')}(\mathrm{V})$, *alors on a les formules suivantes :*

a) $\delta(\mathrm{V}') = \varepsilon_0(\mathrm{V})$,

b) $\sigma(\mathrm{V}') = \sigma(\mathrm{V})$,

c) $\varepsilon_0(\mathrm{V}') = q^{s(\mathrm{V})}\, \delta(\mathrm{V})^{-1}\, \varepsilon_0(\mathrm{V})^2$.

(ii) *Soient* $\mathrm{V} \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}_{[0,1[}$ *et* $\mathrm{V}' = \mathscr{F}^{(\infty,0')}(\mathrm{V})$, *alors on a les formules suivantes :*

a) $\delta(\mathrm{V}') = q^{r(\mathrm{V})}\, \delta(\mathrm{V})^2\, \sigma(\mathrm{V})^{-1}\, \varepsilon_0(\mathrm{V})^{-1}$,

b) $\sigma(\mathrm{V}') = \sigma(\mathrm{V})$,

c) $\varepsilon_0(\mathrm{V}') = q^{r(\mathrm{V})}\, \sigma(\mathrm{V})\, \delta(\mathrm{V})$.

(iii) *Soient* $\mathrm{V} \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}_{]1,\infty[}$ *et* $\mathrm{V}' = \mathscr{F}^{(\infty,\infty')}(\mathrm{V})$, *alors on a les formules suivantes :*

a) $\delta(\mathrm{V}') = q^{r(\mathrm{V})}\, \delta(\mathrm{V})^{-2}\, \sigma(\mathrm{V})\, \varepsilon_0(\mathrm{V})$,

b) $\sigma(\mathrm{V}') = \sigma(\mathrm{V})$,

c) $\varepsilon_0(\mathrm{V}') = q^{s(\mathrm{V}) - 2r(\mathrm{V})}\, \delta(\mathrm{V})^{-3}\, \varepsilon_0(\mathrm{V})^2$.

Preuve. — Remarquons tout d'abord qu'il suffit de démontrer les assertions (i) a), (ii) a) et (iii) a). En effet, les formules (i) b), (ii) b) et (iii) b) s'en déduisent en échangeant π en $-\pi$ et donc π' en $-\pi'$ ($\delta(V)$ et $\delta(V')$ sont transformés en $\sigma(V)\,\delta(V)$ et $\sigma(V')\,\delta(V')$ respectivement alors que $\varepsilon_0(V)$ est transformé en $\sigma(V)\,\varepsilon_0(V)$, cf. (3.1.5.5)). D'autre part, les formules (i) c), (ii) c) et (iii) c) se déduisent des formules (i) a), (ii) a) et (iii) a), compte tenu des propriétés « d'involutivité » des transformations de Fourier locales (cf. (2.4.3) (i) c), (ii) c) et (iii) c)); les détails sont laissés au lecteur.

La formule (i) a) n'est autre que (3.5.1.1) puisque $r(V') = r(V) + s(V)$ (cf. (2.4.3) (i) b)).

Prouvons maintenant (ii) a). Nous utiliserons un argument global. Soient $A = \mathrm{Spec}(k[x])$ et F un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur $A - \{0\}$ tel que

$$\pi^*(F \mid \eta_\infty) \simeq V$$

où $\pi : \eta \to \eta_\infty$, $\pi \mapsto 1/x = \pi_\infty$ (un tel F existe d'après (2.2.2.2); nous ne supposons pas F modérément ramifié en 0 car c'est inutile pour notre argument). On note $j : A - \{0\} \hookrightarrow A$ l'inclusion et K' le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau pervers sur $A' = \mathrm{Spec}(k[x'])$ transformé de Fourier de $j_!\,F[1]$ (cf. (1.4) pour les notations). D'après (2.3.2) et (2.4.2.1) (ii), on a un triangle distingué dans $D^b_c(\eta_{0'}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$

$$K'_{\bar{0}'} \to K'_{\bar{\eta}_{0'}} \to \pi'_*\,V'[1] \to$$

où $\pi' : \eta' \to \eta_{0'}$, $\pi' \mapsto x' = \pi_{0'}$. Par suite, puisque

$$K'_{\bar{0}'} = R\Gamma_c(A \otimes_k \bar{k} - \{\bar{0}\}, F)\,[2]$$

(changement de base propre), on a l'égalité

$$\delta(V') = (-1)^{r(V')} \det(\mathrm{Frob}_q, R\Gamma_c(A \otimes_k \bar{k} - \{\bar{0}\}, F))\,(\det(K'_{\bar{\eta}_{0'}})\,(\pi_{0'}))^{-1}.$$

D'autre part, la formule du produit (3.2.1.1) étant maintenant démontrée, on peut l'appliquer à notre situation ($X = D$, $\omega = dx$ et $K = \alpha_! j_!\,F$) et on obtient la formule

$$\begin{aligned}\det(-\,\mathrm{Frob}_q, R\Gamma_c(A \otimes_k \bar{k} - \{\bar{0}\}, F)\,[1]) \\ = q^{r(F)}\,\varepsilon_0(D_{(0)}, F \mid \eta_0, d\pi_0)\,.\,\varepsilon_0\left(D_{(\infty)}, F \mid \eta_\infty, -\frac{d\pi_\infty}{\pi_\infty^2}\right),\end{aligned}$$

où $\pi_0 = x$. Comme

$$\chi_c(A \otimes_k \bar{k} - \{\bar{0}\}, F) = -\,s(F \mid \eta_0) - s(V),$$

d'après (2.2.1.2), que $r(F) = r(V)$, que

$$\varepsilon_0(D_{(0)}, F \mid \eta_0, d\pi_0) = (-1)^{r(F \mid \eta_0) + s(F \mid \eta_0)} \det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(F \mid \eta_0))\,(\pi_{\infty'})$$

où $\pi_{\infty'} = 1/x'$ et où $\mathscr{F}^{(0,\infty')}$ est la transformation de Fourier locale de $(D_{(0)}, \pi_0)$ à $(D'_{(\infty')}, \pi_{\infty'})$, d'après (3.5.1.1), et que

$$\varepsilon_0\left(D_{(\infty)}, F \mid \eta_\infty, -\frac{d\pi_\infty}{\pi_\infty^2}\right) = q^{-2r(V)}\,\delta(V)^{-2}\,\sigma(V)\,\varepsilon_0(V)$$

d'après (3.1.5.5), on en déduit que

$$\begin{aligned}&\det(\mathrm{Frob}_q, \mathrm{R}\Gamma_c(\mathrm{A}\otimes_k \bar{k} - \{\bar{0}\}, \mathrm{F}))\\ &\quad = (-1)^{s(\mathrm{V})-r(\mathrm{V})} q^{r(\mathrm{V})} \delta(\mathrm{V})^2 \sigma(\mathrm{V})^{-1} \varepsilon_0(\mathrm{V})^{-1}(\det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\mathrm{F} \mid \eta_0))(\pi'_\infty))^{-1}.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour achever la preuve de (ii) a), il ne reste plus qu'à démontrer l'égalité

$$\det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(\mathrm{F} \mid \eta_0))\ (\pi_{\infty'}) = (\det(\mathrm{K}'_{\bar{\eta}_{0'}})\ (\pi_{0'}))^{-1}$$

(on a $r(\mathrm{V}') = r(\mathrm{V}) - s(\mathrm{V})$ d'après (2.4.3) (ii) b)). Or, on sait que $\mathrm{K}' \mid \mathrm{A}' - \{0'\} = \mathrm{F}'[1]$ pour un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse F' sur $\mathrm{A}' - \{0'\}$ (cf. (2.3.1.3) (i)) et que

$$\mathrm{F}'_{\bar{\eta}_{\infty'}} \simeq \mathscr{F}^{(0,\infty')}(\mathrm{F} \mid \eta_0),$$

d'après (2.3.3.1), (2.4.2.1) et (2.4.3) (iii) b). Par suite, l'égalité qu'il reste à démontrer se réécrit

$$(\det(\mathrm{F}')_{\bar{\eta}_{\infty'}})\ (\pi_{\infty'}) = (\det(\mathrm{F}')_{\bar{\eta}_{0'}})\ (\pi_{0'})$$

où $\det(\mathrm{F}')$ est maintenant un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur $\mathrm{A}' - \{0'\}$. Cette dernière formule résulte du corps de classes abélien : en effet, si $\mathrm{K} = k(x')$ et si $\chi : \mathbf{A}^\times/\mathrm{K} \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ est le caractère déduit de $\det(\mathrm{F}')$ *via* l'homomorphisme de réciprocité $i_\mathrm{K} : \mathbf{A}^\times/\mathrm{K} \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})^{\mathrm{ab}}$ (cf. (3.1.4)), on a

$$1 = \prod_{s' \in |\mathrm{D}'|} \chi((x')_{s'}) = \chi(\pi_{0'}) \cdot \chi(1/\pi_{\infty'}),$$

où $(-)_{s'}$ est le plongement de $\mathrm{K}^\times$ dans $\mathrm{K}_{s'}^\times$ pour tout $s' \in |\mathrm{D}'|$. Ceci achève la preuve de (ii) a).

Prouvons finalement (iii) a). De nouveau, nous utiliserons un argument global. Soient $\mathrm{A} = \mathrm{Spec}(k[x])$ et F un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur $\mathrm{A} - \{0\}$ tel que

$$\pi^*(\mathrm{F} \mid \eta_\infty) \simeq \mathrm{V},$$

où $\pi : \eta \to \eta_\infty$, $\pi \mapsto 1/x = \pi_\infty$ (un tel F existe d'après (2.2.2.2) et, comme dans la preuve de (ii) a), nous ne supposons pas F modérément ramifié en 0). On note $j : \mathrm{A} - \{0\} \hookrightarrow \mathrm{A}$ l'inclusion et K' le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau pervers sur $\mathrm{A}' = \mathrm{Spec}(k[x'])$ transformé de Fourier de $j_!\,\mathrm{F}[1]$ (cf. (1.4) pour les notations). D'après (2.3.3.1) et (2.4.2.1), on a canoniquement

$$\mathrm{K}'_{\bar{\eta}_{\infty'}} \simeq \pi'_*\,\mathrm{V}'[1] \oplus \mathscr{F}^{(0,\infty')}(\mathrm{F} \mid \eta_0)\ [1],$$

où $\pi' : \eta' \to \eta_{\infty'}$, $\pi' \mapsto 1/x' = \pi_{\infty'}$ et où $\mathscr{F}^{(0,\infty')}$ est la transformation de Fourier locale de $(\mathrm{D}_{(0)}, \pi_0)$ à $(\mathrm{D}'_{(\infty')}, \pi_{\infty'})$ $(\pi_0 = x)$. De plus, on sait que $\mathrm{K}' = \mathrm{F}'[1]$ pour un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse F' sur A' (cf. (2.3.1.3) (ii)), avec

$$\mathrm{F}'_{\bar{0}'} = \mathrm{R}\Gamma_c(\mathrm{A}\otimes_k \bar{k} - \{\bar{0}\}, \mathrm{F})\ [1]$$

(théorème de changement de base propre). Par suite

$$(\det(F')_{\bar{\eta}_{\infty'}})\,(\pi_{\infty'}) = (-1)^{-r(V')}\,\delta(V')\,\det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(F\mid\eta_0))\,(\pi_{\infty'})$$

et
$$(\det(F')_{\bar{\eta}_{0'}})\,(\pi_{0'}) = \det(\mathrm{Frob}_q, R\Gamma_c(A\otimes_k\bar{k}-\{\bar{0}\}, F))^{-1}.$$

Comme

$$\varepsilon_0(D_{(0)}, F\mid\eta_0, d\pi_0) = (-1)^{r(F\mid\eta_0)+s(F\mid\eta_0)}\det(\mathscr{F}^{(0,\infty')}(F\mid\eta_0))\,(\pi_{\infty'}),$$

d'après (3.5.1.1), que $r(F\mid\eta_0) = r(V)$ et que $r(V') = s(V) - r(V)$ (cf. (2.4.3) (iii) b)), la première des formules ci-dessus se réécrit

$$(\det(F')_{\bar{\eta}_{\infty'}})\,(\pi_{\infty'}) = (-1)^{-s(V)-s(F\mid\eta_0)}\,\delta(V')\,\varepsilon_0(D_{(0)}, F\mid\eta_0, d\pi_0).$$

D'autre part, la formule du produit (3.2.1.1) étant maintenant démontrée, on peut l'appliquer à notre situation ($X = D$, $\omega = dx$ et $K = \alpha_! j_! F$) et on obtient

$$\begin{aligned}\det(-\mathrm{Frob}_q, R\Gamma_c(A\otimes_k\bar{k}-\{\bar{0}\}, F)\,[1])\\ = q^{r(F)}\,\varepsilon_0(D_{(0)}, F\mid\eta_0, d\pi_0)\,.\,\varepsilon_0\left(D_{(\infty)}, F\mid\eta_\infty, -\frac{d\pi_\infty}{\pi_\infty^2}\right),\end{aligned}$$

où $\pi_\infty = 1/x$. Comme

$$\chi_c(A\otimes_k\bar{k}-\{\bar{0}\}, F) = -s(F\mid\eta_0) - s(V),$$

d'après (2.2.1.2), que $r(F) = r(V)$ et que

$$\varepsilon_0\left(D_{(\infty)}, F\mid\eta_\infty, -\frac{d\pi_\infty}{\pi_\infty^2}\right) = q^{-2r(V)}\,\delta(V)^{-2}\,\sigma(V)\,\varepsilon_0(V),$$

d'après (3.1.5.5), la seconde formule ci-dessus se réécrit

$$\begin{aligned}(\det(F')_{\bar{\eta}_{0'}})\,(\pi_{0'})\\ = (-1)^{-s(V)-s(F\mid\eta_0)}\,q^{-r(V)}\,\delta(V)^{-2}\,\sigma(V)\,\varepsilon_0(V)\,\varepsilon_0(D_{(0)}, F\mid\eta_0, d\pi_0).\end{aligned}$$

On conclut la preuve de (iii) a) et donc du théorème (3.6.2) en remarquant que l'argument de corps de classes abélien dégagé à la fin de la preuve de (ii) a) implique ici aussi que

$$(\det(F')_{\bar{\eta}_{0'}})\,(\pi_{0'}) = (\det(F')_{\bar{\eta}_{\infty'}})\,(\pi_{\infty'}).$$

4. Une autre démonstration du théorème principal de Deligne dans « La conjecture de Weil. II »

(4.1) *Rappel de l'énoncé* ([De 4]).

(4.1.1) Fixons un isomorphisme de corps $\iota : \overline{\mathbf{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$ et notons $|\ |$ la valeur absolue usuelle de $\mathbf{C}$ ($|z| = (z.\bar{z})^{1/2}$).

Définition (**4.1.2**). — *Soient* X *un schéma de type fini sur* $\mathbf{F}_q$. *Un* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau lisse* F *sur* X *est dit* ι*-pur s'il existe un nombre réel* w *tel que, pour tout point fermé* x *de* X *et toute valeur propre* α *de* Frob_x *agissant sur* F (cf. (0.9)), *on ait*

$$|\,\iota(\alpha)\,| = q^{\deg(x)\,w/2};$$

le nombre réel w *est alors appelé le* ι*-poids de* F.

En particulier, un $\mathrm{Gal}(\bar{k}/\mathbf{F}_q)$-module H est dit ι-pur de ι-poids $w \in \mathbf{R}$ si, pour toute valeur propre α de Frob_q agissant sur H on a $|\,\iota(\alpha)\,| = q^{w/2}$.

Rappelons l'énoncé du théorème principal de Deligne ([De 4] (3.2.3)) :

Théorème (**4.1.3**) (Deligne). — *Soient* X *une courbe projective et lisse sur* $\mathbf{F}_q$, $j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$ *un ouvert dense et* F *un* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau lisse et* ι*-pur de* ι*-poids* $w \in \mathbf{Z}$ *sur* U. *Alors le* $\mathrm{Gal}(\bar{k}/\mathbf{F}_q)$*-module* $\mathrm{H}^i(\mathrm{X} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F})$ *est* ι*-pur de* ι*-poids* $w + i$ *pour tout entier* i.

Rappelons aussi que ce résultat entraîne la partie suivante des conjectures de Weil ([De 4] (3.3.9)) :

Corollaire (**4.1.3.1**) (Deligne). — *Soit* X *une variété propre et lisse sur* $\mathbf{F}_q$. *Pour chaque entier* i, *le polynôme caractéristique* $\det(t - \mathrm{Frob}_q, \mathrm{H}^i(\mathrm{X} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell))$ *est à coefficients entiers et indépendants de* ℓ ($\ell \neq p$). *Les racines complexes* α *de ce polynôme sont de valeur absolue* $|\,\alpha\,| = q^{i/2}$.

Le but de cette partie IV est de donner une autre démonstration de (4.1.3) en utilisant la transformation de Fourier-Deligne.

(**4.2**) *Un critère de pureté et monodromie locale des* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceaux purs : rappels* ([De 4]).

Nous utiliserons de manière essentielle deux outils dus à Deligne.

(**4.2.1**) Le premier (et le plus profond) est un critère de pureté qui est prouvé et utilisé par Deligne aussi bien dans « La conjecture de Weil. I » ([De 3] (3.2)) que dans « La conjecture de Weil. II » ([De 4] (1.5.1)).

Définition (**4.2.1.1**). — *Soient* X *un schéma de type fini sur* $\mathbf{F}_q$. *Un* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau lisse* F *sur* X *est dit* ι*-réel si, pour tout point fermé* x *de* X, *le polynome*

$$\iota \det(1 - t\,\mathrm{Frob}_x, \mathrm{F}) \in \mathbf{C}[t]$$

est à coefficients réels.

Remarque (**4.2.1.2**). — Tout $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse F, qui est ι-pur de ι-poids entier w, est facteur direct d'un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse ι-réel, à savoir $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\vee(-w)$.

Réciproquement ([De 4] (1.5.1)) :

Théorème **(4.2.1.3)** (Deligne). — *Les sous-quotients lisses irréductibles de tout $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse ι-réel sur une courbe lisse et géométriquement connexe sur $\mathbf{F}_q$ sont ι-purs.*

(4.2.2) Le deuxième de ces outils est l'étude de la monodromie locale des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux ι-purs sur les courbes faites par Deligne dans [De 4] (1.8). Nous utiliserons plus précisément les résultats suivants :

Lemme **(4.2.2.1)** (Deligne). — *Soient* X *une courbe lisse et géométriquement connexe sur* $\mathbf{F}_q$ *et* $j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$ *un ouvert dense, complément d'un ensemble fini* S *de points fermés de* X. *Si* F *est un* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau lisse ι-pur de ι-poids $w \in \mathbf{R}$ sur* U, *alors, pour tout $s \in \mathrm{S}$ et pour toute valeur propre α de* Frob_s *agissant sur* $(j_* \mathrm{F})_{\bar{s}}$ *(resp.* $(\mathrm{R}^1 j_* \mathrm{F})_{\bar{s}}$*), on a l'estimation*

$$|\,\iota(\alpha)\,| \leqslant q^{\deg(s)w/2}$$

(resp. $$|\,\iota(\alpha)\,| \geqslant q^{\deg(s)(w+2)/2}).$$

Preuve. — La partie relative à $(j_* \mathrm{F})_{\bar{s}}$ n'est autre que [De 4] (1.8.1); la partie relative à $(\mathrm{R}^1 j_* \mathrm{F})_{\bar{s}}$ résulte de celle relative à $(j_* \check{\mathrm{F}})_{\bar{s}}$ et de la dualité locale ([SGA 5] I 5) qui fournit un accouplement parfait

$$(j_* \check{\mathrm{F}})_{\bar{s}} \otimes (\mathrm{R}^1 j_* \mathrm{F})_{\bar{s}} \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell(-1).$$

Lemme **(4.2.2.2)** (Deligne). — *Soient* $\mathrm{X}, j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$ *et* S *comme dans* (4.2.2.1). *Fixons un point $s \in \mathrm{S}$. Si* F *est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse ι-pur de ι-poids $w \in \mathbf{R}$ sur* U *tel que l'action de* I_s *sur* $\mathrm{F}_{\bar{\eta}_s}$ *soit unipotente d'échelon* 2, i.e. *que* I_s *agisse trivialement sur le quotient*

$$\mathrm{F}_{\bar{\eta}_s}/\mathrm{F}_{\bar{\eta}_s}^{\mathrm{I}_s},$$

alors, pour toute valeur propre α de Frob_s *agissant sur ce quotient, on a*

$$|\,\iota(\alpha)\,| = q^{\deg(s)(w+1)/2}.$$

Preuve. — Il s'agit d'un cas particulier de [De 4] (1.8.4).

Lemme **(4.2.2.3)** (Deligne). — *Soient* $\mathrm{X}, j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$ *et* S *comme dans* (4.2.2.1). *Si* F *est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse ι-pur de ι-poids $w \in \mathbf{Z}$, alors, pour tout $x \in |\,\mathrm{X}\,|$, on a*

$$\iota \det(1 - t\,\mathrm{Frob}_x, j_*(\mathrm{F} \oplus \check{\mathrm{F}}(-w))) \in \mathbf{R}[t].$$

Preuve. — Pour $x \notin \mathrm{S}$, c'est la remarque (4.2.1.2). Pour $x \in \mathrm{S}$, cela résulte de [De 4] (1.8.4) et (1.6.14). En effet, avec les notations de *loc. cit.*, $\mathrm{P}_i(\mathrm{F}_{\bar{\eta}_x})$ est ι-pur de ι-poids $w - i$ et

$$\mathrm{P}_i(\check{\mathrm{F}}_{\bar{\eta}_x}) = \mathrm{P}_i(\mathrm{F}_{\bar{\eta}_x})^\vee(i)\,;$$

donc, si α est valeur propre de Frob_x agissant sur $(j_* \mathrm{F})_{\bar{x}}$, il existe un entier $i \geqslant 0$ tel que $|\,\iota(\alpha)\,| = q^{\deg(x)(w-i)/2}$ et que $\alpha^{-1} q^{\deg(x)(w-i)}$ soit valeur propre de Frob_x agissant sur $(j_* \check{\mathrm{F}}(-w))_{\bar{x}}$; d'où la conclusion puisque

$$\iota(\alpha^{-1} q^{\deg(x)(w-i)}) = \overline{\iota(\alpha)}.$$

(4.3) *Réductions.*

(4.3.1) Le théorème (4.1.3) admet le corollaire suivant :

Corollaire **(4.3.1.1)**. — *Soient* $\mathrm{A} = \mathrm{Spec}(\mathbf{F}_q[x])$ *une droite vectorielle sur* $\mathbf{F}_q$, $j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{A}$ *un ouvert dense et* F *un* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau lisse* ι*-pur de* ι*-poids* $w \in \mathbf{Z}$ *sur* U. *On suppose en outre que* F *est irréductible, non ramifié à l'infini* (cf. (3.3.1.1)) *et non géométriquement constant. Alors, pour toute valeur propre* α *de* Frob_q *agissant sur* $\mathrm{H}^1_c(\mathrm{A} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F})$, *on a l'estimation*

$$| \iota(\alpha) | \leqslant q^{(w+1)/2}.$$

Preuve. — Si $\alpha : \mathrm{A} \hookrightarrow \mathrm{D}$ est la complétion projective naturelle de A ($\mathrm{D} = \mathrm{A} \cup \{\infty\}$), on a la suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{F}_{\bar{\infty}} \to \mathrm{H}^1_c(\mathrm{A} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{D} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, \alpha_* j_* \mathrm{F}) \to 0$$

où
$$\mathrm{F}_{\bar{\infty}} = (\alpha_* j_* \mathrm{F})_{\bar{\infty}}.$$

Or, d'après (4.1.3), $\mathrm{H}^1(\mathrm{D} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, \alpha_* j_* \mathrm{F})$ est ι-pur de ι-poids $w + 1$ et, d'après (4.2.2.1), pour toute valeur propre α de Frob_q agissant sur $\mathrm{F}_{\bar{\infty}}$, on a $| \iota(\alpha) | \leqslant q^{w/2}$ (en fait, on peut montrer que $\mathrm{F}_{\bar{\infty}}$ est ι-pur de ι-poids w), d'où la conclusion.

(4.3.2) Réciproquement, on a :

Proposition **(4.3.2.1)**. — *Le corollaire* (4.3.1.1) *implique le théorème* (4.1.3).

Preuve. — On peut supposer X = D en projetant j_* F sur D à l'aide d'une fonction méromorphe non constante $f : \mathrm{X} \to \mathrm{D}$.

On peut supposer que le point rationnel $\infty \in \mathrm{D}(\mathbf{F}_q)$ est dans U : il suffit de démontrer (4.1.3) après une quelconque extension finie des scalaires $\mathbf{F}_q \to \mathbf{F}_{q^n}$.

Il suffit alors de vérifier que pour toute valeur propre α de Frob_q agissant sur $\mathrm{H}^i(\mathrm{D} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F})$ ($i \in \mathbf{Z}$), on a l'estimation

$$| \iota(\alpha) | \leqslant q^{(w+i)/2} :$$

en effet, la dualité de Poincaré sur les courbes ([SGA 4 ½] [Dualité] et [SGA 5] I) fournit des accouplements parfaits ($i \in \mathbf{Z}$)

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{D} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F}) \otimes \mathrm{H}^{2-i}(\mathrm{D} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \check{\mathrm{F}}) \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell(-1).$$

De plus, comme on a la suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{H}^0_c(\mathrm{A} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{D} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F}) \to \mathrm{F}_{\bar{\infty}} \\ &\to \mathrm{H}^1_c(\mathrm{A} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{D} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F}) \to 0 \\ &\to \mathrm{H}^2_c(\mathrm{A} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F}) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{D} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F}) \to 0, \end{aligned}$$

il suffit de vérifier la même estimation pour les valeurs propres α de Frob_q agissant sur $\mathrm{H}^i_c(\mathrm{A} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F})$ ($i \in \mathbf{Z}$).

On notera encore par $j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{A}$ l'ouvert $\mathrm{U} - \{\infty\}$ de A et par F la restriction de F à $\mathrm{U} - \{\infty\}$.

On peut supposer F irréductible. En effet, si on a une suite exacte courte de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux lisses sur U

$$0 \to \mathrm{F}' \to \mathrm{F} \to \mathrm{F}'' \to 0$$

avec F ι-pur de ι-poids $w \in \mathbf{Z}$, F' et F'' sont aussi ι-purs de ι-poids w et on a la suite exacte longue

$$0 \to j_* \mathrm{F}' \to j_* \mathrm{F} \to j_* \mathrm{F}'' \xrightarrow{\partial} \mathrm{R}^1 j_* \mathrm{F}'.$$

Or, d'après (4.2.2.1), $\partial = 0$, de sorte que l'on a les suites exactes ($i \in \mathbf{Z}$)

$$\mathrm{H}^i_c(\mathrm{A} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F}') \to \mathrm{H}^i_c(\mathrm{A} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F}) \to \mathrm{H}^i_c(\mathrm{A} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F}'')\,;$$

d'où l'assertion.

Enfin, si F est géométriquement constant de valeur le $\mathrm{Gal}(\bar{k}/\mathbf{F}_q)$-module M, on a

$$\mathrm{H}^i_c(\mathrm{A} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F}) = 0, \quad \text{si } i \neq 2,$$

et

$$\mathrm{H}^2_c(\mathrm{A} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F}) = \mathrm{M}(-1)\,;$$

d'où la conclusion dans ce cas.

Le théorème (4.1.3) résulte donc bien de son corollaire (4.3.1.1).

(4.4) *Preuve du corollaire* (4.3.1.1) *à l'aide de la transformation de Fourier-Deligne.*

Considérons la transformation de Fourier-Deligne $\mathscr{F}$ de A vers $\mathrm{A}' = \mathrm{Spec}(\mathbf{F}_q[x'])$ relative au caractère ψ fixé en (0.2) (cf. (1.4)). D'après (1.4.2.1) (ii) et (2.3.1.3) (i), on a

$$\mathscr{F}(j_* \mathrm{F}[1]) = j'_* \mathrm{F}'[1],$$

où $j' : \mathrm{A}' - \{0'\} \hookrightarrow \mathrm{A}'$ est l'inclusion et où F' est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse irréductible sur $\mathrm{A}' - \{0'\}$.

De plus, d'après (2.3.2), (2.4.2.1) (ii), (2.5.3.1) (i) et le théorème de changement de base propre, la monodromie de F' en 0' est décrite par la suite exacte de $\mathrm{G}_{0'}$-modules

$$0 \to \mathrm{H}^1_c(\mathrm{A} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F}) \to \mathrm{F}'_{\bar{\eta}_{0'}} \to \mathrm{F}_{\bar{\infty}}(-1) \to 0,$$

où $\mathrm{I}_{0'}$ agit trivialement sur $\mathrm{H}^1_c(\mathrm{A} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F})$ et $\mathrm{F}_{\bar{\infty}}(-1)$ ($\mathrm{G}_{0'}$ agit donc à travers $\mathrm{Gal}(\bar{k}/\mathbf{F}_q)$ sur ces espaces) et où

$$(\mathrm{F}'_{\bar{\eta}_{0'}})^{\mathrm{I}_{0'}} = \mathrm{H}^1_c(\mathrm{A} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{k}, j_* \mathrm{F})$$

(on a en effet

$$\mathscr{F}^{(\infty, 0')}(\mathrm{F} \mid \eta_\infty) = \mathrm{F}_{\bar{\infty}} \otimes \mathscr{F}^{(\infty, 0')}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell) = \mathrm{F}_{\bar{\infty}}(-1)$$

si $\mathscr{F}^{(\infty, 0')}$ est la transformation de Fourier locale de $(\mathrm{D}_{(\infty)}, 1/x)$ vers $(\mathrm{D}'_{(0')}, x')$).

Par suite, si l'on sait par ailleurs que F' est ι-pur d'un certain ι-poids $w' \in \mathbf{R}$, on est dans les conditions d'application de (4.2.2.2) :

$$F'_{\bar{\eta}_{0'}}/(F'_{\bar{\eta}_{0'}})^{I_{0'}} = F_{\bar{\infty}}(-1)$$

est ι-pur de ι-poids $w' + 1$. Or, d'après (4.2.2.1) (appliqué à F et à $F^{\vee}$), $F_{\bar{\infty}}$ est ι-pur de ι-poids w, par suite

$$w' = w + 1$$

et on achève la preuve de (4.3.1.1) par une dernière application de (4.2.2.1).

Il suffit donc de démontrer que F' est ι-pur ou encore, en utilisant le critère de pureté (4.2.1.3), que F' est constituant d'un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse ι-réel G' sur $A' - \{0'\}$. Or on dispose d'un candidat naturel pour G' : $\mathscr{F}_\psi(j_* F[1])$ est facteur direct de

$$\mathscr{F}_\psi(j_*(F \oplus \check{F}(-w))\,[1]) \oplus \mathscr{F}_{\psi^{-1}}(j_*(F \oplus \check{F}(-w))\,[1])$$

et ce dernier $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau pervers est de la forme

$$j'_* G'[1]$$

pour un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse G' sur $A' - \{0'\}$, d'après (1.4.2.1) (ii) et (2.3.1.3) (i). Il suffit donc maintenant de démontrer que ce G' est ι-réel : en effet, comme F' est irréductible et que F' est facteur direct de G', on aura terminé.

Or l'interprétation cohomologique des fonctions L due à Grothendieck (et rappelée en (3.1)) donne, pour tout $x' \in |A'| - \{0'\}$, la formule du produit

$$\iota \det(1 - t\,\mathrm{Frob}_{x'}, G') = \prod_{x \in |A \otimes_k k(x')|} \frac{1}{Q^{\psi}_{x,x'}(t^{\deg(x)})\, Q^{\psi^{-1}}_{x,x'}(t^{\deg(x)})},$$

où
$$Q^{\psi}_{x,x'}(t) = P_x(t\psi(\mathrm{tr}_{k(x)/\mathbf{F}_p}(x.x')))$$
et
$$P_x(t) = \iota \det(1 - t\,\mathrm{Frob}_x, j_*(F \oplus \check{F}(-w)))$$

(on a $k(x) \supset k(x') \supset \mathbf{F}_p$). Comme $P_x(t) \in \mathbf{R}[t]$, pour tout $x \in |A|$, d'après (4.2.2.3), on en déduit que

$$\iota \det(1 - t\,\mathrm{Frob}_{x'}, G') \in \mathbf{R}[t],$$

pour tout $x' \in |A'| - \{0'\}$, et le corollaire (4.3.1.1).

Ceci achève notre démonstration du théorème (4.1.3) (cf. (4.3.2.1)).

BIBLIOGRAPHIE

[Ar-Ta] E. Artin and J. Tate, *Class field theory*, New York, Benjamin (1967).

[B-B-D] A. A. Beilinson, I. N. Bernstein et P. Deligne, Faisceaux pervers, dans *Analyse et topologie sur les espaces singuliers* (I), Conférence de Luminy, juillet 1981, *Astérisque* **100** (1982).

[Bo] A. Borel, Automorphic L-functions, in *Automorphic Forms, Representations and L-functions. Proc. Sympos, Pure Math.*, vol. 33, part 2, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (1979), 27-61.

[Bo-Ja] A. Borel and H. Jacquet, Automorphic Forms and Automorphic Representations, in *Automorphic Forms, Representations and L-functions*, *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 33, part 1, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (1979), 189-202.

[Br] J.-L. Brylinski, Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformations de Fourier et sommes trigonométriques, *Astérisque* **140-141** (1986), 3-134.

[De 1] P. Deligne, Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, dans *Modular Functions of One Variable* II, *Lecture Notes in Math.*, vol. 349, Springer-Verlag (1973), 55-106.

[De 2] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions* L, Séminaire à l'I.H.E.S., 1980, notes de L. Illusie.

[De 3] P. Deligne, La conjecture de Weil I, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **43** (1974), 273-307.

[De 4] P. Deligne, La conjecture de Weil II, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **52** (1981), 313-428.

[De 5] P. Deligne, *Lettre à D. Kazhdan*, 29 novembre 1976.

[De 6] P. Deligne, *Lettre à J.-P. Serre*, février 1974.

[De 7] P. Deligne, *Lettre à J.-L. Verdier*, 22 avril 1982.

[Dr 1] V. G. Drinfeld, Langlands' Conjecture for GL(2) over Functional Fields, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Helsinki (1978), 565-574.

[Dr 2] V. G. Drinfeld, Two-dimensional ℓ-adic Representations of the Fundamental Group of a Curve over a Finite Field and Automorphic Forms on GL(2), *Amer. J. of Math.*, **105** (1983), 85-114.

[Dr 3] V. G. Drinfeld, Two-dimensional ℓ-adic Representations of the Galois Group of a Global Field of Characteristic p and Automorphic Forms on GL(2) (en russe), *Zapiski Nayčnyh Seminarov LOM* I, **134** (1984), 138-156.

[Dw] B. Dwork, On the Artin Root Number, *Amer. J. of Math.* **78** (1956), 444-472.

[Go-Ja] R. Godement and H. Jacquet, Zeta Functions of Simple Algebras, *Lecture Notes in Math.*, vol. 260, Springer-Verlag (1972).

[Gr] A. Grothendieck, Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L, *Séminaire Bourbaki* 1964-1965, n° 279, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Amsterdam, North-Holland (1968).

[He 1] G. Henniart, Les inégalités de Morse (d'après E. Witten), *Séminaire Bourbaki* 1983-1984, n° 617, *Astérisque* **121-122** (1985), 43-61.

[He 2] G. Henniart, *Lettre à l'auteur*, 27 mars 1986.

[Ja-La] H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic Forms on GL(2), *Lecture Notes in Math.*, vol. 114, Springer-Verlag (1970).

[Ka 1] N. M. Katz, Gauss Sums, Kloosterman Sums and Monodromy Groups, to be published in *Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press.

[Ka 2] N. M. Katz, Extensions of Representations of Fundamental Groups, *Ann. Inst. Fourier*, à paraître.

[Ka 3] N. M. Katz, Wild Ramification and some Problems of « Independence of ℓ », *Amer. J. of Math.* **105**, (1983), 201-227.

[Ka 4] N. M. Katz, *Communication personnelle à l'auteur*, février 1986.

[Ka-La] N. M. Katz et G. Laumon, Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **62** (1985), 361-418.

[Ko 1] H. Koch, Bemerkungen zur Numerischen Lokalen Langlands-Vermutung, *Trudy Matematičeskogo Instituta* AN, SSSR, **163** (1984), 108-114.

[Ko 2] H. Koch, Classification of the Primitive Representations of the Galois Groups of Local Fields, *Invent. Math.* **40** (1977), 195-216.

[Lan 1] R. P. Langlands, *On the Functional Equation of the Artin L-functions*, Yale University (1969 ?).

[Lan 2] R. P. Langlands, Problems in the Theory of Automorphic Forms, in *Lectures in Modern Analysis and Applications* III, *Lecture Notes in Math.*, vol. 170, Springer-Verlag (1970), 18-86.

[Lau 1] G. Laumon, Majoration de sommes exponentielles attachées aux hypersurfaces diagonales, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, **16** (1983), 1-58.

[Lau 2] G. Laumon, Comparaison de caractéristiques d'Euler-Poincaré en cohomologie ℓ-adique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **292** (1981), 209-212.

[Lau 3] G. Laumon, Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après P. Deligne), dans *Caractéristique d'Euler-Poincaré, Séminaire E.N.S.* 1978-1979, *Astérisque* **82-83** (1981), 173-219.

[Lau 4] G. Laumon, Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L sur un corps global de caractéristique positive, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **298** (1984), 181-184.

[Pi 1] I. Piatetski-Shapiro, *Zeta Function of* GL(n), Preprint, University of Maryland (1976).

[Pi 2] I. Piatetski-Shapiro, Multiplicity One Theorems, in *Automorphic Forms, Representations and* L-*functions, Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 33, part 1, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (1979), 209-212.

[Ra] M. Raynaud, Caractéristiques d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes (d'après Ogg-Shafarévitch et Grothendieck), *Séminaire Bourbaki* 1964-1965, n° 286, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Amsterdam, North-Holland (1968).

[Se 1] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Paris, Hermann (1968).

[Se 2] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Paris, Hermann (1971).

[Se 3] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Paris, Hermann (1959).

[Se 4] J.-P. Serre, Sur la rationalité des représentations d'Artin, *Ann. of Math.*, **72** (1960), 406-420.

[Se 5] J.-P. Serre, Zeta and L-Functions, in *Arithmetic Algebraic Geometry*, New York, Harper & Row (1965), 82-92.

[Se-Ta] J.-P. Serre and J. Tate, Good Reduction of Abelian Varieties, *Ann. of Math.*, **88** (1968), 492-517.

[Ta 1] J. Tate, Fourier Analysis in Number Fields and Hecke's Zeta-Functions, in *Algebraic Number Theory* (J. W. S. Cassels and A. Fröhlich), London, Academic Press (1967), 305-347.

[Ta 2] J. Tate, Local constants, in *Proc. Durham Sympos. on Algebraic Number Fields*, London, Academic Press (1977), 89-131.

[We 1] A. Weil, Dirichlet Series and Automorphic Forms, *Lecture Notes in Math.*, vol. 189, Springer-Verlag (1971).

[We 2] A. Weil, L'avenir des mathématiques, *Bol. Sao Paulo*, 1 (1946), 55-68.

[Wi] E. Witten, Supersymmetry and Morse Theory, *J. of Diff. Geometry*, **17** (1982), 661-692.

[SGA Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie.

4] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier, *Lecture Notes in Math.*, vol. 269, 270 et 305, Springer-Verlag (1972 et 1973).

4½] Cohomologie étale, par P. Deligne, avec la collaboration de J.-F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J.-L. Verdier, *Lecture Notes in Math.*, vol. 569, Springer-Verlag (1977).

5] Cohomologie ℓ-adique et fonctions L, dirigé par A. Grothendieck, avec la collaboration de I. Bucur, C. Houzel, L. Illusie, J.-P. Jouanolou et J.-P. Serre, *Lecture Notes in Math.*, vol. 589, Springer-Verlag (1977).

6] Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck et L. Illusie, avec la collaboration de D. Ferrand, J.-P. Jouanolou, O. Jussila, S. Kleiman, M. Raynaud, J.-P. Serre, *Lecture Notes in Math.*, vol. 225, Springer-Verlag (1971).

7] Groupes de monodromie en géométrie algébrique, dirigé par A. Grothendieck avec la collaboration de M. Raynaud et D. S. Rim pour la partie I et par P. Deligne et N. Katz pour la partie II, *Lecture Notes in Math.*, vol. 288 et 340, Springer-Verlag (1972 et 1973).

Université Paris XI,
Département de Mathématiques,
UA CNRS n° 752,
Bâtiment 425,
91405 Orsay Cedex

Manuscrit reçu le 31 juillet 1986.