

JEAN-PIERRE SERRE

Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 54 (1981), p. 123-201

http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1981__54__123_0

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (<http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES APPLICATIONS DU THÉORÈME DE DENSITÉ DE CHEBOTAREV

par JEAN-PIERRE SERRE

Les applications en question concernent surtout les *formes modulaires* et les *courbes elliptiques*. L'exemple suivant (cf. n° 7.4) est typique :

$$\text{Soit } f = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^2 (1 - q^{11n})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n.$$

C'est une forme modulaire de poids 2 et de niveau 11; elle est associée à la courbe elliptique E d'équation $Y^2 - Y = X^3 - X^2$. Soit Σ_E l'ensemble des nombres premiers p tels que $a_p \neq 0$; si $p \neq 2$, on a $p \in \Sigma_E$ si et seulement si la réduction de E en p est une courbe elliptique *supersingulière*. Soit x un nombre réel ≥ 2 ; notons $P_E(x)$ le nombre des $p \in \Sigma_E$ tels que $p \leq x$. On sait ([40], IV-13, exerc. 1) que :

$$(a) \quad P_E(x) = o(x/\log x) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty,$$

autrement dit que Σ_E est de *densité zéro* dans l'ensemble des nombres premiers. Ce résultat est loin d'être optimal : d'après Lang et Trotter ([24]), il est vraisemblable que

$$(b_?) \quad P_E(x) \sim c_E x^{1/2}/\log x \quad \text{avec } c_E > 0.$$

Nous nous proposons d'*améliorer* (a) — tout en restant, hélas, loin de (b_?) — en prouvant :

$$(c) \quad P_E(x) = O(x/(\log x)^{3/2-\epsilon}) \quad \text{pour tout } \epsilon > 0,$$

et, sous l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH) :

$$(d_R) \quad P_E(x) = O(x^{3/4}).$$

La majoration (c) entraîne :

$$(c') \quad \sum_{p \in \Sigma_E} 1/p < \infty.$$

On déduit de là, et de la multiplicativité de $n \mapsto a_n$, que la série f n'est pas lacunaire : si l'on note $M_f(x)$ le nombre des entiers $n \leq x$ tels que $a_n \neq 0$, on a

$$(e) \quad M_f(x) \sim \alpha x,$$

où α est un nombre > 0 donné par :

$$\alpha = \frac{14}{15} \prod_{p \in \Sigma_E} \left(1 - \frac{1}{p+1} \right) < 0,847.$$

Le principe de la démonstration de (c) et (d_R) est le suivant. Soit ℓ un nombre premier, et soit

$$\rho_\ell : \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$$

la représentation ℓ -adique définie par les points de ℓ^m -division de la courbe E ($m=0, 1, \dots$). Cette représentation est non ramifiée en dehors de $\{11, \ell\}$. Le groupe $G_\ell = \text{Im}(\rho_\ell)$ est un sous-groupe ouvert ([40], [41]) de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$; c'est un groupe de Lie ℓ -adique de dimension 4. Si $p \neq 11, \ell$, la substitution de Frobenius s_p de p dans G_ℓ est bien définie (à conjugaison près), et l'on sait, d'après Eichler, Shimura et Igusa, que

$$\text{Tr}(s_p) = a_p.$$

La relation $a_p = 0$ équivaut donc à dire que s_p appartient à la sous-variété C_ℓ de G_ℓ formée des éléments de trace 0. Il est immédiat que C_ℓ est de mesure nulle dans G_ℓ , ce qui entraîne (a) grâce au théorème de Chebotarev « qualitatif » (cf. n° 2.1, th. 1). Pour aller plus loin, et obtenir (c) et (d_R) , on applique à certains quotients finis de G_ℓ les formes « quantitatives » du théorème de Chebotarev démontrées récemment par Lagarias, Montgomery et Odlyzko ([22], [23]).

La mise en œuvre de la méthode esquissée ci-dessus demande un certain nombre de préliminaires, qui font l'objet des trois premiers paragraphes. Le § 1 contient des majorations de discriminants, d'après Hensel [15]. Le § 2 rappelle les résultats de [22] et [23] sur le théorème de Chebotarev, et les complète sur quelques points. Le § 3 donne des estimations du nombre de points mod ℓ^n d'une variété analytique ℓ -adique : si la dimension de la variété est d , le nombre en question est $O(\ell^{nd})$ pour $n \rightarrow \infty$. On passe ensuite (§ 4) aux extensions à groupe de Galois un groupe de Lie ℓ -adique. Si G est le groupe de Galois, et C une sous-variété de G stable par conjugaison, on s'intéresse au nombre $\pi_C(x)$ des $p \leq x$ dont la substitution de Frobenius dans G appartient à C (je me borne ici, pour simplifier, au cas où le corps de base est $\mathbf{Q}$). On obtient pour $\pi_C(x)$ des majorations analogues à (c) et (d_R) ci-dessus; dans ces majorations figurent des exposants qui dépendent des dimensions de G et de C comme variétés ℓ -adiques. Le § 5 améliore ces exposants, dans le cas où C ne contient aucune classe de conjugaison finie. C'est grâce à cette amélioration que le membre de droite de (d_R) est $O(x^{3/4})$; sinon, on n'obtiendrait que $O(x^{5/6})$.

Le § 6 donne une application du § 4 à la lacunarité des fonctions multiplicatives, et en particulier des coefficients des fonctions L attachées à des représentations ℓ -adiques. Si $L(s) = \sum a_n n^{-s}$ est une telle fonction, et si l'on pose

$$M_L(x) = \text{nombre des } n \leq x \text{ tels que } a_n \neq 0,$$

on montre que :

$$(f) \quad M_L(x) \sim c_L x / (\log x)^\lambda, \quad \text{avec } c_L > 0,$$

où λ est un nombre rationnel. On a $0 \leq \lambda \leq 1 - 1/r^2$, où r est le degré de la représentation ℓ -adique attachée à $L(s)$. La valeur de λ ne dépend que de l'enveloppe algébrique du groupe de Galois ℓ -adique; si cette enveloppe est connexe pour la topologie de Zariski, on a $\lambda = 0$ et $L(s)$ n'est pas lacunaire.

Le § 7 contient les applications aux formes modulaires; il utilise de façon essentielle les représentations ℓ -adiques associées à ces formes par Deligne ([7], [9]). On y trouve des généralisations de (c), (d_R) et (f) ci-dessus aux formes de poids ≥ 2 ; on montre en particulier qu'une telle forme n'est pas lacunaire, sauf si elle est combinaison linéaire de formes « de type CM » au sens de Ribet [33] (ces dernières correspondent à $\lambda = 1/2$, avec les notations de (f)). Le cas du poids 1, quelque peu différent, est traité séparément; j'ai donné au n° 7.8 un exemple de calcul effectif de la constante c_L de (f), dans un cas où l'exposant λ prend sa valeur maximale, qui est $3/4$.

Le dernier paragraphe (§ 8) est consacré aux courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$. Il débute par des résultats analogues à ceux du § 7. Il continue par un théorème de comparaison entre deux courbes elliptiques, d'où l'on déduit finalement ceci :

Soit E une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$, sans multiplication complexe, et soit N_E le produit des nombres premiers en lesquels E a mauvaise réduction. Si p est un nombre premier, soit G_p le groupe de Galois des points de p -division de E . Il existe une constante absolue c telle que, sous (GRH), on ait $G_p \simeq \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ pour tout p tel que

$$p \geq c(\log N_E)(\log \log 2N_E)^3.$$

Cela précise (sous (GRH)...) le théorème, démontré dans [41], suivant lequel on a $G_p \simeq \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ pour p assez grand.

Comme le montre le résumé ci-dessus, le présent travail consiste essentiellement en une série de *majorations* (c'est plus de l'Analyse que de la Théorie des Nombres, dirait Weil). J'ai essayé de rendre ces majorations aussi précises que possible, au prix de quelques complications de détail (cf. § 5, notamment). Toutefois cette apparente précision ne doit pas faire illusion : *aucun des résultats obtenus n'est optimal*, même pas ceux démontrés sous (GRH). Le lecteur de bonne volonté ne manquera donc pas de problèmes à résoudre.

TABLE DES MATIÈRES

§ 1. Majorations de discriminants	126
§ 2. Formes effectives du théorème de Chebotarev.....	131
§ 3. Réduction mod ℓ^n des variétés ℓ -adiques	143
§ 4. Majorations de $\pi_C(x)$ dans le cas ℓ -adique	150
§ 5. Majorations améliorées	157
§ 6. Non-lacunarité de certains produits eulériens.....	162
§ 7. Applications aux formes modulaires	173
§ 8. Applications aux courbes elliptiques.....	188
BIBLIOGRAPHIE	199

§ 1. Majorations de discriminants

1.1. Notations

Soit K un corps de nombres algébriques, autrement dit une extension finie de $\mathbf{Q}$.
On pose :

$$\begin{aligned} A_K &= \text{anneau des entiers de } K, \\ n_K &= [K : \mathbf{Q}] = [A_K : \mathbf{Z}] = \text{degré de } K, \\ \Sigma_K &= \text{ensemble des places ultramétriques de } K, \\ d_K &= \text{valeur absolue du discriminant de } K. \end{aligned}$$

Si $v \in \Sigma_K$, on identifie v à la valuation discrète normée correspondante (de groupe des valeurs $\mathbf{Z}$), et l'on note $\mathfrak{p}_v$ l'idéal premier de A_K qui correspond à v . Le corps résiduel $A_K/\mathfrak{p}_v$ est un corps fini; on note p_v sa caractéristique, et Nv le nombre de ses éléments. On a

$$Nv = N\mathfrak{p}_v = (p_v)^{f_v},$$

où f_v est le degré résiduel de v . L'indice de ramification e_v de v est défini par $e_v = v(p_v)$; c'est le plus grand entier positif e tel que $\mathfrak{p}_v^e$ divise p_v .

Soit E une extension finie de K , de degré $n = n_E/n_K = [E : K]$. On note $\mathfrak{D}_{E/K}$ (resp. $\mathfrak{d}_{E/K}$) la différentielle (resp. le discriminant) de l'extension E/K ; c'est un idéal $\neq 0$ de A_E (resp. A_K). On a

$$(1) \quad \mathfrak{d}_{E/K} = N_{E/K}(\mathfrak{D}_{E/K}) \quad \text{et} \quad d_E = (d_K)^n N(\mathfrak{d}_{E/K}),$$

cf. par exemple [38], chap. III.

1.2. Estimations locales

Soit E/K comme ci-dessus, et soit $w \in \Sigma_E$ une place ultramétrique de E . Notons v la place de K induite par w , et soit $e_{w/v} = e_w/e_v$ l'indice de ramification de w par rapport à v . On s'intéresse à l'exposant $w(\mathfrak{D}_{E/K})$ de l'idéal premier $\mathfrak{p}_w$ dans la différentielle $\mathfrak{D}_{E/K}$:

Proposition 1. — On a

$$w(\mathfrak{D}_{E/K}) = e_{w/v} - 1 + s_{w/v}, \quad \text{avec } 0 \leq s_{w/v} \leq w(e_{w/v}).$$

Ce résultat est dû à Hensel [15]; il avait été conjecturé par Dedekind [6]. Rappelons-en brièvement la démonstration (pour plus de détails, voir [38], chap. III, fin du § 6) :

Par des réductions standard (localisation, complétion, etc.), on se ramène à prouver l'énoncé analogue lorsque E et K sont des *corps locaux*, et que E/K est totalement ramifiée, i.e. $e_{w/v} = n$. Si π est une uniformisante de E en w , π satisfait à une *équation d'Eisenstein* $f(\pi) = 0$, où $f(X)$ est un polynôme

$$f(X) = a_0 X^n + \dots + a_n,$$

avec $a_i \in K$, $a_0 = 1$, $v(a_i) \geq 1$ pour $i \geq 1$ et $v(a_n) = 1$.

La différentielle $\mathfrak{D}_{E/K}$ est engendrée par

$$f'(\pi) = \sum_{0 \leq i \leq n-1} (n-i) a_i \pi^{n-i-1}.$$

Comme $(n-i)a_i$ appartient à K , on a

$$\begin{aligned} w((n-i)a_i \pi^{n-i-1}) &= n-i-1 + nv((n-i)a_i) \\ &\equiv -i-1 \pmod{n} \end{aligned}$$

si $(n-i)a_i \neq 0$. Ainsi, les différents termes non nuls de $f'(\pi)$ ont des valuations *distinctes* (puisqu'elles sont distinctes modulo n). Il en résulte que

$$w(\mathfrak{D}_{E/K}) = \inf_{0 \leq i \leq n-1} w((n-i)a_i \pi^{n-i-1}).$$

Le terme correspondant à $i = 0$ est $n-1 + w(n)$; ceux correspondant à $i \geq 1$ sont $\geq n$. On en conclut que

$$n-1 \leq w(\mathfrak{D}_{E/K}) \leq n-1 + w(n),$$

d'où le résultat cherché.

Remarque. — Le terme $s_{w/v}$ est la « partie sauvage » de $w(\mathfrak{D}_{E/K})$: il est nul si et seulement si p_v ne divise pas $e_{w/v}$, autrement dit si et seulement si l'extension E/K est « modérée » en w .

Passons maintenant à $\mathfrak{d}_{E/K}$. Soit $v \in \Sigma_K$, de caractéristique résiduelle $p = p_v$; notons v_p la valuation p -adique usuelle du corps $\mathbf{Q}$; on a $v(x) = e_v v_p(x)$ pour tout $x \in \mathbf{Q}$.

Proposition 2. — On a

$$v(\mathfrak{d}_{E/K}) \leq n-1 + ne_v \sup_{w|v} v_p(e_{w/v}).$$

(Rappelons que $n = [E : K]$, et que $w|v$ signifie que v est induite par w , ou encore que w « divise » v .)

La formule $\mathfrak{d}_{E/K} = N_{E/K}(\mathfrak{D}_{E/K})$ montre que

$$v(\mathfrak{d}_{E/K}) = \sum_{w|v} f_{w/v} w(\mathfrak{D}_{E/K}), \quad \text{avec} \quad f_{w/v} = f_w / f_v.$$

En appliquant la prop. 1, on en déduit

$$(2) \quad \begin{aligned} v(\mathfrak{d}_{E/K}) &= \sum_{w|v} f_{w/v}(e_{w/v} - 1) + \sum_{w|v} f_{w/v} s_{w/v} \\ &\leq \sum_{w|v} f_{w/v} e_{w/v} - 1 + \sum_{w|v} f_{w/v} e_w v_p(e_{w/v}) \\ &\leq n - 1 + ne_v \sup_{w|v} v_p(e_{w/v}), \end{aligned}$$

du fait que $n = \sum_{w|v} f_{w/v} e_{w/v}$.

Corollaire. — On a

$$v(\mathfrak{d}_{E/K}) \leq n - 1 + ne_v \log n / \log p.$$

En effet, pour tout w divisant v , on a $e_{w/v} \leq n$ et l'exposant de p dans $e_{w/v}$ est donc $\leq \log n / \log p$.

Proposition 3. — Supposons E/K galoisienne, et ramifiée en v . On a alors :

$$n/2 \leq v(\mathfrak{d}_{E/K}) \leq n - 1 + ne_v v_p(n).$$

Les places w divisant v sont conjuguées entre elles par le groupe de Galois $\text{Gal}(E/K)$. Tous les $e_{w/v}$ sont donc égaux à un même entier e ; de même, les $f_{w/v}$ sont égaux à un même entier f , et l'on a $n = efg$, où g est le nombre des w . Puisque e divise n , on a $v_p(e) \leq v_p(n)$ et la prop. 2 montre que

$$v(\mathfrak{d}_{E/K}) \leq n - 1 + ne_v v_p(e) \leq n - 1 + ne_v v_p(n).$$

D'autre part, comme E/K est ramifiée en v , on a $e \geq 2$, et la formule (2) ci-dessus montre que

$$v(\mathfrak{d}_{E/K}) \geq gf(e - 1) \geq n(1 - 1/e) \geq n/2.$$

1.3. Estimations globales

On s'intéresse maintenant à la norme $N(\mathfrak{d}_{E/K})$ du discriminant (relatif) de E/K , ainsi qu'aux discriminants (absolus) des corps E et K . D'après (1), on a

$$(3) \quad \log d_E = n \log d_K + \log N(\mathfrak{d}_{E/K}).$$

Notons $V(E/K)$ l'ensemble des $v \in \Sigma_K$ qui sont ramifiés dans E , autrement dit tels que $v(\mathfrak{d}_{E/K}) > 0$. Notons $P(E/K)$ l'ensemble des nombres premiers de la forme p_v , pour $v \in V(E/K)$. Ces ensembles sont finis.

Proposition 4. — On a

$$\log N(\mathfrak{d}_{E/K}) \leq n_E(1 - 1/n) \sum_{p \in P(E/K)} \log p + n_E |P(E/K)| \log n.$$

(Si P est un ensemble fini, on note $|P|$ le nombre de ses éléments.)

Compte tenu de (3), on peut reformuler la prop. 4 de la façon suivante :

Proposition 4'. — On a

$$\log d_E \leq n \log d_K + n_E(1 - 1/n) \sum_{p \in P(E/K)} \log p + n_E |P(E/K)| \log n.$$

Démonstration de la prop. 4

Comme $\log Nv = f_v \log p_v$, on a

$$(4) \quad \log N(\mathfrak{d}_{E/K}) = \sum_{v \in V(E/K)} v(\mathfrak{d}_{E/K}) f_v \log p_v,$$

et en appliquant le cor. à la prop. 2, on en déduit

$$(5) \quad \log N(\mathfrak{d}_{E/K}) \leq \sum_{v \in V(E/K)} \{(n-1)f_v \log p_v + n f_v e_v \log n\}.$$

Or, pour tout nombre premier p , on a

$$\sum_{p_v=p} f_v e_v = n_K \quad \text{et} \quad \sum_{p_v=p} f_v \leq n_K.$$

La majoration (5) ci-dessus entraîne donc :

$$\log N(\mathfrak{d}_{E/K}) \leq (n-1)n_K \sum_{p \in P(E/K)} \log p + n n_K |P(E/K)| \log n,$$

ce qui établit la prop. 4, vu que $n_E = n n_K$.

Dans le cas galoisien, le terme $|P(E/K)|$ peut être remplacé par 1. De façon plus précise :

Proposition 5. — Supposons E/K galoisienne. On a alors :

$$(6) \quad \log N(\mathfrak{d}_{E/K}) \leq n_E(1 - 1/n) \sum_{p \in P(E/K)} \log p + n_E \log n$$

et

$$(7) \quad \log d_E \geq \log N(\mathfrak{d}_{E/K}) \geq \frac{n}{2} \sum_{v \in V(E/K)} \log Nv.$$

En combinant (4) à la majoration de $v(\mathfrak{d}_{E/K})$ donnée par la prop. 3, on obtient

$$\log N(\mathfrak{d}_{E/K}) \leq \sum_{v \in V(E/K)} \{(n-1)f_v \log p_v + n f_v e_v v_{p_v}(n) \log p_v\}.$$

En utilisant les majorations

$$\sum f_v \log p_v \leq \sum f_v e_v \log p_v \leq n_K \sum_{p \in P(E/K)} \log p$$

$$\text{et} \quad \sum f_v e_v v_{p_v}(n) \log p_v \leq n_K \sum_{p \in P(E/K)} v_p(n) \log p \leq n_K \log n,$$

on en déduit

$$\log N(\mathfrak{d}_{E/K}) \leq n_K(n-1) \sum_{p \in P(E/K)} \log p + n n_K \log n,$$

ce qui équivaut à (6).

L'inégalité

$$\log N(\mathfrak{d}_{E/K}) \geq \frac{n}{2} \sum_{v \in V(E/K)} \log Nv$$

résulte de façon analogue de (4), combinée avec la minoration $v(\mathfrak{d}_{E/K}) \geq n/2$ de la prop. 3. Enfin, l'inégalité

$$\log d_E \geq \log N(\mathfrak{d}_{E/K})$$

résulte de (3).

1.4. Le cas particulier $K = \mathbf{Q}$

On écrit alors $P(E)$ au lieu de $P(E/\mathbf{Q})$; on a $p \in P(E)$ si et seulement si p divise d_E . Les prop. 4 et 5 donnent :

Proposition 6. — Si E est un corps de nombres de degré n sur $\mathbf{Q}$, on a

$$\log d_E \leq (n-1) \sum_{p \in P(E)} \log p + n |P(E)| \log n.$$

Si de plus E est galoisien sur $\mathbf{Q}$, on a

$$\frac{n}{2} \sum_{p \in P(E)} \log p \leq \log d_E \leq (n-1) \sum_{p \in P(E)} \log p + n \log n.$$

Si l'on note δ_E le produit des $p \in P(E)$, autrement dit le plus grand diviseur sans facteur carré de d_E , on peut reformuler les inégalités du cas galoisien sous la forme

$$\delta_E^{n/2} \leq d_E \leq n^n \delta_E^{n-1}.$$

(Ces relations d'inégalité sont même des relations de *divisibilité*, comme le montre la prop. 3.)

Exemple

Soient p un nombre premier, m un entier ≥ 1 , et $E = \mathbf{Q}(\pi)$ avec $\pi^{p^m} = p$. On a $n = p^m$, $P(E) = \{p\}$ et la différentielle de E est engendrée par $p^m \pi^{p^m-1}$; on en conclut que

$$d_E = p^{mp^m + p^m - 1} = n^n p^{n-1},$$

ce qui fournit un exemple où la majoration de la prop. 6 est en fait une *égalité*.

§ 2. Formes effectives du théorème de Chebotarev

2.1. Le théorème de Chebotarev

Soit E/K une extension galoisienne finie de corps de nombres, et soit $G = \text{Gal}(E/K)$. On conserve les notations du § 1; en particulier, on pose

$$n_E = [E : \mathbf{Q}], \quad n_K = [K : \mathbf{Q}], \quad n = [E : K] = n_E/n_K = |G|,$$

et l'on note $V(E/K)$ l'ensemble des places $v \in \Sigma_K$ qui sont ramifiées dans l'extension E .

Si $v \in \Sigma_K$ n'appartient pas à $V(E/K)$, et si $w \in \Sigma_E$ divise v , on note σ_w la *substitution de Frobenius* de w ; c'est l'unique élément s de G tel que

$$s(a) \equiv a^{Nv} \pmod{\mathfrak{p}_w} \quad \text{pour tout } a \in A_E.$$

La classe de conjugaison de σ_w ne dépend que de v ; on la note σ_v (et l'on se permet de noter également σ_v un élément quelconque de cette classe).

Soient maintenant C une partie de G stable par conjugaison, et Σ_C l'ensemble des $v \in \Sigma_K - V(E/K)$ tels que $\sigma_v \in C$. Le résultat suivant, conjecturé par Frobenius [12], a été démontré par Chebotarev (cf. [1], [47]) :

Théorème 1. — L'ensemble Σ_C est de densité $|C|/|G|$ dans Σ_K .

Précisons ce que nous entendons par « densité ». Si x est un nombre réel ≥ 2 , notons $\pi_K(x)$ (resp. $\pi_C(x)$) le nombre des places $v \in \Sigma_K$ (resp. $v \in \Sigma_C$) telles que $Nv \leq x$. D'après le « théorème des nombres premiers », appliqué au corps K , on a

$$(8) \quad \pi_K(x) \sim x/\log x \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

Dire que Σ_C est de densité $\lambda = |C|/|G|$ signifie que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \pi_C(x)/\pi_K(x) = \lambda,$$

autrement dit que

$$(9) \quad \pi_C(x) = \lambda x/\log x + o(x/\log x) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

(On peut également exprimer le th. 1 en disant que les substitutions de Frobenius sont *équiréparties* dans l'ensemble des classes de conjugaison de G , cf. par exemple [40], Chap. I, App.)

2.2. Une forme effective du théorème de Chebotarev

Il s'agit de préciser le « $o(x/\log x)$ » qui figure dans (9). Avant d'énoncer le résultat, rappelons que la fonction zêta du corps E a au plus un zéro réel positif s tel que

$$1 - s \leq 1/4 \log d_E;$$

si un tel zéro existe, il est dit *exceptionnel*, et on le note β .

La forme effective du th. 1 démontrée par Lagarias-Odlyzko [23] est la suivante :

Théorème 2. — Il existe des constantes absolues $c_1, c_2, c_3 > 0$ telles que

$$(10) \quad \left| \pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|} \text{Li}(x) \right| \leq \frac{|C|}{|G|} \text{Li}(x^\beta) + c_1 |\tilde{C}| x \exp(-c_2 n_E^{-1/2} \log^{1/2} x)$$

pour tout $x \geq 2$ tel que

$$(11) \quad \log x \geq c_3 n_E \log^2 d_E.$$

(Dans (10), $|\tilde{C}|$ désigne le nombre de classes de conjugaison contenues dans C .

Quant au terme $\frac{|C|}{|G|} \text{Li}(x^\beta)$, on le supprime s'il n'y a pas de zéro exceptionnel.)

Rappelons que $\text{Li}(x) = \int_2^x dt/\log t$. Comme $\text{Li}(x) \sim x/\log x$ pour $x \rightarrow \infty$, la formule (10) est bien une amélioration de (9).

Remarques

1) Le cas traité dans [23] est celui où C est une classe de conjugaison de G , i.e. $|\tilde{C}| = 1$. Le cas général s'en déduit par additivité.

2) On pourrait affaiblir sensiblement la condition (11), ce qui renforcerait le théorème. Nous n'en aurons pas besoin : en fait, ce n'est pas le th. 2 lui-même que nous utiliserons dans la suite, mais seulement ses variantes, les ths. 3, 4, 5, 6 ci-après.

3) Insistons sur le fait que les constantes c_1, c_2, c_3 (de même que les $c_4, c_5, \dots, c_{36}$ introduites plus loin) sont *absolues*, i.e. indépendantes de K, E, C, G, x . De plus, ces constantes sont *effectivement calculables*, au moins en principe. On peut, par exemple, prendre $c_2 = 1/20$.

2.3. Majoration de $\pi_C(x)$

Une telle majoration résulte bien sûr du th. 2, combiné avec le fait que $\beta < 1$ (ou, mieux encore, avec les majorations de β données dans [22] et [45]). On peut également (et c'est ce que nous ferons) utiliser le résultat suivant, dû à Lagarias-Montgomery-Odlyzko ([22], th. (1.4)) :

Théorème 3. — Il existe des constantes absolues c_4 et c_5 telles que

$$(12) \quad \pi_C(x) \leq c_4 \frac{|C|}{|G|} \text{Li}(x)$$

pour tout $x \geq 3$ tel que

$$(13) \quad \log x \geq c_5 (\log d_E) (\log \log d_E) (\log \log \log 6d_E).$$

Remarques

1) Lorsque $n_E = 1$, i.e. $E = K = \mathbf{Q}$, on convient de supprimer la condition (13), qui n'a pas de sens puisque $d_E = 1$. Lorsque $n_E \geq 2$, on a $d_E \geq 3$ et il en résulte que $\log d_E$, $\log \log d_E$, et $\log \log \log 6d_E$ sont définis, et > 0 . (Dans [22], $\log \log \log 6d_E$ est remplacé par $\log \log \log e^{20} d_E$; c'est sans importance.)

2) On aurait pu énoncer (12) avec $x/\log x$ à la place de $\text{Li}(x)$ et « $x \geq 2$ » à la place de « $x \geq 3$ ».

2.4. Forme effective du théorème de Chebotarev sous (GRH)

Nous entendrons par (GRH) l'hypothèse de Riemann généralisée, i.e. l'assertion que la fonction zêta d'un corps de nombres n'a pas de zéro de partie réelle $> 1/2$. Dans ce qui suit, toute formule dépendant de (GRH) porte l'indice « R ».

Cette hypothèse permet de renforcer considérablement les ths. 1 et 2. On a en effet, d'après Lagarias-Odlyzko [23] :

Théorème 4. — Il existe une constante absolue $c_6 > 0$ telle que, sous (GRH), on ait

$$(14R) \quad \left| \pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|} \text{Li}(x) \right| \leq c_6 \frac{|C|}{|G|} x^{1/2} (\log d_E + n_E \log x)$$

pour tout $x \geq 2$.

Ce résultat est démontré dans [23] sous la forme un peu plus faible suivante :

$$(15R) \quad \left| \pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|} \text{Li}(x) \right| \leq c_7 \left(\log d_E + \frac{|C|}{|G|} x^{1/2} (\log d_E + n_E \log x) \right),$$

valable lorsque C est une classe de conjugaison. En fait, le terme parasite $c_7 \log d_E$ peut être supprimé de cette formule. En effet, si l'on examine la démonstration de [23], on voit que ce terme provient de la majoration du bas de la p. 424 :

$$(16) \quad \sum_{p \text{ ram.}} \log Np \leq \log d_L \quad (\text{où } L = E),$$

autrement dit :

$$(17) \quad \sum_{v \in V(E/K)} \log Nv \leq \log d_E.$$

Or, d'après la prop. 5 du n° 1.3, on peut remplacer (16) et (17) par :

$$(18) \quad \sum_{v \in V(E/K)} \log Nv \leq \frac{2}{|G|} \log d_E.$$

Ce changement a pour effet, dans les formules (3.18), (7.4) et (9.1) de [23], de remplacer $(\log x)(\log d_L)$ par $\frac{1}{|G|}(\log x)(\log d_L)$. On en déduit (15_R) avec $\log d_E$ remplacé par $\frac{1}{|G|} \log d_E$, et ce terme peut alors être absorbé par le terme $\frac{|C|}{|G|} x^{1/2} \log d_E$. Cela établit (14_R) dans le cas où C est une classe de conjugaison; le cas général s'en déduit par additivité.

Remarques

1) Bien entendu, pour prouver (14_R), il n'est pas nécessaire de supposer que (GRH) soit vraie : il suffit (et il faut...) que la fonction zêta *du corps* E considéré n'ait pas de zéro de partie réelle $> 1/2$. Le même genre de remarque s'applique aux autres énoncés démontrés par la suite sous (GRH).

2) D'après J. Oesterlé (cf. [30]) la constante c_6 peut être prise égale à 2, et l'on peut l'abaisser à $1/3$ si l'on suppose $x \geq c_8$, avec c_8 assez grand. Dans le cas particulier $E = K = \mathbf{Q}$, $C = G = \{1\}$, où $\pi_C(x)$ est la fonction standard $\pi(x) = |\{p; p \leq x\}|$, on trouvera des résultats encore plus précis dans Schoenfeld [36].

3) Il peut être utile d'écrire le terme d'erreur de (14_R) sous une forme qui ne fasse intervenir que la ramification de E/K . Comme au § 1, notons $P(E/K)$ l'ensemble des nombres premiers p tels que E/K soit ramifiée en au moins une place de K divisant p . D'après les formules (3) et (6) du n° 1.3, on a

$$(19) \quad \log d_E \leq n \log d_K + n_E \log n + n_E \sum_{p \in P(E/K)} \log p.$$

En portant dans (14_R), cela donne :

$$(20_R) \quad \left| \pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|} \text{Li}(x) \right| \leq c_6 |C| n_K x^{1/2} \left\{ \log x + \log n + \frac{1}{n_K} \log d_K + \sum_{p \in P(E/K)} \log p \right\}.$$

2.5. Non-nullité de $\pi_C(x)$, sous (GRH)

Théorème 5. — Il existe une constante absolue $c_9 > 0$ telle que, sous (GRH), on ait

$$(21_R) \quad \pi_C(x) \geq 1 \quad \text{si } C \neq \emptyset$$

pour tout $x \geq 2$ tel que

$$(22_R) \quad x \geq c_9 (\log d_E)^2.$$

Ce théorème est énoncé dans [23], qui en donne une esquisse de démonstration. D'après J. Oesterlé [30], on peut prendre $c_9 = 70$.

Remarques

1) L'application directe du th. 4 donnerait un résultat un peu moins fort : on serait conduit à remplacer (22_R) par l'inégalité plus restrictive

$$(23_R) \quad x \geq c_{10} (\log d_E)^2 (\log \log d_E)^4.$$

Ce léger affaiblissement n'aurait pas grande importance pour la suite.

2) On peut se demander si l'exposant 2 dans (22_R) est optimum. Peut-être est-il possible de le remplacer par $1 + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$? Dans le cas où $K = \mathbf{Q}$, $E = \mathbf{Q}(\sqrt[m]{1})$, la question est équivalente à la suivante, déjà posée par S. Chowla [4] : est-il vrai que le plus petit nombre premier dans une progression arithmétique de raison m est $O(m^{1+\varepsilon})$?

3) Le th. (1.1) de [22] donne une condition, indépendante de (GRH), qui permet d'affirmer que $\pi_C(x) \geq 1$ si $C \neq \emptyset$; cette condition est :

$$(24) \quad x \geq 2(d_E)^{c_{11}},$$

où c_{11} est une constante absolue. Malheureusement, (24) est trop restrictive pour les applications que nous avons en vue.

Supposons maintenant que $K = \mathbf{Q}$. Identifions $\Sigma_{\mathbf{q}}$ à l'ensemble des nombres premiers, et notons σ_p la substitution de Frobenius de p . On a alors :

Théorème 6. — Soient E une extension galoisienne de $\mathbf{Q}$ de degré fini n , et S un ensemble fini de nombres premiers tel que $E/\mathbf{Q}$ soit non ramifiée en dehors de S . Supposons (GRH) vérifiée. Pour toute classe de conjugaison C de $G = \text{Gal}(E/\mathbf{Q})$, il existe un nombre premier $p \notin S$, tel que $\sigma_p \in C$ et que

$$(25_R) \quad p \leq c_{12} n^2 (\log n + \sum_{q \in S} \log q)^2,$$

où c_{12} est une constante absolue.

(La démonstration montrera que l'on peut prendre $c_{12} = 4c_9$, donc $c_{12} = 280$ d'après [30].)

Cet énoncé se déduit du th. 5 de la manière suivante :

Soit $P = P(E)$ l'ensemble des $p \in \Sigma_{\mathbf{q}}$ en lesquels E est ramifiée. On a $P \subset S$ par hypothèse. Distinguons deux cas :

(a) $P = S$.

Le th. 5 montre qu'il existe $p \notin S$ tel que $\sigma_p \in C$ et

$$p \leq c_9 (\log d_E)^2.$$

Or, d'après la prop. 6 du n° 1.4, on a

$$\log d_E \leq n (\log n + \sum_{q \in S} \log q).$$

D'où :

$$p \leq c_9 n^2 (\log n + \sum_{q \in S} \log q)^2,$$

ce qui prouve (25_R) avec c_{12} remplacé par c_9 .

(b) $P \neq S$.

Soit D le produit des nombres premiers q appartenant à $S - P$, et soit F l'unique corps quadratique tel que $d_F = D$ si D est impair, et $d_F = 2D$ si D est pair; on a

$F = \mathbf{Q}(\sqrt{\pm D})$ dans le premier cas et $F = \mathbf{Q}(\sqrt{\pm D/2})$ dans le second, le signe $\pm$ étant choisi tel que $\pm D \equiv 1 \pmod{4}$ et $\pm D/2 \equiv 3 \pmod{4}$ respectivement. Comme E est non ramifié en les facteurs premiers de d_F , les corps E et F sont linéairement disjoints. Leur composé $E' = E.F$ est galoisien, de groupe de Galois $G' = G \times \{\pm 1\}$. Comme d_E et d_F sont premiers entre eux, on a

$$(26) \quad d_{E'} = (d_F)^n (d_E)^2.$$

En particulier, $P(E')$ est égal à S ; l'extension $E'/\mathbf{Q}$ est ramifiée en tous les nombres premiers q appartenant à S . Le th. 5, appliqué à $E'/\mathbf{Q}$ et à $\mathbf{C} \times \{\pm 1\}$, montre alors qu'il existe $p \notin S$ avec $\sigma_p \in \mathbf{C}$ et

$$(27_R) \quad p \leq c_9 (\log d_{E'})^2.$$

D'après (26), on a

$$\log d_{E'} = n \log d_F + 2 \log d_E,$$

d'où, en appliquant la prop. 6 du n° 1.4 à E :

$$\log d_{E'} \leq n \log d_F + 2n (\log n + \sum_{q \in P} \log q).$$

Comme d'autre part $d_F \leq D^2$, on a

$$n \log d_F \leq 2n \log D \leq 2n \sum_{q \in S-P} \log q.$$

On en déduit

$$\log d_{E'} \leq 2n (\log n + \sum_{q \in S} \log q),$$

et en portant dans (27_R) on obtient bien (25_R), avec $c_{12} = 4c_9$.

2.6. Variantes : les fonctions $\pi_\varphi(x)$ et $\tilde{\pi}_\varphi(x)$

(Les résultats de ce numéro et du suivant ne seront utilisés qu'au § 5.)

Les $\pi_\varphi(x)$

Revenons aux notations du n° 2.1. Soit φ une *fonction centrale* (i.e. invariante par conjugaison) sur le groupe de Galois G . Si $x \geq 2$, nous poserons

$$(28) \quad \pi_\varphi(x) = \sum_{Nv \leq x} \varphi(\sigma_v),$$

la sommation étant étendue aux $v \in \Sigma_K - V(E/K)$ avec $Nv \leq x$, et σ_v désignant la substitution de Frobenius de v .

Soient $C_1, \dots, C_h$ les différentes classes de conjugaison de G , et $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ les valeurs prises par φ sur ces classes. On a

$$(29) \quad \pi_\varphi(x) = \sum_{1 \leq i \leq h} \lambda_i \pi_{C_i}(x).$$

Ainsi, tout résultat sur les $\pi_{C_i}(x)$ en entraîne un pour les $\pi_\varphi(x)$. Par exemple, (9) donne :

$$(30) \quad \pi_\varphi(x) = m(\varphi)x/\log x + o(x/\log x) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty,$$

où

$$(31) \quad m(\varphi) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \varphi(s) = \sum_{1 \leq i \leq h} \lambda_i |C_i|/|G|.$$

De même, le th. 3 entraîne

$$(32) \quad |\pi_\varphi(x)| \leq c_4 m(|\varphi|) \operatorname{Li}(x)$$

pour tout $x \geq 3$ satisfaisant à (13), et le th. 4 entraîne sous (GRH) :

$$(33R) \quad |\pi_\varphi(x) - m(\varphi) \operatorname{Li}(x)| \leq c_6 m(|\varphi|) x^{1/2} (\log d_E + n_E \log x).$$

Les $\tilde{\pi}_\varphi(x)$

Pour définir $\tilde{\pi}_\varphi(x)$, on a besoin d'étendre la définition de σ_v au cas où v est *ramifiée* dans l'extension E/K . Cela se fait de la manière suivante (cf. [38], II) : on choisit une place w de E divisant v , et l'on définit σ_v comme le *générateur canonique* du groupe D_w/I_w où D_w (resp. I_w) est le groupe de décomposition (resp. d'inertie) de w dans G . Si $m \in \mathbf{Z}$, on *définit* $\varphi(\sigma_v^m)$ par la formule (cf. Artin [1]) :

$$(34) \quad \varphi(\sigma_v^m) = \frac{1}{|I_w|} \sum_{s \rightarrow \sigma_v^m} \varphi(s),$$

la somme étant étendue à tous les $s \in D_w$ dont l'image dans D_w/I_w est égale à la m -ième puissance de σ_v (du fait que φ est centrale, cette expression ne dépend pas du choix de w) ; la notation est justifiée par le fait que, lorsque v est non ramifiée dans E/K , $\varphi(\sigma_v^m)$ est simplement la valeur de φ sur la classe de conjugaison de σ_v^m .

Avec ces notations, la définition de $\tilde{\pi}_\varphi(x)$ est :

$$(35) \quad \tilde{\pi}_\varphi(x) = \sum_{Nv^m \leq x} \frac{1}{m} \varphi(\sigma_v^m),$$

la somme étant étendue aux couples (v, m) où v est un élément de Σ_K et m un entier ≥ 1 tels que $Nv^m \leq x$.

[*Exemple.* — Si $\varphi = 1$, $\tilde{\pi}_\varphi(x)$ n'est autre que la classique fonction

$$\pi_K(x) + \frac{1}{2} \pi_K(x^{1/2}) + \frac{1}{3} \pi_K(x^{1/3}) + \dots]$$

L'intérêt des $\tilde{\pi}_\varphi(x)$ provient des deux propriétés suivantes :

- i) $\tilde{\pi}_\varphi(x) - \pi_\varphi(x)$ est « négligeable » ;
- ii) $\tilde{\pi}_\varphi(x)$ est invariant par « induction » et « extension ».

Précisons ces deux points :

i) *Estimation de $\tilde{\pi}_\varphi(x) - \pi_\varphi(x)$*

Posons

$$(36) \quad \|\varphi\| = \sup_{s \in G} |\varphi(s)|.$$

Proposition 7. — Il existe une constante absolue c_{15} telle que

$$(37) \quad |\tilde{\pi}_\varphi(x) - \pi_\varphi(x)| \leq c_{15} \|\varphi\| \left(\frac{1}{n} \log d_E + n_K x^{1/2} \right).$$

On peut supposer que $\|\varphi\| = 1$. Dans (35), les termes relatifs à $m=1$ et $v \notin V(E/K)$ donnent $\pi_\varphi(x)$. On en conclut que

$$|\tilde{\pi}_\varphi(x) - \pi_\varphi(x)| \leq A + B,$$

où $A = \sum_{v \in V(E/K)} 1$ et $B = \sum_{Nv^m \leq x; m \geq 2} 1/m$. Comme $\log Nv \geq \log 2$ pour tout v , on déduit de (18) que

$$A \leq \sum_{v \in V(E/K)} \log Nv / \log 2 \leq \frac{2}{n} \log d_E / \log 2,$$

$$\text{i.e.} \quad A \leq c_{13} \left(\frac{1}{n} \log d_E \right) \quad \text{avec } c_{13} = 2/\log 2.$$

On a d'autre part

$$B = \frac{1}{2} \pi_K(x^{1/2}) + \frac{1}{3} \pi_K(x^{1/3}) + \dots + \frac{1}{m} \pi_K(x^{1/m})$$

où m est le plus grand entier tel que $x^{1/m} \geq 2$. En utilisant la majoration triviale

$$\pi_K(x) \leq n_K x,$$

on en déduit

$$\begin{aligned} B &\leq n_K \left(\frac{1}{2} x^{1/2} + \frac{1}{3} x^{1/3} + \dots + \frac{1}{m} x^{1/m} \right) \\ &\leq n_K \left(\frac{1}{2} x^{1/2} + x^{1/3} \log m \right) \leq c_{14} n_K x^{1/2}. \end{aligned}$$

D'où (37), avec $c_{15} = \sup(c_{13}, c_{14})$; un calcul numérique facile montre d'ailleurs que l'on peut prendre $c_{15} = c_{13} = 2/\log 2$.

Corollaire 1. — On a

$$(38) \quad |\tilde{\pi}_\varphi(x) - \pi_\varphi(x)| \leq c_{15} m(|\varphi|) (\log d_E + n_E x^{1/2}).$$

Cela résulte de l'inégalité $\|\varphi\| \leq nm(|\varphi|)$.

Corollaire 2. — Quitte à augmenter c_4 et c_6 , les estimations (30), (32) et (33_R) ci-dessus restent valables lorsqu'on y remplace $\pi_\varphi(x)$ par $\tilde{\pi}_\varphi(x)$.

(Bien entendu, dans le cas de (33_R), on suppose en outre que (GRH) est vérifiée.)

Pour (30), cela résulte de (37) et de $x^{1/2} = o(x/\log x)$.

Pour (33_R), cela résulte de (38) et du fait que

$$\log d_E + n_E x^{1/2} \leq c_{16} x^{1/2} (\log d_E + n_E \log x)$$

avec $c_{16} = 1/\log 2$.

Pour (32), on vérifie que

$$\log d_E + n_E x^{1/2} \leq c_{17} x^{1/2} \log x \leq c_{18} \operatorname{Li}(x)$$

pour tout $x \geq 3$ satisfaisant à (13); cela se fait par un calcul sans difficulté, en tenant compte de l'inégalité de Minkowski

$$\log d_E \geq c_{19} n_E \quad \text{si } n_E > 1,$$

avec $c_{19} > 0$ (par exemple $c_{19} = \frac{1}{2} \log 3$).

Remarque. — Dans la suite, on supposera les constantes c_4 et c_6 choisies telles que (32) et (33_R) soient valables aussi bien pour $\tilde{\pi}_\varphi(x)$ que pour $\pi_\varphi(x)$.

ii) *Propriétés d'invariance des fonctions $\tilde{\pi}_\varphi(x)$*

Ces propriétés se déduisent des propriétés analogues pour les fonctions L d'Artin. Soient en effet χ un caractère de G et $L(s, \chi)$ la série L attachée à χ et à l'extension E/K, cf. [1]. Le développement en série de Dirichlet du logarithme de $L(s, \chi)$ est ([1], p. 296) :

$$(39) \quad \log L(s, \chi) = \sum_{v, m} \chi(\sigma_v^m) N v^{-ms} / m,$$

où v parcourt Σ_K et m les entiers ≥ 1 . (Précisons qu'il s'agit de la branche du logarithme dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 1$ qui tend vers 0 quand $s \rightarrow \infty$.)

Si l'on écrit ce développement sous la forme

$$(40) \quad \log L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\chi) n^{-s},$$

on voit que

$$(41) \quad \tilde{\pi}_\chi(x) = \sum_{n \leq x} a_n(\chi);$$

autrement dit, $\tilde{\pi}_\chi(x)$ est la *fonction sommatoire* des coefficients de $\log L(s, \chi)$. Toute identité entre fonctions L donne une identité entre les $\tilde{\pi}$ correspondantes. En particulier :

Proposition 8. — (a) Soient H un sous-groupe de G, φ_H une fonction centrale sur H, et $\varphi_G = \operatorname{Ind}_H^G \varphi_H$ la fonction centrale sur G déduite de φ_H par induction. On a

$$(42) \quad \tilde{\pi}_{\varphi_G}(x) = \tilde{\pi}_{\varphi_H}(x) \quad \text{pour tout } x \geq 2.$$

(b) Soient N un sous-groupe distingué de G , $\varphi_{G/N}$ une fonction centrale sur G/N et φ la fonction centrale sur G obtenue en composant $\varphi_{G/N}$ avec $G \rightarrow G/N$. On a

$$(43) \quad \tilde{\pi}_{\varphi_G}(x) = \tilde{\pi}_{\varphi_{G/N}}(x) \quad \text{pour tout } x \geq 2.$$

Par linéarité, il suffit de prouver (a) lorsque φ_H , donc aussi φ_G , est un caractère; dans ce cas, (42) résulte de (41) et du fait bien connu ([1], p. 297) que $L(s, \varphi_G) = L(s, \varphi_H)$. De même, (b) résulte de l'égalité $L(s, \varphi_G) = L(s, \varphi_{G/N})$.

Remarque

En combinant les prop. 7 et 8, on voit que les fonctions π_φ sont « presque » invariantes par induction et extension.

2.7. La propriété (R_k)

Soit C une partie de G stable par conjugaison, et soit k un nombre > 0 . Nous dirons que C satisfait à la propriété (R_k) si :

(R_k) — Pour tout $s \in C$, il existe un sous-groupe H de G contenant s , et un sous-groupe distingué U de H tels que :

(a) $|U| \geq k$;

(b) tout élément de la forme us , avec $u \in U$, est conjugué de s dans H .

Exemples

1) Supposons que $G = \mathbf{GL}_r(\mathbf{F}_q)$, et que tous les éléments de C soient réguliers et déployés, autrement dit possèdent r valeurs propres distinctes dans $\mathbf{F}_q$. Tout $s \in C$ peut alors se mettre sous forme diagonale, et l'on peut prendre pour H (resp. U) le groupe trigonal (resp. trigonal strict) supérieur; on en conclut que C satisfait à (R_k) , avec $k = q^{r(r-1)/2}$.

2) Supposons que C satisfasse à la condition suivante :

(R'_k) — Pour tout $s \in C$, il existe un sous-groupe abélien A de G normalisé par s tel que le groupe des éléments de la forme $a^{-1}sas^{-1}$, où a parcourt A , soit d'ordre $\geq k$.

Alors C satisfait à (R_k) . En effet, si s et A sont comme ci-dessus, on prend pour H le groupe engendré par s et A , et pour U le groupe des éléments de la forme $a^{-1}sas^{-1}$, avec $a \in A$. Il est clair que les conditions (a) et (b) de (R_k) sont satisfaites.

La propriété (R_k) permet de « gagner un facteur k » dans les th. 3 et 4. De façon plus précise :

Théorème 7. — Supposons que C satisfasse à (R_k) . Alors :

(i) Pour tout $x \geq 3$ tel que

$$(44) \quad \log x \geq \frac{1}{k} c_5 (\log d_E) (\log \log d_E) (\log \log \log 6d_E)$$

on a

$$(45) \quad \pi_C(x) \leq c_4 \frac{|C|}{|G|} \text{Li}(x),$$

où c_4 et c_5 sont les constantes absolues introduites plus haut (cf. th. 3 et Remarque suivant le cor. 2 à la prop. 7).

(ii) Sous (GRH), on a, pour tout $x \geq 2$,

$$(46_R) \quad \left| \pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|} \text{Li}(x) \right| \leq \frac{1}{k} c_{21} \frac{|C|}{|G|} x^{1/2} (\log d_E + n_E \log x),$$

où c_{21} est une constante absolue.

(Noter la présence du facteur $1/k$ dans (44) et (46_R).)

Par additivité, il suffit de prouver ce théorème lorsque C est la classe de conjugaison d'un élément s . Choisissons alors H et U satisfaisant aux conditions (a) et (b) de (R_k) . Notons φ_G la fonction caractéristique de la classe C ; on a

$$\varphi_G(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in C, \text{ i.e. si } g \text{ est conjugué à } s \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit C_H la classe de conjugaison de s dans H . Posons

$$\lambda = |C| |C_H|^{-1} |H| |G|^{-1},$$

et soit φ_H la fonction sur H qui vaut λ sur C_H et 0 ailleurs. On vérifie facilement que

$$\varphi_G = \text{Ind}_H^G \varphi_H.$$

Soit de même $C_{H/U}$ la classe de conjugaison dans H/U de l'image de s , et soit $\varphi_{H/U}$ la fonction sur H/U qui vaut λ sur $C_{H/U}$ et 0 ailleurs. D'après la partie (b) de (R_k) , C_H est l'image réciproque de $C_{H/U}$ par la projection $H \rightarrow H/U$; il en résulte que φ_H est la composée de $\varphi_{H/U}$ et de $H \rightarrow H/U$. En appliquant la prop. 8, on obtient alors

$$(47) \quad \tilde{\pi}_{\varphi_G}(x) = \tilde{\pi}_{\varphi_H}(x) = \tilde{\pi}_{\varphi_{H/U}}(x) \quad \text{pour tout } x \geq 2.$$

Notons E' et K' les sous-corps de E fixés par U et H respectivement. L'extension E'/K' est galoisienne de groupe de Galois H/U . De plus, comme $[E:E'] = |U| \geq k$, il résulte de la formule (3) du n° 1.3 que l'on a

$$(48) \quad \log d_{E'} \leq \frac{1}{k} \log d_E.$$

La condition

$$(44) \quad \log x \geq \frac{1}{k} c_5 (\log d_E) (\log \log d_E) (\log \log \log 6d_E)$$

entraîne donc

$$(49) \quad \log x \geq c_5 (\log d_{E'}) (\log \log d_{E'}) (\log \log \log 6d_{E'});$$

en appliquant le cor. 2 à la prop. 7 à l'extension E'/K' , on en déduit

$$(50) \quad \tilde{\pi}_{\varphi_{H/U}}(x) \leq c_4 m(\varphi_{H/U}) \operatorname{Li}(x).$$

Mais il est clair que $m(\varphi_{H/U}) = m(\varphi_H) = m(\varphi_G) = |C|/|G|$. On peut donc récrire (50) sous la forme

$$(51) \quad \tilde{\pi}_{\varphi_{H/U}}(x) \leq c_4 \frac{|C|}{|G|} \operatorname{Li}(x).$$

Comme $\pi_C(x) \leq \tilde{\pi}_{\varphi_G}(x) = \tilde{\pi}_{\varphi_{H/U}}(x)$, ceci démontre (45).

Supposons maintenant (GRH) satisfaite. En appliquant le cor. 2 à la prop. 7 à l'extension E'/K' , et tenant compte de (47) et (48), on obtient

$$(52_R) \quad \left| \tilde{\pi}_{\varphi_G}(x) - \frac{|C|}{|G|} \operatorname{Li}(x) \right| \leq \frac{1}{h} c_6 \frac{|C|}{|G|} x^{1/2} (\log d_E + n_E \log x).$$

D'autre part, la prop. 7 montre que

$$|\pi_C(x) - \tilde{\pi}_{\varphi_G}(x)| \leq c_{15} \left(\frac{1}{n} \log d_E + n_K x^{1/2} \right).$$

Pour obtenir (46_R), il suffit donc de prouver l'existence d'une constante absolue c_{20} telle que

$$(53) \quad \frac{1}{n} \log d_E + n_K x^{1/2} \leq \frac{1}{h} c_{20} \frac{|C|}{|G|} x^{1/2} (\log d_E + n_E \log x)$$

pour tout $x \geq 2$. Or c'est immédiat : on peut prendre par exemple $c_{20} = 1/\log 2$, comme on le voit en remarquant que $n_E/n_K = n$, et que $|C| \geq |U| \geq h$.

§ 3. Réduction mod ℓ^n des variétés ℓ -adiques

A partir de maintenant, et jusqu'au § 6 inclus, la lettre ℓ désigne un nombre premier fixé.

3.1. La notion de M-dimension

Soit N un entier ≥ 0 . Soit $X = (\mathbf{Z}_\ell)^N$ le produit de N copies de $\mathbf{Z}_\ell$; c'est une variété analytique ℓ -adique de dimension N (cf. [2], [39]). Si n est un entier ≥ 0 , on pose

$$X_n = X/\ell^n X = \mathbf{Z}/\ell^n \mathbf{Z} \times \dots \times \mathbf{Z}/\ell^n \mathbf{Z} \quad (N \text{ facteurs});$$

l'espace compact X est limite projective des ensembles finis X_n .

Soit Y une partie fermée de X . Notons Y_n l'image de Y dans X_n ; c'est la « réduction de Y mod ℓ^n ». On a

$$Y = \varprojlim Y_n \quad (\text{puisque } Y \text{ est fermée})$$

et
$$|Y_n| \leq |X_n| = \ell^{nN}.$$

Soit d un nombre réel ≥ 0 . Nous dirons que Y est de M-dimension $\leq d$ (ce que nous écrirons $\dim_M Y \leq d$) si

$$(54) \quad |Y_n| = O(\ell^{nd}) \quad \text{pour } n \rightarrow \infty.$$

Ainsi, un point est de M-dimension ≤ 0 , et tout sous-espace de X est de M-dimension $\leq N$.

Cette définition peut aussi se présenter en termes de mesures de ε -voisinages, à la Minkowski (d'où l'emploi de la lettre « M ») :

Munissons X de la distance $\|x - y\| = 1/\ell^n$, où n est le plus grand entier ≥ 0 tel que $x \equiv y \pmod{\ell^n}$. Les points de X à distance $\leq 1/\ell^n$ de Y forment une partie ouverte compacte $Y(n)$ de X (c'est l'image réciproque de Y_n par la projection $X \rightarrow X_n$). Si $\mu_X = dx_1 \dots dx_N$ désigne la mesure de Haar de X , normalisée de telle sorte que sa masse totale soit 1, on a

$$(55) \quad \mu_X(Y(n)) = |Y_n|/|X_n| = \ell^{-nN} |Y_n|.$$

La propriété (54) revient donc à dire que

$$(56) \quad \mu_X(Y(n)) = O(\ell^{n(d-N)}) \quad \text{pour } n \rightarrow \infty,$$

ou encore que la mesure d'un ε -voisinage de Y est $O(\varepsilon^{N-d})$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Proposition 9. — Soient N' un entier ≥ 0 , $X' = (\mathbf{Z}_\ell)^{N'}$ et

$$\varphi : X' \rightarrow X$$

une application analytique ℓ -adique de X' dans X (cf. [2], § 4). Soient Y' une partie fermée de X' et Y son image par φ . Si $\dim_{\mathbf{M}} Y' \leq d$, on a $\dim_{\mathbf{M}} Y \leq d$.

Puisque φ est analytique, φ est Lipschitzienne. Il existe donc un entier $m \geq 0$ tel que

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \ell^m \|x - y\| \quad \text{pour } x, y \in X'.$$

Si n est un entier ≥ 0 , on a

$$x \equiv y \pmod{\ell^{n+m}} \Rightarrow \varphi(x) \equiv \varphi(y) \pmod{\ell^n}.$$

L'application φ définit donc par passage au quotient une application $\varphi_n : X'_{n+m} \rightarrow X_n$, et l'on a $Y_n = \varphi_n(Y'_{n+m})$, d'où

$$|Y_n| \leq |Y'_{n+m}| = O(\ell^{(n+m)d}) = \ell^{md} O(\ell^{nd}) = O(\ell^{nd}),$$

ce qui prouve bien que $\dim_{\mathbf{M}} Y \leq d$.

La prop. 9 montre en particulier que la notion de M -dimension est *invariante* par tout automorphisme analytique de X .

Extension aux variétés analytiques ℓ -adiques

Soit Ω une variété analytique ℓ -adique compacte, de dimension N en tout point, et soit Y une partie fermée de Ω . Choisissons un recouvrement ouvert (U_i) de Ω formé de « boules ℓ -adiques » de dimension N (de sorte que chaque U_i est analytiquement isomorphe à $(\mathbf{Z}_\ell)^N$). Nous dirons que Y est de M -dimension $\leq d$ s'il en est ainsi de tous les $Y \cap U_i$; d'après la prop. 9, cette définition est indépendante du recouvrement (U_i) choisi.

3.2. Ensembles d -paramétrables et sous-espaces analytiques

On suppose maintenant que d est un entier ≥ 0 .

Une partie Y de $X = (\mathbf{Z}_\ell)^N$ est dite *d -paramétrable* s'il existe une famille finie d'applications analytiques

$$\varphi_i : (\mathbf{Z}_\ell)^d \rightarrow X$$

telle que Y soit réunion des images des φ_i .

En appliquant la prop. 9 avec $Y' = X' = (\mathbf{Z}_\ell)^d$, on obtient :

Proposition 10. — Si Y est d -paramétrable, on a $\dim_{\mathbf{M}} Y \leq d$.

(Un résultat analogue vaut dans le cas réel, cf. par exemple Federer [11], p. 274.)

Corollaire. — Toute sous-variété analytique (lisse) de X , fermée et de dimension $\leq d$ en tout point, est de M -dimension $\leq d$.

En effet, il est clair qu'une telle variété est d -paramétrable (c'est même une somme disjointe de boules de dimension $\leq d$, cf. [39]).

On peut se demander si l'hypothèse de lissité peut être supprimée, autrement dit si le corollaire ci-dessus reste valable pour des sous-espaces analytiques de X , ayant éventuellement des singularités. La réponse est affirmative :

Théorème 8. — Tout sous-espace analytique fermé de X , de dimension $\leq d$, est de M -dimension $\leq d$.

Soit Y un tel sous-espace. On va montrer par récurrence sur d que Y est d -paramétrable, de sorte qu'on peut lui appliquer la prop. 10. Le cas $d=0$ est trivial, Y étant réduit à un ensemble fini. Supposons $d \geq 1$.

Le théorème de résolution des singularités (Hironaka [16], p. 161) est applicable localement à Y , du fait que l'anneau local des séries convergentes à coefficients dans $\mathbf{Q}_\ell$ est excellent ([10]). Le passage du local au global ne présente pas de difficulté puisqu'on dispose de recouvrements arbitrairement fins par des ouverts compacts. On en conclut qu'il existe un sous-espace analytique fermé Y^s de Y , de dimension $\leq d-1$, et un éclatement $\theta: \tilde{Y} \rightarrow Y$, où :

- a) $\tilde{Y}$ est une variété lisse compacte partout de dimension d ;
- b) θ est une application analytique;
- c) la restriction de θ à $\tilde{Y} - \theta^{-1}(Y^s)$ est un isomorphisme de $\tilde{Y} - \theta^{-1}(Y^s)$ sur $Y - Y^s$.

Vu l'hypothèse de récurrence, Y^s est $(d-1)$ -paramétrable, donc aussi d -paramétrable. D'autre part, les propriétés a) et b) entraînent que $\theta(\tilde{Y})$ est d -paramétrable. D'après c), Y est réunion de Y^s et de $\theta(\tilde{Y})$; donc Y est d -paramétrable.

Remarque

Le principe de la démonstration ci-dessus (utilisation de la résolution des singularités) m'a été indiqué par Michel Raynaud; je l'en remercie vivement. Il était souhaitable d'avoir une démonstration plus élémentaire, ne serait-ce que pour pouvoir l'appliquer à des corps locaux d'égale caractéristique. Cela vient d'être fait par J. Oesterlé (à paraître), au moyen d'une généralisation des invariants $N_a(f, r)$ introduits par Robba [34] dans le cas des hypersurfaces.

La même question se pose sur $\mathbf{R}$: si K est une partie compacte d'un sous-espace analytique de dimension $\leq d$ de $\mathbf{R}^N$, peut-on prouver élémentairement (i.e. sans résolution des singularités) que le volume des ε -voisinages de K est $o(\varepsilon^{N-d})$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$?

Exemple : hypersurfaces algébriques

Soit $F(T_1, \dots, T_N)$ un polynôme non identiquement nul, à coefficients dans $\mathbf{Z}_\ell$. Prenons pour Y l'ensemble des zéros de F , i.e. l'ensemble des points $x = (x_1, \dots, x_N)$

de $(\mathbf{Z}_\ell)^N$ tels que $F(x)=0$. Si n est un entier ≥ 0 , Y_n est la partie de $X_n=(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})^N$ obtenue en réduisant $Y \bmod \ell^n$; si l'on note $\tilde{Y}_n$ l'ensemble des $x \in X_n$ tels que $F(x) \equiv 0 \pmod{\ell^n}$, on a $Y_n \subset \tilde{Y}_n$ mais il n'y a pas égalité en général (on peut simplement dire que Y_n est l'image de $\tilde{Y}_{n+k}$ dans $\tilde{Y}_n$, pour k assez grand).

Le th. 8 s'applique à Y , avec $d=N-1$. D'où :

Corollaire. — On a $|Y_n| = O(\ell^{n(N-1)})$ pour $n \rightarrow \infty$.

(En fait, la méthode d'Oesterlé-Robba citée plus haut donne $|Y_n| \leq \deg(F) \ell^{n(N-1)}$ pour tout $n \geq 0$, ce qui est bien plus précis.)

L'énoncé analogue pour $|\tilde{Y}_n|$ est inexact, comme le montrent des exemples simples. Toutefois, il n'est pas difficile de prouver que

$$(57) \quad |\tilde{Y}_n| = O(\ell^{n(N-\delta)}), \quad \text{avec } \delta = 1/\deg(F).$$

La variation de $|\tilde{Y}_n|$ avec n a été étudiée par Igusa ([17], [18]) qui a notamment montré que la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{Y}_n| t^n$ est une fonction rationnelle de t ; j'ignore si un résultat analogue vaut pour les $|Y_n|$.

3.3. Compléments

(Les résultats de ce numéro ne seront pas utilisés dans la suite.)

Revenons au cas où Y est une sous-variété fermée lisse de $X=(\mathbf{Z}_\ell)^N$, de dimension d en tout point. D'après le cor. à la prop. 10, on a

$$|Y_n| = O(\ell^{nd}) \quad \text{pour } n \rightarrow \infty.$$

Nous allons préciser ce résultat (cf. th. 9 ci-après).

Remarquons d'abord que le plongement de Y dans X munit Y d'une *mesure canonique* μ_Y , analogue à l'élément d'aire du cas réel : si $I = \{i_1, \dots, i_d\}$, avec $i_1 < i_2 < \dots < i_d$, est une partie à d éléments de $[1, N]$, notons $\omega_{Y,I}$ la forme différentielle induite sur Y par $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_d}$, et notons $\mu_{Y,I}$ la mesure positive $\bmod(\omega_{Y,I})$ associée à $\omega_{Y,I}$ au sens de Bourbaki [2], § 10.1. La *mesure canonique* de Y est alors définie par

$$(58) \quad \mu_Y = \sup_I (\mu_{Y,I}),$$

où I parcourt les parties à d éléments de l'intervalle $[1, N]$.

[Autre définition de μ_Y : si $y \in Y$, l'espace tangent $T_y Y$ à Y en y est un $\mathbf{Q}_\ell$ -sous-espace vectoriel de $T_y X = (\mathbf{Q}_\ell)^N$, donc possède un $\mathbf{Z}_\ell$ -réseau canonique, à savoir $T_y Y \cap (\mathbf{Z}_\ell)^N$. Le fibré tangent à Y est ainsi muni d'un champ localement constant de réseaux (analogue ℓ -adique d'un ds^2). La mesure μ_Y est la mesure associée à la puissance extérieure d -ième de ce champ.]

Soit maintenant

$$(59) \quad \text{vol}(Y) = \mu_Y(Y)$$

la masse totale de la mesure μ_Y .

Théorème 9. — On a $|Y_n| = \text{vol}(Y)\ell^{nd}$ pour n assez grand.

(La situation est analogue à celle du cas réel, où le volume du ε -voisinage d'une variété lisse compacte est un *polynôme en ε* , pour ε assez petit, cf. par exemple H. Weyl [49].)

Commençons par vérifier le théorème dans un certain nombre de cas :

Cas (i). — Y est la sous-variété de $(\mathbf{Z}_\ell)^N$ définie par les équations

$$\begin{aligned} x_{d+1} &= \varphi_{d+1}(x_1, \dots, x_d) \\ &\dots \\ x_N &= \varphi_N(x_1, \dots, x_d) \end{aligned}$$

où les φ_i ($d < i \leq N$) sont des séries formelles en $x_1, \dots, x_d$ à coefficients dans $\mathbf{Z}_\ell$ tendant vers 0 (séries « restreintes »). La mesure μ_Y est alors égale à $dx_1 \dots dx_d$ et sa masse totale est 1. On a $|Y_n| = \ell^{nd}$ pour tout $n \geq 0$, et le th. 9 est bien vérifié dans ce cas.

Cas (ii). — C'est le cas que l'on déduit du cas (i) par une *permutation* des coordonnées $(x_1, \dots, x_N)$; il est clair que le th. 9 est encore vérifié.

Cas (iii)_m, avec m entier ≥ 0 . — C'est le cas où Y est de la forme

$$Y = y + \ell^m Y_m,$$

où y est un point de $(\mathbf{Z}_\ell)^N$ et où Y_m est une sous-variété de $(\mathbf{Z}_\ell)^N$ du type (ii) ci-dessus.

La variété Y est alors contenue dans la classe de $y \bmod \ell^m$ i.e. dans une boule de rayon $1/\ell^m$. On a $\text{vol}(Y) = \ell^{-md}$, $|Y_n| = 1$ pour $n \leq m$ et $|Y_n| = \ell^{d(n-m)}$ si $n \geq m$. D'où

$$Y_n = \text{vol}(Y)\ell^{nd} \quad \text{si } n \geq m,$$

et le th. 9 est encore vérifié.

Pour établir le th. 9 dans le cas général, il suffit donc de démontrer le résultat suivant :

Proposition 11. — Si m est assez grand, l'intersection de Y avec toute classe $\bmod \ell^m$ est, soit vide, soit du type (iii)_m ci-dessus.

(En d'autres termes, Y est *somme disjointe* de sous-variétés ouvertes compactes du type (iii)_m.)

Ce résultat est essentiellement connu, au moins dans le cas algébrique (il intervient dans les travaux de A. Néron et M. Artin, par exemple). Rappelons sa démonstration :

Quitte à décomposer Y en somme disjointe de sous-variétés ouvertes compactes, on peut supposer qu'il existe une partie I à d éléments de $[1, N]$ telle que $\mu_Y = \mu_{Y,I}$, cf. (58); après permutation des coordonnées, on peut supposer que $I = [1, d]$. Le fait

que $\mu_Y = \mu_{Y,1}$ équivaut alors à dire que, pour tout $y \in Y$, l'espace tangent $T_y Y$ est le sous-espace de $T_y X = (\mathbf{Q}_\ell)^N$ défini par un système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} x_{d+1} &= a_{d+1,1}x_1 + \dots + a_{d+1,d}x_d \\ &\dots \\ x_N &= a_{N,1}x_1 + \dots + a_{N,d}x_d \end{aligned}$$

dont les coefficients a_{ij} *appartiennent* à $\mathbf{Z}_\ell$. Si l'on prend y pour origine, cela signifie que, au voisinage de $y=0$, la variété Y est définie par un système d'équations de la forme

$$\begin{aligned} x_{d+1} &= a_{d+1,1}x_1 + \dots + a_{d+1,d}x_d + \psi_{d+1}(x_1, \dots, x_d) \\ &\dots \\ x_N &= a_{N,1}x_1 + \dots + a_{N,d}x_d + \psi_N(x_1, \dots, x_d) \end{aligned}$$

où les ψ_i sont des séries convergentes ne contenant que des termes de degrés ≥ 2 . Lorsque l'on fait le changement de variables $x_i = \ell^m z_i$ (de façon à se placer dans la boule de rayon $1/\ell^m$ centré en y), ces équations s'écrivent

$$z_i = \sum_j a_{i,j} z_j + \psi_{i,m}(z_1, \dots, z_d) \quad (d < i \leq N; 1 \leq j \leq d)$$

et l'on vérifie tout de suite que, si m est assez grand, les coefficients des $\psi_{i,m}$ *appartiennent* à $\mathbf{Z}_\ell$ et tendent vers 0. L'intersection de Y et de la boule de rayon $1/\ell^m$ est donc de type $(iii)_m$. Ceci s'applique à tout point de Y . La prop. 11 en résulte par un argument de compacité.

Remarques

1) La démonstration montre en outre que, si n est assez grand, les *fibres* de l'application $Y_{n+1} \rightarrow Y_n$ sont des espaces affines sur $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ de dimension d ; en particulier, elles ont toutes ℓ^d éléments.

2) Le nombre $\text{vol}(Y)$ est de la forme a/ℓ^m , avec $a \in \mathbf{Z}$ et m entier ≥ 0 . Son image dans $\mathbf{Z}/(\ell-1)\mathbf{Z}$ par réduction mod $(\ell-1)$ ne dépend que de la variété ℓ -adique Y , et pas de son plongement dans $(\mathbf{Z}_\ell)^N$; c'est l'invariant de Y défini dans [39].

Le cas singulier

Supprimons l'hypothèse de lissité sur Y , i.e. supposons seulement que Y soit un sous-espace analytique fermé de X , de dimension $\leq d$, ayant éventuellement des singularités. Notons Y^{reg} l'ensemble des points en lesquels Y est lisse de dimension d . La mesure canonique μ_Y est définie sur Y^{reg} , et l'on prouve sans grande difficulté que c'est une *mesure bornée*. Cela permet de définir le volume de Y par la formule

$$(60) \quad \text{vol}(Y) = \mu_Y(Y^{\text{reg}}).$$

En appliquant le th. 9 aux sous-variétés ouvertes compactes de Y^{reg} , on voit que

$$(61) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} |Y_n|/\ell^{nd} \geq \text{vol}(Y).$$

En fait, on a le résultat plus précis suivant

$$(62) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |Y_n|/\ell^{nd} = \text{vol}(Y);$$

c'est ce que vient de prouver J. Oesterlé (à paraître). Il est probable que l'on a même :

$$(63_?) \quad |Y_n| = \text{vol}(Y)\ell^{nd} + O(\ell^{n\delta}) \quad \text{avec } \delta < d;$$

cela devrait pouvoir se démontrer en utilisant l'« inégalité de Lojasiewicz » ℓ -adique.

(Signalons, à titre de curiosité, que $\text{vol}(Y)$ est un nombre rationnel. Cela se déduit du résultat suivant, que l'on démontre, à la Igusa, en utilisant la résolution des singularités : si α est une forme différentielle analytique de degré d sur une variété ℓ -adique lisse compacte de dimension d , la masse totale de la mesure $\text{mod}(\alpha)$ est un nombre rationnel.)

Généralisations

Les résultats de ce paragraphe restent valables lorsque l'on remplace $\mathbf{Q}_\ell$ par n'importe quel corps local à corps résiduel fini, cf. J. Oesterlé, *loc. cit.*

§ 4. Majorations de $\pi_C(x)$ dans le cas ℓ -adique

4.1. Énoncé du théorème

Soient :

- K un corps de nombres algébriques, de degré fini n_K ;
- S une partie finie de l'ensemble Σ_K des places ultramétriques de K;
- G un groupe de Lie ℓ -adique compact, de dimension $N \geq 1$ (pour tout ce qui concerne les groupes de Lie ℓ -adiques, voir [3], [26]);
- C une partie fermée de G, stable par conjugaison;
- E une extension galoisienne infinie de K, de groupe de Galois G, non ramifiée en dehors de S.

Si $v \in \Sigma_K - S$, on note σ_v la substitution de Frobenius de v relativement à l'extension E/K; c'est un élément de G, défini à conjugaison près. Comme au § 2, on note Σ_C l'ensemble des $v \in \Sigma_K - S$ tels que $\sigma_v \in C$; si $x \geq 2$, on note $\pi_C(x)$ le nombre des $v \in \Sigma_C$ tels que $Nv \leq x$. On va donner une *majoration asymptotique* de $\pi_C(x)$:

Théorème 10. — Soit d un nombre réel tel que $0 \leq d < N$. Supposons que $\dim_{\mathbb{M}} C \leq d$ (au sens du n° 3.1). Posons $\alpha = (N - d)/N$. Alors :

(i) On a

$$(64) \quad \pi_C(x) = O(\text{Li}(x)/\varepsilon(x)^\alpha) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty,$$

avec

$$(65) \quad \varepsilon(x) = (\log x)(\log \log x)^{-2}(\log \log \log x)^{-1}, \quad x \geq 16.$$

(ii) Sous (GRH), on a

$$(66_R) \quad \pi_C(x) = O(\text{Li}(x)/\varepsilon_R(x)^\alpha) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty,$$

avec

$$(67) \quad \varepsilon_R(x) = x^{1/2}(\log x)^{-2}.$$

La démonstration sera donnée aux n°s 4.3 et 4.4 ci-après.

Corollaire 1. — Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$(68) \quad \pi_C(x) = O(x/(\log x)^{1+\alpha-\varepsilon})$$

et, sous (GRH),

$$(69_R) \quad \pi_C(x) = O(x^{1-\alpha/2+\varepsilon}).$$

Cela résulte du théorème, compte tenu de $\text{Li}(x) \sim x/\log x$ et de

$$(70) \quad \varepsilon(x)^{-1} = O((\log x)^{-1+\delta}) \quad \text{pour tout } \delta > 0$$

$$(71) \quad \varepsilon_R(x)^{-1} = O(x^{-1/2+\delta}) \quad \text{pour tout } \delta > 0.$$

Corollaire 2. — La série $\sum_v 1/Nv$, étendue aux $v \in \Sigma_C$, est convergente.

Cela résulte de (68), et de la convergence de la série de terme général $1/n(\log n)^\rho$ pour $\rho > 1$.

Remarques

1) On verra au § 5 que l'on peut, dans certains cas, renforcer le th. 10 en remplaçant l'exposant α par un exposant β un peu plus grand.

2) Les constantes cachées dans la notation « O » de (64) et (66_R) dépendent des données K, S, G, C, d ; ce ne sont pas des constantes absolues.

Exemple. — Supposons que C soit un sous-espace analytique de G d'intérieur vide. D'après le th. 8, on a $\dim_M C \leq N-1$. On peut donc appliquer le th. 10 avec $d = N-1$ et $\alpha = 1/N$.

4.2. Préparatifs

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G . C'est un $\mathbf{Q}_\ell$ -espace vectoriel de dimension N , sur lequel G opère par la représentation adjointe. On sait (cf. par exemple [3], chap. III, § 7) que l'application logarithme

$$\log_G : G \rightarrow \mathfrak{g}$$

est un *isomorphisme local*. Comme G est compact, il existe un $\mathbf{Z}_\ell$ -réseau $\mathfrak{g}(o)$ de $\mathfrak{g}$ stable par la représentation adjointe. Quitte à remplacer $\mathfrak{g}(o)$ par un multiple $\ell^r \mathfrak{g}(o)$, avec r assez grand, on peut supposer que :

- a) $\mathfrak{g}(o)$ est stable par $(x, y) \mapsto \ell^{-2}[x, y]$ (donc aussi par la « loi de Hausdorff », cf. [3], *loc. cit.*);
- b) il existe un sous-groupe ouvert distingué $G(o)$ de G tel que la restriction de $\log_G$ à $G(o)$ définisse un isomorphisme de $G(o)$ sur $\mathfrak{g}(o)$, muni de la loi de Hausdorff.

Choisissons de tels $\mathfrak{g}(o)$ et $G(o)$. Pour tout entier $n \geq 0$, posons $\mathfrak{g}(n) = \ell^n \mathfrak{g}(o)$ et notons $G(n)$ l'ensemble des $s \in G(o)$ tels que $\log_G s \in \mathfrak{g}(n)$. On vérifie tout de suite que $G(n)$ est un sous-groupe ouvert distingué de G . Si l'on pose

$$G_n = G/G(n),$$

on a

$$(72) \quad |G_n| = a \ell^{nN} \quad \text{avec } a = (G : G(o)) = |G_0|.$$

Soit C_n l'image de C par la projection $G \rightarrow G_n$. L'hypothèse $\dim_{\mathbb{M}} C \leq d$ se traduit par :

$$(73) \quad |C_n| = O(\ell^{nd}) \quad \text{pour } n \rightarrow \infty,$$

ou, ce qui revient au même vu (72),

$$(74) \quad |C_n|/|G_n| = O(1/|G_n|^{\alpha}) \quad \text{pour } n \rightarrow \infty.$$

Soit E_n l'ensemble des éléments de E fixés par $G(n)$. L'extension E_n/K est galoisienne, de groupe de Galois G_n . D'après la formule (19) du n° 2.4, on a

$$(75) \quad \log d_{E_n} \leq |G_n| (\log d_K + n_K \log |G_n| + \sum_{p \in S_{\mathbf{q}}} \log p),$$

où $S_{\mathbf{q}}$ désigne l'ensemble des nombres premiers p tels qu'il existe $v \in S$ divisant p . En particulier :

$$(76) \quad \log d_{E_n} \leq |G_n| (O(1) + n_K \log |G_n|) \leq (n_K + o(1)) |G_n| \log |G_n|$$

pour $n \rightarrow \infty$.

Remarque. — En utilisant un théorème de Sen [37], on peut prouver :

$$(76') \quad \log d_{E_n} \leq \frac{1}{N} |G_n| (O(1) + n_K \log |G_n|) \quad \text{pour } n \rightarrow \infty,$$

ce qui améliore (76) par un facteur N .

4.3. Démonstration du théorème 10 (i)

Le principe de la démonstration est celui-ci : pour x donné, on choisit un entier $n = n(x)$ convenable, et l'on majore $\pi_{C_n}(x)$ (qui est relatif à l'extension finie E_n/K de groupe de Galois G_n) grâce au th. 3 du n° 2.3. Compte tenu de l'inégalité évidente

$$(77) \quad \pi_C(x) \leq \pi_{C_n}(x),$$

on en déduit bien une majoration de $\pi_C(x)$.

De façon plus précise, choisissons un nombre réel $b > 0$ tel que

$$(78) \quad bc_5 n_K < 1,$$

où c_5 est la constante absolue introduite au n° 2.3. Vu (72), si x est assez grand, il existe un entier positif $n = n(x)$ et un seul tel que

$$(79) \quad b\ell^{-N} \varepsilon(x) < |G_n| \leq b\varepsilon(x),$$

à savoir $n = [\log(a^{-1}b\varepsilon(x))/N \log \ell]$.

Nous allons voir qu'avec ce choix de n , on a

$$(80) \quad \log x \geq c_5 (\log d_{E_n}) (\log \log d_{E_n}) (\log \log \log 6d_{E_n})$$

pourvu que x soit assez grand. En effet, on déduit de (76) et (79) que

$$\begin{aligned} \log d_{E_n} &\leq (n_K + o(1)) b \varepsilon(x) \log \varepsilon(x) \\ &\leq (n_K + o(1)) b (\log x) (\log \log x)^{-1} (\log \log \log x)^{-1} \end{aligned}$$

d'où $\log \log d_{E_n} \leq (1 + o(1)) \log \log x$

et $\log \log \log 6d_{E_n} \leq (1 + o(1)) \log \log \log x$.

En multipliant ces inégalités, on obtient

$$c_5 (\log d_{E_n}) (\log \log d_{E_n}) (\log \log \log 6d_{E_n}) \leq (bc_5 n_K + o(1)) \log x,$$

ce qui entraîne (80) pour x assez grand puisque $bc_5 n_K < 1$.

Ceci fait, on applique le th. 3 du n° 2.3 à l'extension E_n/K et l'on obtient

$$(81) \quad \pi_{C_n}(x) \leq c_4 |C_n| |G_n|^{-1} \text{Li}(x).$$

Vu (74) et (79), on a $|C_n|/|G_n| = O(\varepsilon(x)^{-\alpha})$. D'où

$$(82) \quad \pi_{C_n}(x) = O(\text{Li}(x)/\varepsilon(x)^\alpha),$$

ce qui démontre le th. 10 (i), compte tenu de (77).

Remarque. — La démonstration ci-dessus montre que le choix de la fonction $\varepsilon(x)$ est imposé par la forme de la condition (13) du th. 3. Si par exemple on pouvait remplacer (13) par

$$\log x \geq c_{22} \log d_E,$$

on pourrait prendre pour $\varepsilon(x)$ la fonction $(\log x)(\log \log x)^{-1}$.

4.4. Démonstration du théorème 10 (ii)

On procède de manière analogue : si x est assez grand, il existe un unique entier positif $n = n(x)$ tel que

$$(83) \quad \ell^{-N} \varepsilon_R(x) < |G_n| \leq \varepsilon_R(x).$$

D'après le th. 4 du n° 2.4, on a, sous (GRH),

$$(84_R) \quad \pi_{C_n}(x) \leq |C_n| |G_n|^{-1} \{ \text{Li}(x) + c_6 x^{1/2} \log d_{E_n} + c_6 [E_n : \mathbf{Q}] x^{1/2} \log x \}.$$

Vu (83) et (74), on a

$$|C_n| |G_n|^{-1} = O(\varepsilon_R(x)^{-\alpha}).$$

D'autre part, (83) et (76) entraînent :

$$x^{1/2} \log d_{E_n} = O(x^{1/2} \varepsilon_R(x) \log \varepsilon_R(x)) = O(x(\log x)^{-1}) = O(\text{Li}(x))$$

et $[E_n : \mathbf{Q}] x^{1/2} \log x = O(\varepsilon_R(x) x^{1/2} \log x) = O(x(\log x)^{-1}) = O(\text{Li}(x)).$

En portant ces majorations dans (84_R), on en déduit

$$(85_R) \quad \pi_{C_n}(x) = O(\text{Li}(x)/\varepsilon_R(x)^\alpha),$$

ce qui démontre le th. 10 (ii), compte tenu de (77).

4.5. Un exemple

Lorsque C est réduit à un seul élément, le th. 10 s'applique avec $d=0$ et $\alpha=1$; sous (GRH), il implique que

$$(86_R) \quad \pi_C(x) = O(x^{1/2} \log x) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

Nous allons voir que cette borne n'est pas loin d'être optimale.

Prenons pour K un corps quadratique imaginaire. Supposons (afin de simplifier les notations) que ℓ se décompose dans K en deux places distinctes λ et $\bar{\lambda}$, que le nombre de classes de K soit 1, et que K ne contienne pas de racine de l'unité $\neq \pm 1$ (exemple : $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-163})$ et $\ell = 41$). Si $v \in \Sigma_K$, choisissons un générateur z_v de l'idéal $\mathfrak{p}_v$, et posons $\omega(v) = z_v / \bar{z}_v$; comme z_v est défini au signe près, $\omega(v)$ est indépendant du choix de z_v . On a $\omega(v) \in K^*$; comme la place λ définit un plongement de K dans $\mathbf{Q}_\ell$, on peut identifier $\omega(v)$ à un élément de $\mathbf{Q}_\ell^*$. On a $\omega(v) \in \mathbf{Z}_\ell^*$ si v ne divise pas ℓ , i.e. si $v \neq \lambda, \bar{\lambda}$. D'après la théorie du corps de classes, il existe une extension abélienne E/K , de groupe de Galois $G = \mathbf{Z}_\ell^*$, qui est non ramifiée en dehors de $S = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$ et telle que, pour tout $v \in \Sigma_K - S$, la substitution de Frobenius σ_v de v soit égale à $\omega(v)$. Prenons $C = \{1\}$, de sorte que Σ_C est formé des places v de K qui sont *complètement décomposées* dans l'extension E . On a $v \in \Sigma_C$ si et seulement si $z_v = \bar{z}_v$; il est facile de voir que cela équivaut à dire que $\mathfrak{p}_v$ est un idéal premier de degré 2, autrement dit engendré par un nombre premier p_v qui est inerte dans $K/\mathbf{Q}$. Comme $Nv = p_v^2$, on en déduit que $\pi_C(x)$ est égal au nombre des $p \leq x^{1/2}$ tels que $\left(\frac{p}{K/\mathbf{Q}}\right) = -1$. D'où :

$$(87) \quad \pi_C(x) \sim x^{1/2} / \log x \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

La majoration (86_R) est donc *optimale en ce qui concerne l'exposant de x* (mais probablement pas en ce qui concerne l'exposant de $\log x$).

Des exemples analogues existent avec $d=0$ et N arbitrairement grand. Par contre, lorsque $d > 0$, je ne connais aucun cas où la majoration du th. 10 (ii) (ni celle du th. 12 (ii)) soit essentiellement optimale. Il est fort possible que l'on ait en fait

$$(88_?) \quad \pi_C(x) = O(x^{1/2} / \log x) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty,$$

lorsque C est un sous-espace analytique de dimension $d < N$, mais je ne vois pas comment le démontrer, même sous (GRH).

4.6. Généralisation

La démonstration du th. 10 fait intervenir de façon essentielle la « tour » d'extensions galoisiennes E_n/K définie au n° 4.2. Plus généralement, considérons une *famille d'extensions galoisiennes finies* $(E_\lambda/K)_{\lambda \in \Lambda}$; si $\lambda \in \Lambda$, soit $G_\lambda = \text{Gal}(E_\lambda/K)$ et soit C_λ une

partie de G_λ stable par conjugaison; soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha \leq 1$. Faisons les hypothèses suivantes :

(a) (*Répartition des degrés*). Il existe un nombre $L > 0$ tel que tout intervalle de $\mathbf{R}_+$ de longueur L contienne au moins un $\log |G_\lambda|$.

(b) (*Croissance des discriminants*). Il existe un nombre $M > 0$ tel que

$$(89) \quad \log d_{E_\lambda} \leq M |G_\lambda| \log |G_\lambda| \quad \text{pour tout } \lambda \in \Lambda.$$

(c) (*Taille des C_λ*). Il existe un nombre $P > 0$ tel que

$$(90) \quad |C_\lambda| / |G_\lambda| \leq P / |G_\lambda|^\alpha \quad \text{pour tout } \lambda \in \Lambda.$$

Posons alors

$$(91) \quad \pi_C(x) = \inf \pi_{C_\lambda}(x) \quad (x \geq 2),$$

où $\pi_{C_\lambda}(x)$ est défini comme au n° 2.1 (relativement à l'extension finie E_λ/K).

Théorème 11. — (i) On a

$$(92) \quad \pi_C(x) = O(\text{Li}(x) / \varepsilon(x)^\alpha) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

(ii) Sous (GRH), on a

$$(93_R) \quad \pi_C(x) = O(\text{Li}(x) / \varepsilon_R(x)^\alpha) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

(Les fonctions $\varepsilon(x)$ et $\varepsilon_R(x)$ sont celles définies dans l'énoncé du th. 10.)

La démonstration est essentiellement la même que celle du th. 10. Pour (i), on choisit un nombre $b > 0$ tel que

$$(94) \quad bMc_5 < 1.$$

D'après (a), si x est assez grand, il existe un $\lambda = \lambda(x)$ tel que

$$(95) \quad e^{-L} b \varepsilon(x) \leq |G_\lambda| \leq b \varepsilon(x).$$

Comme au n° 4.3, on déduit de (95) et (89) que

$$c_5(\log d_{E_\lambda})(\log \log d_{E_\lambda})(\log \log \log 6d_{E_\lambda}) \leq (bMc_5 + o(1)) \log x,$$

d'où, grâce à (94),

$$\log x \geq c_5(\log d_{E_\lambda})(\log \log d_{E_\lambda})(\log \log \log 6d_{E_\lambda})$$

pour x assez grand. En appliquant le th. 3 du n° 2.3, on en déduit

$$\pi_{C_\lambda}(x) \leq c_4 \text{Li}(x) |C_\lambda| / |G_\lambda|;$$

compte tenu de (90) et (95), cela donne

$$\pi_{C_\lambda}(x) = O(\text{Li}(x) / \varepsilon(x)^\alpha),$$

d'où (92).

Sous (GRH), on raisonne de même, en choisissant $\lambda = \lambda(x)$ de telle sorte que

$$(96) \quad e^{-L} \varepsilon_R(x) \leq |G_\lambda| \leq \varepsilon_R(x).$$

Un calcul analogue à celui du n° 4.4 montre alors que

$$x^{1/2} \log d_{E_\lambda} + [E_\lambda : \mathbf{Q}] x^{1/2} \log x = O(\text{Li}(x)),$$

et en appliquant le th. 4 du n° 2.4, on en déduit

$$\pi_{C_\lambda}(x) = O(\text{Li}(x) |C_\lambda| / |G_\lambda|) = O(\text{Li}(x) / \varepsilon_R(x)^\alpha),$$

d'où (93_R).

Exemples

1) Le th. 11, appliqué aux extensions E_n/K du n° 4.2, redonne le th. 10 (noter que le « $\pi_C(x)$ » du th. 11 ne diffère du « $\pi_C(x)$ » du th. 10 que par $O(1)$).

2) Prenons pour Λ l'ensemble des nombres premiers. Supposons que $|G_\lambda|$ soit de l'ordre de grandeur de λ^N , avec $N > 0$, et que E_λ soit non ramifiée en dehors des places divisant λ et de celles appartenant à un ensemble fini fixe. Les conditions (a) et (b) sont alors satisfaites : c'est immédiat pour (a), et pour (b) cela résulte de la formule (19) du n° 2.4. Ceci s'applique notamment aux extensions galoisiennes fournies par les points de division d'ordre premier d'une courbe elliptique définie sur K ; nous reviendrons là-dessus au § 8.

§ 5. Majorations améliorées

5.1. Énoncé du théorème

Les notations sont les mêmes qu'aux nos 4.1 et 4.2. En particulier, $\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre de Lie du groupe de Lie ℓ -adique G . Si $s \in G$, on note $\text{Ad}(s)$ l'automorphisme de $\mathfrak{g}$ induit par l'automorphisme intérieur $\text{Int}(s) : t \mapsto sts^{-1}$ de G . On pose

$$(97) \quad r(s) = \text{rg}(\text{Ad}(s) - 1) = \dim \text{Im}(\text{Ad}(s) - 1).$$

Si $Z_G(s)$ désigne le centralisateur de s dans G , et $\mathfrak{z}_G(s)$ son algèbre de Lie, on a (cf. [3], p. 234, prop. 8)

$$(98) \quad \mathfrak{z}_G(s) = \text{Ker}(\text{Ad}(s) - 1).$$

On en déduit

$$(99) \quad r(s) = N - \dim \mathfrak{z}_G(s) = \dim G/Z_G(s) = \dim \text{Cl}(s),$$

où $\text{Cl}(s)$ désigne la classe de conjugaison de s dans G ; en effet, d'après [3], p. 108, prop. 14, $\text{Cl}(s)$ est une sous-variété lisse compacte de G , isomorphe à l'espace homogène $G/Z_G(s)$.

Théorème 12. — Soient C une partie fermée de G , stable par conjugaison, et d un nombre réel tel que $0 \leq d < N$ et $\dim_{\mathbb{M}} C \leq d$. Posons

$$(100) \quad r = \inf_{s \in C} r(s) \quad \text{et} \quad \beta = (N - d)/(N - r/2).$$

Alors :

(i) On a

$$(101) \quad \pi_C(x) = O(\text{Li}(x)/\varepsilon(x)^\beta) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

(ii) Sous (GRH), on a

$$(102_R) \quad \pi_C(x) = O(\text{Li}(x)/\varepsilon_R(x)^\beta) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

La démonstration sera donnée aux nos 5.3 et 5.4 ci-après.

Remarque. — Comme r est ≥ 0 , on a $\beta \geq (N - d)/N = \alpha$. Le th. 12 contient donc le th. 10 comme cas particulier; il l'améliore si $\beta > \alpha$, i.e. si $r > 1$, autrement dit si aucune des classes de conjugaison contenues dans C n'est finie. Pour qu'on ait intérêt à appliquer le th. 12, il faut notamment que C ne rencontre pas le centre de G .

Exemple. — Si C est réduit à une seule classe de conjugaison $\text{Cl}(s)$, on peut prendre $d = \dim C = r(s)$ et $\beta = (N - d)/(N - d/2)$.

5.2. Préparatifs

Comme au n° 4.2, on choisit un $\mathbf{Z}_\ell$ -réseau $\mathfrak{g}(\mathfrak{o})$ de $\mathfrak{g}$ et un sous-groupe ouvert distingué $G(\mathfrak{o})$ de G tels que

- a) $\mathfrak{g}(\mathfrak{o})$ est stable par $(x, y) \mapsto \ell^{-2}[x, y]$;
 b) l'application $\log_G$ définit un isomorphisme de $G(\mathfrak{o})$ sur $\mathfrak{g}(\mathfrak{o})$, muni de la loi de Hausdorff

$$(103) \quad xHy = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \dots, \quad \text{cf. [3], [26].}$$

On note $\exp_G$ l'isomorphisme réciproque $\mathfrak{g}(\mathfrak{o}) \rightarrow G(\mathfrak{o})$.

Si n est un entier ≥ 0 , on pose

$$(104) \quad \mathfrak{g}(n) = \ell^n \mathfrak{g}(\mathfrak{o}), \quad G(n) = \exp_G \mathfrak{g}(n), \quad G_n = G/G(n),$$

et l'on note C_n l'image de C dans G_n .

Proposition 12. — Il existe un nombre $c > 0$ tel que, pour tout $n \geq 0$, C_n jouisse de la propriété $R_{k(n)}$ du n° 2.7, avec

$$(105) \quad k(n) = c\ell^{nr/2}.$$

(Rappelons que $r = \inf_{s \in C} r(s) = \inf_{s \in C} \text{rg}(\text{Ad}(s) - 1)$, cf. (100).)

On va démontrer un peu plus, à savoir que C_n jouit de la propriété $(R'_{k(n)})$ du n° 2.7. Pour cela, il suffit de construire pour tout $n \geq 0$ un sous-groupe abélien distingué A_n de G_n ayant la propriété suivante :

(106) Pour tout $s \in C_n$, le groupe des éléments de la forme $a^{-1}sas^{-1}$, où a parcourt A_n , est d'ordre $\geq c\ell^{nr/2}$, avec $c > 0$ ne dépendant ni de s ni de n .

Définition de A_n

Soit $m = [n/2]$ la partie entière de $n/2$. Nous prendrons pour A_n l'image de $G(m+1)$ dans G_n par la projection $G \rightarrow G_n$. On a $A_n = \{1\}$ si $n = 0$ ou 1 . Si $n \geq 2$, A_n est isomorphe à $G(m+1)/G(n)$, lui-même isomorphe à $\mathfrak{g}(m+1)/\mathfrak{g}(n)$ muni de la loi de Hausdorff. Mais la majoration ℓ -adique des coefficients de la série de Hausdorff ([3], p. 67) montre que, si $x, y \in \mathfrak{g}(a)$ pour un entier $a \geq 0$, on a

$$xHy \equiv x + y \pmod{\mathfrak{g}(2a)}.$$

Comme $2(m+1) \geq n$, il en résulte que la loi de Hausdorff sur $A_n = \mathfrak{g}(m+1)/\mathfrak{g}(n)$ est simplement l'addition; on obtient ainsi un isomorphisme canonique

$$(107) \quad A_n \simeq \ell^{m+1}\mathfrak{g}(\mathfrak{o})/\ell^n\mathfrak{g}(\mathfrak{o}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{o})/\ell^{n-m-1}\mathfrak{g}(\mathfrak{o}).$$

En particulier, A_n est abélien. Il est clair qu'il est distingué dans G_n .

Vérification de la propriété (106)

Soit $s \in C_n$; notons également s un représentant de cet élément dans C . Comme

$$\log_G \circ \text{Int}(s) = \text{Ad}(s) \circ \log_G,$$

l'isomorphisme (107) transforme l'automorphisme $\text{Int}(s)$ de A_n en l'automorphisme $\text{Ad}(s)$ de $\mathfrak{g}(o)/\ell^{n-m-1}\mathfrak{g}(o)$. Le groupe $A_{n,s}$ des éléments $a^{-1}sas^{-1}$ ($a \in A_n$) est donc isomorphe au sous-groupe de $\mathfrak{g}(o)/\ell^{n-m-1}\mathfrak{g}(o)$ formé par les $\text{Ad}(s)a - a$, où a parcourt $\mathfrak{g}(o)/\ell^{n-m-1}\mathfrak{g}(o)$. Si l'on note $L(s)$ l'image de l'endomorphisme $\text{Ad}(s) - 1$ de $\mathfrak{g}(o)$, on voit ainsi que $A_{n,s}$ est isomorphe à $L(s)/(L(s) \cap \ell^{n-m-1}\mathfrak{g}(o))$. Il nous faut prouver

$$(108) \quad |A_{n,s}| \geq c\ell^{nr/2}, \quad \text{avec } c > 0.$$

Or on a le lemme suivant :

Lemme 1. — Soit Ω un ensemble compact d'endomorphismes d'un $\mathbf{Z}_\ell$ -module L libre de rang N , et soit $r = \inf_{\omega \in \Omega} \text{rg}(\omega)$. Il existe un nombre $c(\Omega) > 0$ tel que

$$|\text{Im}(\omega)/(\text{Im}(\omega) \cap \ell^q L)| \geq c(\Omega)\ell^{qr},$$

pour tout $\omega \in \Omega$ et tout entier $q \geq 0$.

Soit $\omega \in \Omega$. Comme $\text{rg}(\omega) \geq r$, les r premiers facteurs invariants de ω sont $\neq 0$. On peut les écrire sous la forme

$$\ell^{m_1(\omega)}, \dots, \ell^{m_r(\omega)}, \quad \text{avec } 0 \leq m_1(\omega) \leq \dots \leq m_r(\omega).$$

Il existe une $\mathbf{Z}_\ell$ -base $(e_i(\omega))_{1 \leq i \leq N}$ de L telle que $\text{Im}(\omega)$ soit engendré par les $\ell^{m_i(\omega)}e_i(\omega)$, $1 \leq i \leq r$, et par des multiples (éventuellement nuls) des $e_j(\omega)$, $r < j \leq N$. Dans le quotient

$$\text{Im}(\omega)/(\text{Im}(\omega) \cap \ell^q L),$$

les $e_i(\omega)$, $1 \leq i \leq r$, engendrent un sous-groupe qui est somme directe de groupes cycliques d'ordres $\ell^{\text{Sup}(0, q - m_i(\omega))}$. Il en résulte que

$$|\text{Im}(\omega)/(\text{Im}(\omega) \cap \ell^q L)| \geq \prod_{i=1}^{i=r} \ell^{q - m_i(\omega)} = c(\omega)\ell^{qr},$$

où $c(\omega) = \prod_{i=1}^{i=r} \ell^{-m_i(\omega)}$. Mais les $m_i(\omega)$ sont des fonctions localement constantes de ω ; cela se voit par récurrence sur i , en utilisant le fait que $\ell^{m_1(\omega) + \dots + m_i(\omega)}$ est la plus grande puissance de ℓ qui divise la puissance extérieure i -ième de ω . Comme Ω est compact, il en résulte que les $m_i(\omega)$ sont bornés et la borne inférieure des $c(\omega)$ est > 0 . D'où le lemme.

On applique le lemme 1 au module $L = \mathfrak{g}(o)$, en prenant pour Ω l'ensemble des $\text{Ad}(s) - 1$, pour $s \in C$. On en déduit

$$|A_{n,s}| \geq c(\Omega)\ell^{(n-m-1)r},$$

et comme $n - m \geq n/2$, cela donne bien (108) avec $c = \ell^{-r}c(\Omega)$. Cela achève la démonstration de la prop. 12.

5.3. Démonstration du théorème 12 (i)

On procède comme pour le th. 10 (i), à cela près que l'on utilise le th. 7 à la place du th. 3 :

Soit b un nombre réel > 0 tel que

$$(109) \quad bc_5 n_K (1 - r/2N)^{-2} < 1.$$

Vu (72) et (105), on a

$$(110) \quad |G_n|/k(n) = ac^{-1} \ell^{n(N-r/2)}.$$

Il résulte de (110) que, si x est assez grand, il existe un unique entier positif $n = n(x)$ tel que

$$(111) \quad b\ell^{-(N-r/2)} \varepsilon(x) < |G_n|/k(n) \leq b\varepsilon(x).$$

On en déduit

$$(112) \quad |G_n| = O(\varepsilon(x)^\gamma) \quad \text{et} \quad |G_n|^{-1} = O(\varepsilon(x)^{-\gamma}),$$

avec

$$(113) \quad \gamma = 1/(1 - r/2N).$$

De (112) on tire

$$(114) \quad \log |G_n| \leq (\gamma + o(1)) \log \log x.$$

D'où, d'après (76) :

$$(115) \quad \log d_{E_n} \leq (\gamma n_K + o(1)) |G_n| \log \log x,$$

et en particulier

$$(116) \quad \log d_{E_n} = O(\varepsilon(x)^\gamma \log \log x),$$

d'où

$$(117) \quad \log \log d_{E_n} \leq (\gamma + o(1)) \log \log x$$

et

$$(118) \quad \log \log \log 6d_{E_n} \leq (1 + o(1)) \log \log \log x.$$

En combinant (111), (115), (117) et (118), on obtient

$$\frac{1}{k(n)} (\log d_{E_n}) (\log \log d_{E_n}) (\log \log \log 6d_{E_n}) \leq (b\gamma^2 n_K + o(1)) \log x.$$

Vu (109), ceci entraîne

$$\frac{1}{k(n)} c_5 (\log d_{E_n}) (\log \log d_{E_n}) (\log \log \log 6d_{E_n}) \leq \log x$$

pour x assez grand. En appliquant la prop. 12 et le th. 7 (i), on en déduit

$$(119) \quad \pi_{C_n}(x) \leq c_4 |C_n| |G_n|^{-1} \text{Li}(x).$$

D'après (74) et (112), on a

$$|C_n| |G_n|^{-1} = O(|G_n|^{-\alpha}) = O(\varepsilon(x)^{-\alpha\gamma}) = O(\varepsilon(x)^{-\beta}).$$

L'inégalité (119) entraîne donc

$$(120) \quad \pi_{C_n}(x) = O(\text{Li}(x)/\varepsilon(x)^\beta),$$

ce qui démontre le th. 12 (i), compte tenu de (77).

5.4. Démonstration du théorème 12 (ii)

Si x est assez grand, il existe un unique entier positif $n=n(x)$ tel que

$$(121) \quad \ell^{-(N-\eta/2)} \varepsilon_R(x) < |G_n|/k(n) \leq \varepsilon_R(x).$$

On en déduit, comme au n° 5.3,

$$(122) \quad |C_n| |G_n|^{-1} = O(\varepsilon_R(x)^{-\beta}).$$

D'autre part, la prop. 12 et le th. 7 (ii) entraînent, sous (GRH) :

$$(123_R) \quad \pi_{C_n}(x) \leq |C_n| |G_n|^{-1} \{ \text{Li}(x) + c_{21} k(n)^{-1} x^{1/2} (\log d_{E_n} + [E_n : \mathbf{Q}] \log x) \}.$$

D'après (76), on a

$$\log d_{E_n} = O(|G_n| \log |G_n|) = O(|G_n| \log x).$$

D'où

$$\begin{aligned} k(n)^{-1} x^{1/2} (\log d_{E_n} + [E_n : \mathbf{Q}] \log x) &= O(k(n)^{-1} |G_n| x^{1/2} \log x) \\ &= O(\varepsilon_R(x) x^{1/2} \log x), \quad \text{cf. (121)} \\ &= O(x/\log x) = O(\text{Li}(x)). \end{aligned}$$

L'inégalité (123_R) entraîne donc :

$$(124_R) \quad \pi_{C_n}(x) = O(|C_n| |G_n|^{-1} \text{Li}(x)) = O(\text{Li}(x)/\varepsilon_R(x)^\beta), \quad \text{cf. (122)}.$$

Compte tenu de (77), cela démontre le th. 12 (ii).

§ 6. Non-lacunarité de certains produits eulériens

Comme dans les paragraphes précédents, la lettre K désigne un corps de nombres de degré fini n_K . On note M_K l'ensemble des idéaux $\neq 0$ de l'anneau A_K . La multiplication des idéaux fait de M_K un monoïde multiplicatif; l'élément neutre A_K de ce monoïde sera également noté 1 .

6.1. Annulation de fonctions multiplicatives

Soit R un anneau commutatif intègre, et soit $a : M_K \rightarrow R$ une fonction *multiplicative*, autrement dit une fonction satisfaisant aux deux conditions suivantes :

$$a(1) = 1;$$

$$a(mm') = a(m)a(m') \quad \text{si } m, m' \in M_K \text{ sont premiers entre eux.}$$

(Lorsque $K = \mathbf{Q}$, M_K s'identifie au monoïde $\mathbf{N}^*$ des entiers ≥ 1 , et les conditions ci-dessus expriment bien que la fonction $n \mapsto a(n)$ est « multiplicative » au sens usuel.)

Nous nous intéresserons dans ce qui suit à la nullité, ou non-nullité, de $a(m)$. Si x est un nombre réel ≥ 0 , nous poserons

$$(125) \quad M_a(x) = \text{nombre des } m \in M_K \text{ tels que } a(m) \neq 0 \text{ et } Nm \leq x;$$

$$(126) \quad P_a(x) = \text{nombre des } v \in \Sigma_K \text{ tels que } a(p_v) = 0 \text{ et } Nv \leq x.$$

(Rappelons que Nm désigne la norme de l'idéal m , et que $Nv = Np_v$, où p_v est l'idéal premier de A_K défini par la place v , cf. n° 1.1.)

Le comportement asymptotique de la fonction P_a détermine presque celui de la fonction M_a . De façon plus précise :

Théorème 13. — Supposons que l'on ait

$$(127) \quad P_a(x) = \lambda x / \log x + O(x / (\log x)^{1+\delta}) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty$$

avec $0 \leq \lambda < 1$ et $\delta > 0$. On a alors

$$(128) \quad M_a(x) \sim \gamma_a x / (\log x)^\lambda \quad \text{pour } x \rightarrow \infty$$

où γ_a est une constante > 0 .

La démonstration sera donnée au n° 6.2.

Remarques

1) D'après (127), λ est la *densité* (au sens du n° 2.1) de l'ensemble des v tels que $a(p_v) = 0$. On suppose $\lambda < 1$.

2) La condition (127) peut être remplacée par la condition plus faible suivante :

$$(127') \quad P_a(x) = \lambda x / \log x + \omega(x),$$

avec $|\omega(x)| = o(x / \log x) \quad \text{et} \quad \int_2^\infty |\omega(x)| x^{-2} dx < \infty.$

3) Le th. 13 montre que le comportement de a sur les idéaux premiers p_v suffit à déterminer l'ordre de grandeur de M_a , à la multiplication près par la constante γ_a . Par contre, γ_a dépend des valeurs de a sur les puissances des p_v .

4) Le cas le plus intéressant pour la suite est celui où $\lambda = 0$. La condition (127') ci-dessus revient alors à dire que l'intégrale $\int_2^\infty P_a(x) x^{-2} dx$ est convergente, ou, ce qui revient au même :

$$(127'') \quad \sum_{a(p_v)=0} 1/Nv < \infty.$$

Le th. 13 affirme que

$$(129) \quad M_a(x) \sim \gamma_a x \quad \text{avec} \quad \gamma_a > 0.$$

Si $M_1(x)$ désigne le nombre des $m \in M_K$ tels que $Nm \leq x$, on sait (Dedekind [6], § 184) que $M_1(x) \sim \gamma_1 x$, où γ_1 est le résidu de la fonction zêta du corps K . Vu (129), on a donc

$$(130) \quad M_a(x) / M_1(x) \rightarrow \gamma_a / \gamma_1 \quad \text{pour} \quad x \rightarrow \infty.$$

Convenons de dire qu'une partie A de M_K est de *densité* α si le nombre des $m \in A$ tels que $Nm \leq x$ est égal à $\alpha M_1(x) + o(x)$ pour $x \rightarrow \infty$. On peut alors reformuler (130) de la manière suivante :

Théorème 14. — Si (127'') est satisfaite, l'ensemble des $m \in M_K$ tels que $a(m) \neq 0$ a une *densité* > 0 .

Pour une démonstration directe de ce théorème, voir n° 6.3.

6.2. Démonstration du théorème 13

Si $m \in M_K$, posons :

$$a^0(m) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a(m) = 0 \\ 1 & \text{si} \quad a(m) \neq 0. \end{cases}$$

La fonction $a^0 : M_K \rightarrow \{0, 1\}$ ainsi définie est *multiplicative* du fait que R est intègre. Il est clair que $P_a = P_{a^0}$ et $M_a = M_{a^0}$. Il suffit donc de démontrer le th. 13 lorsque $a = a^0$, autrement dit lorsque la fonction a ne prend que les valeurs 0 et 1.

Supposons que ce soit le cas. Considérons la série de Dirichlet

$$(131) \quad \varphi(s) = \sum_{\mathfrak{m}} a(\mathfrak{m}) N\mathfrak{m}^{-s},$$

qui converge dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 1$. Si l'on écrit cette série sous la forme

$$(132) \quad \varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) n^{-s}, \quad \text{avec} \quad b(n) = \sum_{N\mathfrak{m}=n} a(\mathfrak{m}),$$

on a

$$(133) \quad M_a(x) = \sum_{n \leq x} b(n),$$

autrement dit $M_a(x)$ est la *fonction sommatoire* des coefficients de $\varphi(s)$.

La multiplicativité de la fonction a entraîne celle de la fonction b . On peut donc écrire $\varphi(s)$ comme *produit eulérien*

$$\varphi(s) = \prod_p \varphi_p(s),$$

avec

$$(134) \quad \varphi_p(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b(p^n) p^{-ns} = \prod_{v|p} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a(\mathfrak{p}_v^n) Nv^{-ns} \right).$$

Lemme 2. — On a

$$(135) \quad \sum_{N\mathfrak{v} \leq x} a(\mathfrak{p}_v) = (1 - \lambda)x / \log x + O(x / (\log x)^{1+\delta}),$$

avec $\delta > 0$.

En effet, puisque $a(\mathfrak{p}_v) = 0$ ou 1 , on a

$$(136) \quad P_a(x) = \sum_{N\mathfrak{v} \leq x} (1 - a(\mathfrak{p}_v)) = \pi_K(x) - \sum_{N\mathfrak{v} \leq x} a(\mathfrak{p}_v),$$

où $\pi_K(x)$ est le nombre des places v telles que $Nv \leq x$, cf. n° 2.1. D'après le théorème des nombres premiers « avec reste » (cf. par exemple n° 2.2, th. 2), on a

$$(137) \quad \pi_K(x) = x / \log x + O(x / (\log x)^2).$$

En combinant (136), (137) et (127), on obtient (135).

Lemme 3. — On a

$$(138) \quad \sum_{p \leq x} b(p) = (1 - \lambda)x / \log x + O(x / (\log x)^{1+\delta}),$$

avec $\delta > 0$.

(Précisons que, dans (138), la sommation porte sur les nombres *premiers* $p \leq x$.)

Par définition, on a $b(p) = \sum_{N\mathfrak{v}=p} a(\mathfrak{p}_v)$. On a donc

$$\sum_{N\mathfrak{v} \leq x} a(\mathfrak{p}_v) = \sum_{p \leq x} b(p) + \sum' a(\mathfrak{p}_v),$$

où la somme Σ' porte sur les places v de degré $f_v \geq 2$ (i.e. telles que Nv ne soit pas un nombre premier), avec $Nv \leq x$. Le nombre de telles places est évidemment $O(x^{1/2}/\log x)$. On en conclut que

$$\sum_{Nv \leq x} a(p_v) = \sum_{p \leq x} b(p) + O(x^{1/2}/\log x),$$

et (138) résulte donc de (135).

Lemme 4. — On a

$$(139) \quad \sum_p b(p)p^{-s} = (1-\lambda)\log 1/(s-1) + \varepsilon_1(s),$$

pour s réel > 1 , où $\varepsilon_1(s)$ est continue en $s=1$.

Posons

$$B(x) = \sum_{p \leq x} b(p).$$

On a

$$\sum_p b(p)p^{-s} = \int_2^\infty x^{-s} dB(x) = - \int_2^\infty B(x) d(x^{-s}) = s \int_2^\infty B(x)x^{-1-s} dx.$$

D'après le lemme précédent, on a

$$B(x) = (1-\lambda)x/\log x + \rho(x),$$

avec $\rho(x) = O(x/(\log x)^{1+\delta})$, $\delta > 0$. D'où :

$$\sum_p b(p)p^{-s} = (1-\lambda)s \int_2^\infty x^{-s}(\log x)^{-1} dx + s \int_2^\infty \rho(x)x^{-1-s} dx.$$

Le terme $s \int_2^\infty \rho(x)x^{-1-s} dx$ est continu en $s=1$. Pour prouver le lemme 4, il suffit donc de vérifier que l'intégrale

$$I(s) = \int_2^\infty x^{-s}(\log x)^{-1} dx$$

est de la forme $\log 1/(s-1) + \varepsilon_2(s)$, où $\varepsilon_2(s)$ est continue en $s=1$; cela ne présente pas de difficultés [on peut par exemple faire le changement de variable $x = e^{u/(s-1)}$; on en déduit que $I(s) = E_1((s-1) \log 2)$, avec $E_1(z) = \int_z^\infty u^{-1} e^{-u} du$; on utilise ensuite le fait connu que $E_1(z) = -\gamma - \log z + O(z)$ pour $z \rightarrow 0$, où γ désigne la constante d'Euler].

Lemme 5. — Il existe une constante $u > 0$ telle que

$$(140) \quad \varphi(s) \sim u/(s-1)^{1-\lambda} \quad \text{pour } s \rightarrow 1 \quad (s \text{ réel } > 1).$$

D'après (134), on a

$$\log \varphi(s) = \sum_p \log \varphi_p(s) = \sum_p b(p)p^{-s} + \varepsilon_3(s),$$

où $\varepsilon_3(s)$ est continue pour $s=1$ (et même prolongeable analytiquement dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 1/2$). Vu (139), cela donne

$$\log \varphi(s) = (1-\lambda) \log 1/(s-1) + \varepsilon_4(s),$$

où $\varepsilon_4(s)$ est continue en $s=1$. D'où (140), avec $u = \exp \varepsilon_4(1)$.

Lemme 6. — On a

$$(141) \quad \sum_{n \leq x} b(n)/n \sim u(\log x)^{1-\lambda}/\Gamma(2-\lambda) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

Cela résulte du lemme 5, et d'un théorème taubérien de Hardy-Littlewood ([13], th. 16 et [14], th. D).

Lemme 7. — On a

$$(142) \quad M_a(x) \sim (1-\lambda) \frac{x}{\log x} \sum_{n \leq x} b(n)/n \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

Cela résulte du lemme 3 et de la multiplicativité de la fonction b , d'après Wirsing [50], Hilfssatz 2, p. 93.

En combinant les lemmes 6 et 7, on obtient

$$M_a(x) \sim \gamma_a x / (\log x)^\lambda,$$

avec

$$(143) \quad \gamma_a = (1-\lambda)u/\Gamma(2-\lambda) = u/\Gamma(1-\lambda),$$

ce qui achève la démonstration du th. 13.

Remarques

1) Lorsqu'on remplace l'hypothèse (127) par l'hypothèse plus faible (127'), les énoncés des lemmes 2 et 3 doivent être modifiés de façon évidente. Le reste de la démonstration s'applique sans changement.

2) A la place du théorème taubérien de Hardy-Littlewood, on aurait pu utiliser un théorème de Wirsing sur les fonctions multiplicatives ([50], Satz 1).

6.3. Démonstration directe du théorème 14

Dans le cas où $\lambda=0$ (th. 14), on peut éviter de recourir à un théorème taubérien. Voici comment on procède :

On part de l'hypothèse :

$$(127'') \quad \sum_{a(p_v)=0} 1/Nv < \infty.$$

Comme au n° 6.2, on suppose que a ne prend que les valeurs 0 et 1. Soit $c : M_K \rightarrow \mathbf{Z}$ la fonction multiplicative caractérisée par la propriété

$$(144) \quad a(m) = \sum_{m' | m} c(m') \quad \text{pour tout } m \in M_K.$$

D'après la formule d'inversion de Möbius, on a

$$(145) \quad c(p_v^n) = a(p_v^n) - a(p_v^{n-1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } a(p_v^n) = 1 \text{ et } a(p_v^{n-1}) = 0 \\ 0 & \text{si } a(p_v^n) = a(p_v^{n-1}) \\ -1 & \text{si } a(p_v^n) = 0 \text{ et } a(p_v^{n-1}) = 1 \end{cases}$$

pour tout $v \in \Sigma_K$ et tout $n \geq 1$.

Posons

$$(146) \quad \alpha_v = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c(p_v^n) / Nv^n = (1 - 1/Nv) (1 + \sum_{n=1}^{\infty} a(p_v^n) / Nv^n).$$

On a

$$\alpha_v = \begin{cases} 1 + O(1/Nv^2) & \text{si } a(p_v) = 1 \\ 1 - 1/Nv + O(1/Nv^2) & \text{si } a(p_v) = 0. \end{cases}$$

Vu (127''), cela entraîne que le produit infini

$$(147) \quad \alpha = \prod_v \alpha_v$$

est absolument convergent, et égal à $\sum_m c(m) / Nm$. Comme les α_v sont > 0 , il en est de même de α .

D'autre part, la formule (144) entraîne

$$(148) \quad M_a(x) = \sum_m c(m) M_1(x/Nm),$$

où $M_1(x)$ désigne le nombre des $m \in M_K$ tels que $Nm \leq x$, cf. n° 6.1, Remarque 4. Or on a

$$(149) \quad M_1(x) = \gamma_1 x + \psi(x) \quad \text{avec} \quad \psi(x) = o(x),$$

où γ_1 est le résidu de la fonction zêta de K . On en déduit

$$(150) \quad \begin{aligned} M_a(x) &= \sum_m (\gamma_1 c(m)x / Nm + c(m)\psi(x/Nm)) \\ &= \gamma_1 \alpha x + \sum_m c(m)\psi(x/Nm). \end{aligned}$$

Utilisant la convergence absolue de la série $\sum c(m) / Nm$, et le fait que $\psi(x) = o(x)$, on montre facilement que

$$\sum_m c(m)\psi(x/Nm) = o(x) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

Vu (150), on a donc

$$(151) \quad M_a(x) \sim \gamma_1 \alpha x \quad \text{pour } x \rightarrow \infty,$$

ce qui démontre le th. 14, et prouve en même temps que la densité de l'ensemble des $m \in M_K$ tels que $a(m) \neq 0$ est égale à α .

6.4. Relations avec le § 4

Revenons aux notations du n° 4.1, i.e. considérons une extension galoisienne E/K , dont le groupe de Galois G est un groupe de Lie ℓ -adique, et qui est non ramifiée en dehors d'une partie finie S de Σ_K ; soit C une partie fermée de G stable par conjugaison, et soit Σ_C l'ensemble des $v \in \Sigma_K - S$ tels que la substitution de Frobenius σ_v de v appartienne à C .

Nous dirons que C est *liée* à la fonction multiplicative a si :

$$(152) \quad a(p_v) = 0 \Leftrightarrow v \in \Sigma_C \quad (\text{pour } v \in \Sigma_K - S).$$

Proposition 13. — *Supposons que C soit un sous-ensemble analytique fermé du groupe de Lie G , et que $C \neq G$. Soit μ la mesure de Haar de G normalisée de telle sorte que sa masse totale soit 1. Alors, si C et a sont liés au sens ci-dessus, la condition*

$$(127) \quad P_a(x) = \lambda x / \log x + o(x / (\log x)^{1+\delta})$$

du th. 13 est satisfaite, avec $\lambda = \mu(C)$ et $\delta > 0$.

Si $\pi_C(x)$ désigne le nombre des places $v \in \Sigma_C$ telles que $Nv \leq x$, la relation (152) entraîne

$$\pi_C(x) \leq P_a(x) \leq \pi_C(x) + |S|,$$

d'où

$$(153) \quad P_a(x) = \pi_C(x) + O(1).$$

Tout revient donc à démontrer que

$$(154) \quad \pi_C(x) = \lambda x / \log x + O(x / (\log x)^{1+\delta}) \quad \text{avec } \delta > 0.$$

Soit C_1 l'intérieur de C , et soit $C_2 = C - C_1$. Du fait que C est analytique, C_1 est fermé. Il en résulte que C_1 et C_2 sont des parties fermées disjointes, et l'on a

$$(155) \quad \pi_C(x) = \pi_{C_1}(x) + \pi_{C_2}(x).$$

Comme l'intérieur de C_2 est vide, on a $\dim C_2 < \dim G$, et le cor. 1 au th. 10 du n° 4.1 montre que

$$(156) \quad \pi_{C_2}(x) = O(x / (\log x)^{1+\delta})$$

avec $\delta > 0$, par exemple $\delta = 1/(N+1)$, où $N = \dim G$. D'autre part, tout ensemble analytique d'intérieur vide est de mesure nulle; c'est là un résultat élémentaire (cf. [2], § 10.1.2 ainsi que [40], p. 1.8, exerc.) que l'on peut déduire, par exemple, du « Vor-

bereitungssatz » (bien entendu, c'est aussi une conséquence du th. 8 du n° 3.2). On a donc $\mu(C_2) = 0$, d'où

$$(157) \quad \mu(C) = \mu(C_1).$$

Comme C_1 est ouvert et fermé dans G , il existe un sous-groupe ouvert distingué U de G tel que C_1 soit réunion de classes modulo U , i.e. soit image réciproque d'un sous-ensemble C_U du groupe quotient G/U . On a

$$(158) \quad \mu(C_1) = |C_U|/(G : U).$$

Soit E_U le sous-corps de E fixé par U . L'extension E_U/K est galoisienne, et son groupe de Galois est le groupe fini G/U . En appliquant le théorème de Chebotarev (sous la forme du th. 2 du n° 2.2, par exemple) à E_U/K et à C_U , on obtient :

$$(159) \quad \pi_{C_1}(x) = \pi_{C_U}(x) = \lambda x / \log x + O(x/(\log x)^2),$$

avec $\lambda = |C_U|/(G : U) = \mu(C_1) = \mu(C)$. En combinant (156) et (159) on obtient (154), ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1. — Il existe un nombre $\gamma_a > 0$ tel que

$$(128) \quad M_a(x) \sim \gamma_a x / (\log x)^\lambda \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

Cela résulte du th. 13, et du fait que $\lambda = \mu(C)$ est < 1 puisque $C \neq G$.

Corollaire 2. — Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) l'intérieur de C est vide;
- (ii) l'ensemble des $m \in M_K$ tels que $a(m) \neq 0$ a une densité > 0 .

En effet, (i) équivaut à $C_1 = \emptyset$, i.e. $C_U = \emptyset$, i.e. $\lambda = 0$.

6.5. Exemple : série L attachée à une représentation ℓ -adique

Soit E/K comme ci-dessus. Donnons-nous un plongement du groupe $G = \text{Gal}(E/K)$ dans un groupe linéaire $\mathbf{GL}_r(F)$, où F est une extension finie de $\mathbf{Q}_\ell$, et r un entier ≥ 1 . Si $\bar{K}$ est une clôture algébrique de K , l'homomorphisme

$$\text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \text{Gal}(E/K) = G \rightarrow \mathbf{GL}_r(F)$$

sera noté ρ . Lorsque $F = \mathbf{Q}_\ell$, ρ est une « représentation ℓ -adique de K », au sens de [40], chap. I.

Les polynômes $P_v(T)$

Si $v \in \Sigma_K - S$, on définit P_v par la formule

$$(160) \quad P_v(T) = \det(1 - T\sigma_v);$$

cela a un sens, puisque σ_v est un élément de $G \subset \mathbf{GL}_r(F)$, défini à conjugaison près. Le polynôme P_v est de degré r ; ses coefficients appartiennent à F .

Si $v \in S$, on choisit un polynôme P_v , de degré $\leq r$, à coefficients dans F , tel que $P_v(0) = 1$.

La série L attachée à ρ

C'est une série *formelle* de Dirichlet relativement à K , au sens de Weil [48]. Elle est définie par le produit eulérien

$$(161) \quad L(s) = \sum_{\mathfrak{m}} a(\mathfrak{m}) N\mathfrak{m}^{-s} = \prod_v L_v(s),$$

où

$$(162) \quad L_v(s) = 1/P_v(Nv^{-s}).$$

Les coefficients $a(\mathfrak{m})$ de L sont caractérisés par :

$$(163) \quad \mathfrak{m} \mapsto a(\mathfrak{m}) \text{ est une fonction multiplicative à valeurs dans } F;$$

$$(164) \quad 1/P_v(T) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a(\mathfrak{p}_v^n) T^n \quad \text{pour tout } v \in \Sigma_K.$$

Vu (160), ceci entraîne :

$$(165) \quad a(\mathfrak{p}_v) = \text{Tr } \sigma_v \quad \text{pour tout } v \in \Sigma_K - S.$$

L'ensemble C

On définit C comme l'ensemble des $s \in G$ tels que $\text{Tr}(s) = 0$, la trace étant relative au plongement donné de G dans $\mathbf{GL}_r(F)$. Il est clair que C est un sous-espace analytique fermé de G , stable par conjugaison, et distinct de G (puisque l'élément neutre n'appartient pas à C). La formule (165) montre que C est *lié* à la fonction multiplicative a , au sens du n° 6.4. Les conditions de la prop. 13 sont donc satisfaites; vu le cor. 1 à cette proposition, on a :

Proposition 14. — Soit $\lambda = \mu(C)$ la mesure de C . Il existe un nombre $\gamma_a > 0$ tel que

$$(128) \quad M_a(x) \sim \gamma_a x / (\log x)^\lambda \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

On verra ci-après que $\lambda \leq 1 - 1/r^2$.

Corollaire. — Si $\lambda = 0$, i.e. si l'intérieur de C est vide, la densité de l'ensemble des $\mathfrak{m}$ tels que $a(\mathfrak{m}) \neq 0$ est > 0 .

(En d'autres termes, la série formelle $\sum a(\mathfrak{m}) N\mathfrak{m}^{-s}$ a « beaucoup » de termes $\neq 0$: ce n'est pas une série « lacunaire ».)

Calcul de $\lambda = \mu(C)$

On va voir que C ne dépend que de l'enveloppe algébrique du groupe G . Rappelons d'abord ce qu'est cette enveloppe : c'est le plus petit sous-groupe algébrique H de $\mathbf{GL}_r$, dont le groupe des points $H(F)$ contienne G (c'est aussi, si l'on préfère, l'adhérence de G dans $\mathbf{GL}_r$ pour la topologie de Zariski). Soit H_1 la composante neutre de H , et soit Φ

le groupe fini H/H_1 ; si $\varphi \in \Phi$, notons H_φ son image réciproque dans H , et notons G_φ l'intersection de G et H_φ ; on vérifie facilement que G_φ est dense dans H_φ pour la topologie de Zariski.

Proposition 15. — Soit Ψ l'ensemble des $\psi \in \Phi = H/H_1$ tels que l'on ait $\text{Tr}(s) = 0$ pour tout $s \in H_\psi$. On a alors

$$C_1 = \bigcup_{\psi \in \Psi} G_\psi.$$

(Rappelons que C_1 désigne l'intérieur de C , cf. n° 6.4.)

Corollaire 1. — On a $\lambda = |\Psi|/|\Phi|$.

En effet, la prop. 15 montre que

$$\lambda = \mu(C_1) = \sum_{\psi \in \Psi} \mu(G_\psi) = |\Psi| \mu(G_1) = |\Psi| \cdot (G : G_1)^{-1} = |\Psi|/|\Phi|.$$

Corollaire 2. — Si l'enveloppe algébrique H de G est connexe, on a $\lambda = 0$, et la série L attachée à ρ n'est pas lacunaire (au sens du cor. à la prop. 14).

En effet, si H est connexe, on a $H = H_1$, $|\Phi| = 1$ et $|\Psi| = 0$.

Démonstration de la prop. 15

Si $\psi \in \Psi$, G_ψ est contenu dans C ; comme G_ψ est ouvert dans G , il en résulte que G_ψ est contenu dans C_1 . Reste à montrer que, si $\varphi \in \Phi - \Psi$, l'ensemble $C_\varphi = C \cap G_\varphi$ a un intérieur vide. Supposons que ce ne soit pas le cas, et soit g un point intérieur à C_φ . Il existe un sous-groupe ouvert distingué U de G_1 tel que C_φ contienne gU . Soit H_U l'adhérence de U pour la topologie de Zariski. On a $H_U \subset H_1$, et, comme U est d'indice fini dans G_1 , H_U est d'indice fini dans H ; vu le fait que H_1 est connexe, ceci entraîne $H_U = H_1$. L'adhérence de gU pour la topologie de Zariski est donc $gH_1 = H_\varphi$. Comme la trace s'annule sur gU , et que c'est une fonction polynomiale, elle s'annule sur tout H_φ , ce qui contredit l'hypothèse $\varphi \in \Phi - \Psi$.

Proposition 16. — On a $\lambda \leq 1 - 1/r^2$.

Vu le cor. 1 à la prop. 15, on est ramené à prouver :

Lemme 8. — Si H est un sous-groupe algébrique de $\mathbf{GL}_r$ (sur un corps de caractéristique zéro), de composante neutre H_1 , et si l'on définit $\Phi = H/H_1$, Ψ et $\lambda = |\Psi|/|\Phi|$ comme ci-dessus, on a

$$(166) \quad \lambda \leq 1 - 1/r^2.$$

Le principe de Lefschetz permet de supposer que le corps de base est $\mathbf{C}$. On peut également supposer (quitte à remplacer la représentation $H \rightarrow \mathbf{GL}_r$ par sa semi-simplifiée) que H est un groupe réductif. Soit alors U un sous-groupe compact maximal du groupe complexe $H(\mathbf{C})$; si $\varphi \in \Phi$, posons $U_\varphi = U \cap H_\varphi$. On sait que $U_1 = U \cap H_1$ est connexe,

et que U_Φ est une classe modulo U_1 ; le groupe U/U_1 s'identifie à $\Phi = H/H_1$. Notons $C(U)$ l'ensemble des éléments de U de trace 0, et posons $C(U)_\Phi = U_\Phi \cap C(U)$ pour tout $\Phi \in \Phi$. On a $C(U)_\psi = U_\psi$ si $\psi \in \Psi$; par contre, si $\Phi \in \Phi - \Psi$, un argument analogue à celui utilisé dans la démonstration de la prop. 15 montre que $C(U)_\Phi$ est un sous-ensemble analytique (réel) fermé de U_Φ , d'intérieur vide, et que sa mesure est nulle. Si μ est la mesure de Haar de U , normalisée de telle sorte que sa masse totale soit 1, on a

$$(167) \quad \mu(C(U)) = \sum_{\psi \in \Psi} \mu(U_\psi) = |\Psi| \mu(U_1) = |\Psi|/|\Phi| = \lambda.$$

D'après la théorie des caractères des groupes compacts, l'intégrale

$$\int_U |\text{Tr}(s)|^2 \mu(s)$$

est égale à la dimension du commutant de U (ou de H , cela revient au même) dans l'algèbre $\mathbf{M}_r(\mathbf{C})$ des matrices. En particulier, on a

$$(168) \quad \int_U |\text{Tr}(s)|^2 \mu(s) \geq 1.$$

Mais $\text{Tr}(s)$ est 0 sur $C(U)$, et est majoré en valeur absolue par r sur $U - C(U)$. On a donc, d'après (167)

$$(169) \quad \int_U |\text{Tr}(s)|^2 \mu(s) \leq \mu(U - C(U)) r^2 \leq (1 - \lambda) r^2.$$

En combinant (168) et (169), on obtient (166).

Remarque

Pour que λ soit égal à $1 - 1/r^2$ (ce qui conduit à une série L « aussi lacunaire que possible »), il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- (i) la représentation $H \rightarrow \mathbf{GL}_r$ est absolument irréductible;
- (ii) l'image PH de H dans le groupe projectif $\mathbf{PGL}_r$ est un groupe fini d'ordre r^2 .

(Cela se voit en reprenant la démonstration ci-dessus, et en déterminant dans quel cas on a égalité dans (168) et (169).)

Des exemples de tels groupes existent pour toute valeur de r . On peut notamment prendre pour PH le produit d'un groupe abélien d'ordre r par lui-même; il y a également des exemples non abéliens, cf. Iwahori-Matsumoto [19], fin du § 5.

Lorsque $r = 2$, la valeur maximum de λ est $3/4$, et cette valeur est atteinte si et seulement si le groupe PH est un groupe non cyclique d'ordre 4; on en verra un exemple au n° 7.8.

Problème

Y a-t-il des résultats analogues à ceux de cette section pour les séries L attachées par Langlands aux représentations cuspidales des groupes réductifs — même lorsque ces séries L ne correspondent pas à des représentations ℓ -adiques? Cela me paraît probable; la question est liée aux conjectures de Langlands [25], p. 210 (conjectures qui visent à introduire des groupes « H » et « U » analogues à ceux du lemme 8 ci-dessus).

§ 7. Applications aux formes modulaires

7.1. Notations

Soient :

N et k des entiers ≥ 1 (le « niveau » et le « poids »);

$\Gamma_0(N)$ le sous-groupe de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $c \equiv 0 \pmod{N}$;

$\omega : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ un caractère mod N tel que $\omega(-1) = (-1)^k$.

Nous noterons $M(N, k, \omega)$ (resp. $S(N, k, \omega)$) l'espace des *formes modulaires* (resp. *formes modulaires paraboliques*) de type (k, ω) sur $\Gamma_0(N)$, cf. par exemple [9], [27], [44]; c'est un espace vectoriel complexe de dimension finie. Rappelons que, si $f \in M(N, k, \omega)$, on a

$$(170) \quad f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \omega(d)(cz+d)^k f(z) \quad \text{pour tout } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N).$$

De plus, f admet un développement en série

$$(171) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) q^n, \quad \text{où } q = e^{2\pi iz},$$

qui converge pour tout z tel que $\text{Im}(z) > 0$; les $a_n(f)$ sont appelés les *coefficients* de f ; on a $a_0(f) = 0$ si f est parabolique.

Opérateurs de Hecke

Si p est un nombre premier, et si $f \in M(N, k, \omega)$, on pose :

$$(172) \quad f|U_p = \sum a_{pn}(f) q^n \quad \text{si } p|N,$$

$$(173) \quad f|T_p = \sum a_{pn}(f) q^n + \omega(p) p^{k-1} \sum a_n(f) q^{pn} \quad \text{si } p \nmid N.$$

On a $f|U_p \in M(N, k, \omega)$ et $f|T_p \in M(N, k, \omega)$, cf. [27]. Les opérateurs U_p et T_p ainsi définis commutent entre eux, et laissent stable le sous-espace $S(N, k, \omega)$ des formes paraboliques. Leurs valeurs propres sont des entiers algébriques (cf. [9], prop. 2.7 ainsi que Shimura [44], § 3.5).

7.2. Valeurs propres des opérateurs de Hecke : énoncé du théorème

Soit f une forme modulaire non identiquement nulle, appartenant à $M(N, k, \omega)$. Supposons que f soit *fonction propre* des T_p , $p \nmid N$, avec pour valeurs propres a_p :

$$(174) \quad f|T_p = a_p f \quad (p \nmid N).$$

Supposons en outre que :

- (a) le poids k de f est ≥ 2 ;
- (b) f est parabolique;
- (c) f n'est pas de type CM au sens de Ribet (i.e. il n'existe pas de corps quadratique imaginaire L tel que $a_p = 0$ pour tout p qui est inerte dans L , cf. [33], § 3).

Soit d'autre part $h(T)$ un polynôme à coefficients complexes, et soit $\Sigma_{f,h}$ l'ensemble des $p \nmid N$ tels que

$$(175) \quad a_p = h(p).$$

Si x est un nombre réel ≥ 2 , posons

$$(176) \quad P_{f,h}(x) = \text{nombre des } p \leq x \text{ appartenant à } \Sigma_{f,h}.$$

(Par exemple, pour $h=0$, $P_{f,0}(x)$ est le nombre des $p \leq x$ tels que $p \nmid N$ et $a_p = 0$.)

Nous allons voir que la fonction $P_{f,h}(x)$ est « petite » lorsque $x \rightarrow \infty$, autrement dit que la relation (175) est « peu souvent » vérifiée. De façon plus précise :

Théorème 15. — Sous les hypothèses (a), (b) et (c) ci-dessus, on a

$$(177) \quad P_{f,h}(x) = O(\text{Li}(x)/\varepsilon(x)^{1/4}) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty,$$

et, sous (GRH),

$$(178_R) \quad P_{f,h}(x) = O(\text{Li}(x)/\varepsilon_R(x)^{1/4}) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty,$$

où $\varepsilon(x)$ et $\varepsilon_R(x)$ sont les fonctions définies par les formules (65) et (67) du n° 4.1.

De plus, lorsque $h=0$, l'exposant $1/4$ de (177) et (178_R) peut être remplacé par $1/2$.

La démonstration sera donnée au n° 7.3.

Compte tenu des formules :

$$(65) \quad \varepsilon(x) = (\log x)(\log \log x)^{-2}(\log \log \log x)^{-1}$$

et

$$(67) \quad \varepsilon_R(x) = x^{1/2}(\log x)^{-2},$$

le th. 15 entraîne :

Corollaire 1. — On a

$$(179) \quad P_{f,h}(x) = O(x/(\log x)^{5/4-\delta}) \quad \text{pour tout } \delta > 0,$$

et, sous (GRH),

$$(180_R) \quad P_{f,h}(x) = O(x^{7/8}(\log x)^{1/2}).$$

De même, pour $h=0$:

Corollaire 2. — On a

$$(181) \quad P_{f,0}(x) = O(x/(\log x)^{3/2-\delta}) \quad \text{pour tout } \delta > 0,$$

et, sous (GRH),

$$(182_R) \quad P_{f,0}(x) = O(x^{3/4}).$$

Remarques

1) Si $\deg(h) \geq k/2$, l'ensemble $\Sigma_{f,h}$ des p tels que $a_p = h(p)$ est fini, autrement dit, on a $P_{f,h}(x) = O(1)$. Cela résulte de la majoration

$$(183) \quad |a_p| \leq 2p^{k/2-\delta},$$

avec $\delta > 0$ ($\delta = 1/8$ d'après Kloosterman [20], $\delta = 1/5$ d'après Rankin [32], et finalement $\delta = 1/2$ d'après Deligne [8], th. 8.2). Le th. 15 n'a donc d'intérêt que si $\deg(h) \leq (k-1)/2$.

2) La majoration (178_R), même avec l'exposant $1/4$ remplacé par 1, n'est probablement pas la meilleure possible. Des arguments heuristiques basés sur l'ordre de grandeur de $a_p - h(p)$ suggèrent les conjectures suivantes (cf. [42], § 4.11, ainsi que Lang-Trotter [24]) :

$$(184_?) \quad P_{f,h}(x) = O(x^{1/2}/\log x) \quad \text{si } k=2,$$

$$(185_?) \quad P_{f,h}(x) = O(\log \log x) \quad \text{si } k=3,$$

$$(186_?) \quad P_{f,h}(x) = O(1) \quad \text{si } k \geq 4.$$

3) Les hypothèses (a), (b), (c) sont nécessaires pour la validité de (177), ou même simplement de $P_{f,h}(x) = o(x/\log x)$. De façon plus précise, si l'une de ces hypothèses n'est pas satisfaite, on peut choisir le polynôme $h(T)$ de telle sorte que

$$P_{f,h}(x) \sim Cx/\log x \quad \text{avec } C > 0$$

(autrement dit $\Sigma_{f,h}$ a une densité > 0). On prend en effet :

$$h(T) = \begin{cases} 0 \text{ ou } 2 & \text{si } k=1, \\ 1 + T^{k-1} & \text{si } f \text{ n'est pas parabolique,} \\ 0 & \text{si } f \text{ est de type CM.} \end{cases}$$

7.3. Démonstration du th. 15

i) Représentations ℓ -adiques attachées à f (cf. [7], [9], [33])

Soit F un corps de nombres contenant les a_p et les $\omega(p)$ pour $p \nmid N$: il en existe, cf. par exemple [9], § 2. Soit λ une place ultramétrique de F de degré 1, i.e. telle que le complété F_λ de F en λ s'identifie à un corps ℓ -adique $\mathbf{Q}_\ell$; le choix d'une telle place revient à plonger F dans $\mathbf{Q}_\ell$, ce qui permet d'identifier les a_p et les $\omega(p)$ à des éléments de $\mathbf{Q}_\ell$. D'après Deligne ([7], voir aussi [9], th. 6.1) il existe une représentation linéaire continue

$$\rho_\ell : \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{GL}_2(F_\lambda) = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$$

qui jouit des propriétés suivantes :

- (i) ρ_ℓ est semi-simple;
- (ii) ρ_ℓ est non ramifiée en dehors des facteurs premiers de $N\ell$ (nous dirons aussi « non ramifiée en dehors de $N\ell$ »);
- (iii) si $p \nmid N\ell$, la substitution de Frobenius $\rho_\ell(\sigma_p)$ (qui est définie, à conjugaison près, grâce à (ii)), est telle que :

$$(187) \quad \text{Tr } \rho_\ell(\sigma_p) = a_p$$

et

$$(188) \quad \det \rho_\ell(\sigma_p) = \omega(p)p^{k-1}.$$

De plus, ces propriétés caractérisent ρ_ℓ , à équivalence près.

Proposition 17. — Le groupe $G_\ell = \text{Im}(\rho_\ell)$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$.

Soit $\mathfrak{g}_\ell$ l'algèbre de Lie du groupe ℓ -adique G_ℓ . C'est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_2 = \mathbf{M}_2(\mathbf{Q}_\ell)$. D'après Ribet [33], prop. 4.4, $\mathfrak{g}_\ell$ est irréductible, et non abélienne; elle contient donc la sous-algèbre $\mathfrak{sl}_2$ de $\mathfrak{gl}_2$ formée des éléments de trace 0. On a $\mathfrak{g}_\ell \neq \mathfrak{sl}_2$, car sinon l'image de G_ℓ par l'homomorphisme $\det : \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell) \rightarrow \mathbf{Q}_\ell^*$ serait un groupe fini, ce qui est incompatible avec (188). On a donc $\mathfrak{g}_\ell = \mathfrak{gl}_2$, d'où la prop. 17.

ii) *Démonstration du th. 15 : cas général*

Choisissons F , λ et ℓ comme ci-dessus. Soit E_ℓ la sous-extension de $\bar{\mathbf{Q}}$ fixée par $\text{Ker}(\rho_\ell)$. L'extension $E_\ell/\mathbf{Q}$ est galoisienne, et son groupe de Galois s'identifie au groupe $G_\ell = \text{Im}(\rho_\ell)$. Vu la prop. 17, G_ℓ est un groupe de Lie ℓ -adique de dimension 4. On va lui appliquer le th. 10 du § 4.

Remarquons d'abord que l'on peut supposer que les coefficients du polynôme $h(T)$ appartiennent à F (sinon, l'ensemble $\Sigma_{\ell, h}$ serait fini). Soit e l'ordre du caractère ω ; posons $m = (k-1)e$. Si U et T sont deux indéterminées, il existe un polynôme $H(U, T)$, à coefficients dans F , tel que

$$(189) \quad H(U, T^m) = \prod_{w \in \mu_m} (U - h(wT)),$$

où w parcourt le groupe μ_m des racines m -ièmes de l'unité; cela se voit en remarquant que le membre de droite de (189) est invariant par $T \mapsto wT$ (pour $w \in \mu_m$). Soit C le sous-espace de G_ℓ formé des matrices s telles que

$$(190) \quad H(\text{Tr}(s), \det(s)^e) = 0.$$

Il est clair que C est un sous-espace analytique fermé de G_ℓ , stable par conjugaison, et sans point intérieur, donc de dimension ≤ 3 . De plus, si $p \in \Sigma_{\ell, h}$ et $p \neq \ell$, la substitution de Frobenius $s_p = \rho_\ell(\sigma_p)$ appartient à C . On a en effet

$$\text{Tr}(s_p) = a_p = h(p) \quad \text{et} \quad \det(s_p)^e = p^{(k-1)e} = p^m,$$

$$\text{d'où} \quad H(\text{Tr}(s_p), \det(s_p)^e) = H(h(p), p^m) = \prod_w (h(p) - h(wp)) = 0.$$

On a donc

$$\Sigma_{f,h} \subset \Sigma_C \cup \{\ell\},$$

où Σ_C est défini comme au § 4 (relativement à l'ensemble S formé des diviseurs premiers de $N\ell$). D'où, avec les notations du n° 4.1 :

$$(191) \quad P_{f,h}(x) \leq \pi_C(x) + 1,$$

et en appliquant le th. 10 avec $\alpha = (4-3)/4 = 1/4$, on obtient le résultat cherché.

iii) *Démonstration du th. 15 : le cas $h=0$*

On procède de manière analogue, en définissant C comme l'ensemble des $s \in G_\ell$ tels que $\text{Tr}(s) = 0$. Si H_ℓ désigne l'intersection de G_ℓ avec le groupe des homothéties, C est stable par multiplication par H_ℓ , donc est image réciproque d'une partie C' du groupe quotient $G'_\ell = G_\ell/H_\ell$. Le groupe G'_ℓ est un groupe de Lie ℓ -adique de dimension 3; c'est un sous-groupe ouvert du groupe $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$. La partie C' est une sous-variété fermée de dimension ≤ 2 (c'est l'ensemble des éléments d'ordre 2 de G'_ℓ). De plus, tous les éléments de C' sont *réguliers* dans G'_ℓ : avec les notations du n° 5.1, on a $r(s) = 2$ pour tout $s \in C'$. On peut donc appliquer le th. 12 du § 5 au couple (G'_ℓ, C') , avec $r = 2$ et $\beta = (3-2)/(3-2/2) = 1/2$. D'où le résultat cherché, compte tenu de l'inégalité

$$(192) \quad P_{f,0}(x) \leq \pi_{C'}(x) + 1.$$

7.4. Non-lacunarité des formes modulaires — cas des fonctions propres des opérateurs de Hecke

Si $f = \sum a_n(f)q^n$ est une forme modulaire, et x un nombre réel ≥ 1 , nous poserons :

$$(193) \quad M_f(x) = \text{nombre des entiers } n \text{ tels que } 1 \leq n \leq x \text{ et } a_n(f) \neq 0.$$

Théorème 16. — Soit f un élément non nul de $M(N, k, \omega)$. Supposons que f soit fonction propre des opérateurs U_p et T_p , que f ne soit pas de type CM au sens de [31], et que le poids k de f soit ≥ 2 . Il existe alors un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$(194) \quad M_f(x) \sim \alpha x \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

En d'autres termes, l'ensemble des entiers n tels que $a_n(f) \neq 0$ a une densité α qui est > 0 .

Démonstration

L'hypothèse faite sur f entraîne $a_1(f) \neq 0$, cf. par exemple [27]. Quitte à multiplier f par une constante, on peut donc supposer que $a_1(f) = 1$. On sait alors (*loc. cit.*) que, si l'on pose $a_p = a_p(f)$, on a

$$f|U_p = a_p f \quad \text{pour } p|N \quad \text{et} \quad f|T_p = a_p f \quad \text{pour } p \nmid N.$$

De plus, la fonction $n \mapsto a_n(f)$ est *multiplicative*. Distinguons deux cas :

a) f est *parabolique*

D'après le cor. 2 au th. 15, le nombre des $p \leq x$ tels que $a_p = 0$ est $O(x/(\log x)^{1+\delta})$, avec $\delta > 0$, par exemple $\delta = 1/3$. Le th. 13 du n° 6.1 s'applique donc à $n \mapsto a_n(f)$, avec $K = \mathbf{Q}$ et $\lambda = 0$; on obtient ainsi (194).

b) f n'est pas *parabolique*

C'est alors une série d'Eisenstein, et il existe un caractère χ mod N tel que

$$a_p = \chi(p) + \chi^{-1}(p)\omega(p)p^{k-1} \quad \text{si } p \nmid N.$$

Comme $k \geq 2$, cette formule montre que $a_p \neq 0$ pour tout p tel que $p \nmid N$, et l'on conclut comme ci-dessus. [Si S est l'ensemble des $p \mid N$ tels que $a_p = 0$, on peut montrer que $a_n(f) = 0$ si et seulement si l'un des facteurs premiers de n appartient à S ; on a $M_f(x)\alpha = x + O(1)$, avec $\alpha = \prod_{p \in S} (1 - p^{-1})$.]

Calcul de la densité $\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} M_f(x)$

Posons

$$(195) \quad a_n^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } a_n(f) \neq 0 \\ 0 & \text{si } a_n(f) = 0 \end{cases}$$

et

$$(196) \quad \alpha_p = (1 - p^{-1}) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_{p^m}^0 / p^m \right).$$

D'après le n° 6.3, on a

$$(197) \quad \alpha = \prod_p \alpha_p.$$

Tout revient à calculer les α_p . Distinguons deux cas :

i) $p \mid N$

La formule $a_{p^m} = (a_p)^m$ entraîne

$$(198) \quad \alpha_p = \begin{cases} 1 - p^{-1} & \text{si } a_p = 0 \\ 1 & \text{si } a_p \neq 0. \end{cases}$$

ii) $p \nmid N$

Si β_p et γ_p sont tels que

$$1 - a_p T + \omega(p)p^{k-1}T^2 = (1 - \beta_p T)(1 - \gamma_p T),$$

on a

$$(199) \quad \begin{aligned} a_{p^m} &= \beta_p^m + \beta_p^{m-1}\gamma_p + \dots + \gamma_p^m \\ &= (\beta_p^{m+1} - \gamma_p^{m+1}) / (\beta_p - \gamma_p) \quad \text{si } \beta_p \neq \gamma_p. \end{aligned}$$

On en déduit que $a_{p^m} \neq 0$ sauf si β_p/γ_p est une racine de l'unité d'ordre $r(p) \geq 2$ et $m \equiv -1 \pmod{r(p)}$. D'où :

$$(200) \quad \alpha_p = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta_p/\gamma_p = 1, \text{ ou si } \beta_p/\gamma_p \text{ n'est pas une racine de l'unité;} \\ 1 - (p-1)/(p^{r(p)}-1) & \text{si } \beta_p/\gamma_p \text{ est une racine de l'unité d'ordre } r(p) \geq 2. \end{cases}$$

En particulier, $a_p = 0 \Leftrightarrow r(p) = 2 \Leftrightarrow \alpha_p = 1 - 1/(p+1)$.

Exemples

Je me borne à deux exemples où le caractère ω est égal à 1 (ce qui entraîne que k est pair), et où les coefficients de f appartiennent à $\mathbf{Z}$. On voit alors facilement que $r(p) \geq 3$ n'est possible que si :

- a) $p = 2$, $a_2 = \pm 2^{k/2}$, auquel cas $r(2) = 4$ et $\alpha_2 = 14/15$;
 b) $p = 3$, $a_3 = \pm 3^{k/2}$, auquel cas $r(3) = 6$ et $\alpha_3 = 363/364$.

$$\text{Exemple 1 : } k = 2, \quad N = 11, \quad f = q \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)^2 (1 - q^{11m})^2 = \eta^2(z) \eta^2(11z)$$

On a $a_2 = -2$, $a_3 = -1$ et $a_{11} = -1$. D'où $\alpha_2 = 14/15$, $\alpha_3 = \alpha_{11} = 1$, et, pour $p \neq 2, 3, 11$, $\alpha_p = 1$ si $a_p \neq 0$ et $\alpha_p = 1 - 1/(p+1)$ si $a_p = 0$. La densité α des $n \geq 1$ pour lesquels $a_n(f) \neq 0$ est donc

$$(201) \quad \alpha = \prod_p \alpha_p = \frac{14}{15} \prod_{a_p=0} \left(1 - \frac{1}{p+1} \right).$$

On trouvera dans Lang-Trotter [24], p. 267, la liste des $p \leq 2\,590\,717$ tels que $a_p = 0$. Ceux $\leq 40\,000$ sont : $p = 19, 29, 199, 569, 809, 1\,289, 1\,439, 2\,539, 3\,319, 3\,559, 3\,919, 5\,519, 9\,419, 9\,539, 9\,929, 11\,279, 11\,549, 13\,229, 14\,489, 17\,239, 18\,149, 18\,959, 19\,319, 22\,279, 24\,359, 27\,529, 28\,789, 32\,999, 33\,029, 36\,559$.

Vu (201), on en déduit $\alpha < 0,847$. Il est *probable* que $\alpha \geq 0,845$, mais, pour le prouver, il conviendrait d'avoir une borne *explicite* (et non triviale) du nombre des $p \leq x$ tels que $a_p = 0$.

$$\text{Exemple 2 : } k = 12, \quad N = 1, \quad f = \Delta = q \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

On a $\tau(2) = -24$ et $\tau(3) = 252$. D'où $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$ et $\alpha_p = 1$ si $\tau(p) \neq 0$, $\alpha_p = 1 - 1/(p+1)$ si $\tau(p) = 0$. La densité α des n pour lesquels $\tau(n) \neq 0$ est donc :

$$(202) \quad \alpha = \prod_{\tau(p)=0} \left(1 - \frac{1}{p+1} \right).$$

En fait, on conjecture que $\tau(n) \neq 0$ pour tout $n \geq 1$, et l'on sait qu'il en est bien ainsi pour $n \leq 10^{15}$.

[Si τ s'annule, le plus petit entier p tel que $\tau(p)=0$ est un nombre premier; de plus, les congruences satisfaites par $\tau(p)$ montrent que p est de la forme $hM-1$, avec $M=2^{14}3^75^37^2691$, et que $\left(\frac{p}{23}\right)=-1$, cf. [46]. Or les valeurs $h=1, 2, 3, 4, 5$ sont impossibles car $hM-1$ n'est pas premier (il est divisible par 1249, 79, 11, 4789 et 131 respectivement); les valeurs $h=6, 7$ ne conviennent pas non plus, car $hM-1$ est alors résidu quadratique mod 23; on a donc $h \geq 8$, d'où $p \geq 8M-1 > 10^{15}$.]

Ainsi, il est *probable* que $\alpha=1$. D'après le th. 16, on a en tout cas $\alpha > 0$; ici encore, pour avoir une minoration effective de α , il conviendrait d'avoir une borne explicite du nombre des $p \leq x$ tels que $\tau(p)=0$; c'est en principe faisable, mais je ne l'ai pas fait.

7.5. Formes de type CM

Soit $f \in M(N, k, \omega)$, $f \neq 0$. Supposons que f soit fonction propre des U_p et T_p , que $k \geq 2$, et que f soit de type CM.

Proposition 18. — *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que*
 (203) $M_f(x) \sim \alpha x / (\log x)^{1/2}$ *pour $x \rightarrow \infty$.*

Comme pour le th. 16, on peut supposer que $a_1(f)=1$, auquel cas la fonction $n \mapsto a_n(f)$ est multiplicative. Soit L l'extension quadratique de $\mathbf{Q}$ associée à f , cf. Ribet [33]. Il résulte de [33] que, pour $p \nmid N$, on a $a_p(f)=0$ si et seulement si p est inerte dans l'extension $L/\mathbf{Q}$. Le nombre des $p \leq x$ tels que $a_p(f)=0$ est donc égal à $\frac{1}{2}x/\log x + O(x/(\log x)^2)$ pour $x \rightarrow \infty$. En appliquant le th. 13 avec $K=\mathbf{Q}$ et $\lambda=1/2$, on obtient (203).

Remarque

L'emploi de la méthode de Landau ([42], th. 2.8) conduit à un résultat plus précis : la fonction $M_f(x)$ possède un *développement asymptotique*

$$M_f(x) = \frac{x}{(\log x)^{1/2}} (\alpha + \alpha_1/\log x + \dots).$$

7.6. Non-lacunarité des formes modulaires en poids ≥ 2

Rappelons d'abord que l'espace $M(N, k, \omega)$ des formes de type (k, ω) sur $\Gamma_0(N)$ se décompose en somme directe

$$(204) \quad M(N, k, \omega) = S(N, k, \omega) \oplus E(N, k, \omega),$$

où $S(N, k, \omega)$ est le sous-espace des formes paraboliques, et $E(N, k, \omega)$ le sous-espace des séries d'Eisenstein. Cette décomposition est stable par les U_p et les T_p .

Soit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(N, \omega)$ l'ensemble des diviseurs positifs M de N tels que le conducteur de ω divise M . Si $M \in \mathfrak{M}$, soit ω_M le caractère mod M qui coïncide avec ω sur les entiers premiers à N , et soit P_M l'ensemble des formes primitives (« newforms », cf. Li [27])

de niveau M et de type (k, ω_M) ; si $f \in P_M$, on suppose f normalisée de telle sorte que $a_1(f) = 1$. Soit d un diviseur positif de N/M ; si $f \in P_M$, la forme modulaire f_d définie par

$$f_d(z) = f(dz)$$

appartient à $S(N, k, \omega)$. De plus, les formes f_d (pour M parcourant $\mathfrak{M}$, $f \in P_M$ et d diviseur de N/M) forment une *base* du $\mathbf{C}$ -espace vectoriel $S(N, k, \omega)$, cf. [27]. Nous noterons $S_{\text{cm}}(N, k, \omega)$ (resp. $S_{\text{cm}}^{\text{non}}(N, k, \omega)$) le sous-espace de $S(N, k, \omega)$ engendré par les f_d où f est de type CM (resp. n'est pas de type CM). On a

$$(205) \quad S(N, k, \omega) = S_{\text{cm}}^{\text{non}}(N, k, \omega) \oplus S_{\text{cm}}(N, k, \omega).$$

Ici encore, cette décomposition est stable par les U_p et les T_p : cela résulte des formules suivantes, valables pour tout $M \in \mathfrak{M}$, tout $f \in P_M$ et tout diviseur positif d de N/M :

$$(206) \quad f_d | T_p = a_p(f) f_d \quad \text{si } p \nmid N,$$

$$(207) \quad f_d | U_p = \begin{cases} f_{d/p} & \text{si } p \mid d, \\ a_p(f) f_d & \text{si } p \nmid d \text{ et } p \mid M, \\ a_p(f) f_d - \omega_M(p) p^{k-1} f_{dp} & \text{si } p \nmid dM \text{ et } p \mid N. \end{cases}$$

En combinant (204) et (205), on obtient :

$$(208) \quad M(N, k, \omega) = S_{\text{cm}}^{\text{non}}(N, k, \omega) \oplus S_{\text{cm}}(N, k, \omega) \oplus E(N, k, \omega).$$

Théorème 17. — Soit $f \in M(N, k, \omega)$, avec $k \geq 2$.

(i) Si $f \notin S_{\text{cm}}(N, k, \omega)$, on a

$$(209) \quad M_f(x) \asymp x \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

(ii) Si $f \in S_{\text{cm}}(N, k, \omega)$ et $f \neq 0$, on a

$$(210) \quad M_f(x) \asymp x / (\log x)^{1/2} \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

Rappelons que $M_f(x)$ désigne le nombre des entiers n tels que $1 \leq n \leq x$ et $a_n(f) \neq 0$; quant à la notation « $\varphi \asymp \psi$ », elle équivaut à « $\varphi = O(\psi)$ et $\psi = O(\varphi)$ », cf. par exemple Bourbaki, *Fonct. var. réelle*, chap. V, § 1, déf. 2.

Corollaire. — Si $f \notin S_{\text{cm}}(N, k, \omega)$ et $k \geq 2$, l'ensemble des n tels que $a_n(f) \neq 0$ a une densité inférieure qui est > 0 .

Ce n'est qu'une reformulation de (i).

Remarque. — Ce corollaire est notamment applicable lorsque $N = 1$ et $f \neq 0$; en effet, il n'existe pas de forme de niveau 1 de type CM. Même chose lorsque N est un nombre premier congru à 1 mod 4.

Démonstration du th. 17

Il est clair que $M_f(x) = O(x)$, et la prop. 18 montre que

$$(211) \quad M_f(x) = O(x / (\log x)^{1/2}) \quad \text{si } f \in S_{\text{cm}}(N, k, \omega).$$

Pour prouver le th. 17, il suffit donc d'établir que :

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} x^{-1} M_f(x) > 0 \quad \text{si } f \notin S_{\text{cm}}(N, k, \omega)$$

et
$$\liminf_{x \rightarrow \infty} x^{-1} M_f(x) (\log x)^{1/2} > 0 \quad \text{si } f \in S_{\text{cm}}(N, k, \omega), f \neq 0.$$

Posons :

$$R_0 = \text{ensemble des } f \text{ tels que } \liminf_{x \rightarrow \infty} x^{-1} M_f(x) = 0$$

$$R_{1/2} = \text{ensemble des } f \text{ tels que } \liminf_{x \rightarrow \infty} x^{-1} M_f(x) (\log x)^{1/2} = 0.$$

Il s'agit de montrer que $R_0 = S_{\text{cm}}(N, k, \omega)$ et $R_{1/2} = 0$. Soit $\mathfrak{H}$ la $\mathbf{C}$ -algèbre d'endomorphismes de $M(N, k, \omega)$ engendrée par les U_p et les T_p .

Lemme 9. — Les ensembles R_0 et $R_{1/2}$ sont stables par $\mathfrak{H}$.

Les formules (172) et (173) montrent que, si $g = f|U_p$ ou $f|T_p$, on a

$$(212) \quad M_g(x) \leq M_f(px) + M_f(x/p) \leq 2M_f(mx) \quad \text{pour tout } m \geq p.$$

En itérant cette formule, et en tenant compte de l'inégalité

$$(213) \quad M_{g+h}(x) \leq M_g(x) + M_h(x),$$

on en déduit que, pour tout $A \in \mathfrak{H}$, il existe des entiers c_A et m_A strictement positifs tels que

$$(214) \quad M_{Af}(x) \leq c_A M_f(m_A x) \quad \text{pour tout } f \in M(N, k, \omega).$$

Si $f \in R_0$, il existe une suite x_α tendant vers $+\infty$ telle que $x_\alpha^{-1} M_f(x_\alpha) \rightarrow 0$. Si l'on pose $y_\alpha = m_A^{-1} x_\alpha$, la formule (214) montre que $y_\alpha^{-1} M_{Af}(y_\alpha) \rightarrow 0$. On a donc $Af \in R_0$, ce qui prouve que R_0 est stable par $\mathfrak{H}$. On raisonne de même pour $R_{1/2}$.

Ce lemme étant établi, revenons à la démonstration du th. 17 (i). On a vu que R_0 contient $S_{\text{cm}}(N, k, \omega)$, et il s'agit de prouver qu'il y a *égalité*. Supposons donc que f appartienne à R_0 , mais pas à $S_{\text{cm}}(N, k, \omega)$. Écrivons f sous la forme

$$f = g + h, \quad \text{avec } g \in S_{\text{cm}}^{\text{non}}(N, k, \omega) \oplus E(N, k, \omega) \quad \text{et } h \in S_{\text{cm}}(N, k, \omega).$$

On a $M_g(x) \leq M_f(x) + M_h(x)$. Comme $M_h(x) = o(x)$ d'après (211), et que

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} x^{-1} M_f(x) = 0,$$

on a $\liminf_{x \rightarrow \infty} x^{-1} M_g(x) = 0$, d'où $g \in R_0$. Par hypothèse, g est $\neq 0$. Le sous- $\mathfrak{H}$ -module $\mathfrak{H}g$ engendré par g contient un sous-module simple Σ ; comme $\mathfrak{H}$ est une algèbre commutative, Σ est de dimension 1 sur $\mathbf{C}$. Si f' est un élément non nul de Σ , f' est vecteur propre des U_p et des T_p ; comme f' est contenu dans $\mathfrak{H}g$, le lemme 9 montre que f' appartient à R_0 , i.e. que $\liminf_{x \rightarrow \infty} x^{-1} M_{f'}(x) = 0$. Mais f' est contenu dans $S_{\text{cm}}^{\text{non}}(N, k, \omega) \oplus E(N, k, \omega)$ donc n'est pas de type CM; d'après le th. 16, $x^{-1} M_{f'}(x)$ a une limite > 0 quand $x \rightarrow \infty$. Cette contradiction montre que $R_0 = S_{\text{cm}}(N, k, \omega)$ d'où le th. 17 (i).

La partie (ii) du th. 17 se démontre de la même manière : si $R_{1/2}$ est $\neq 0$, l'argument ci-dessus montre qu'il contient un $f' \neq 0$ qui est vecteur propre des U_p et des T_p ; un tel f' contredit la prop. 18 s'il est de type CM, et le th. 16 s'il ne l'est pas. On a donc bien $R_{1/2} = 0$.

Questions

1) Peut-on donner un *développement asymptotique* de $M_f(x)$? En particulier, est-il vrai que $x^{-1}M_f(x)$ a une limite pour $x \rightarrow \infty$? La même question se pose pour $x^{-1}M_f(x)(\log x)^{1/2}$ lorsque f appartient à $S_{\text{em}}(N, k, \omega)$.

2) (« Lacunes »). Supposons $f \neq 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, notons $i_f(n)$ le plus grand entier ≥ 0 tel que

$$a_{n+i}(f) = 0 \quad \text{pour tout } i \text{ tel que } 0 < i \leq i_f(n).$$

Si $f \notin S_{\text{em}}(N, k, \omega)$ et $k \geq 2$, le th. 17 (i) entraîne :

$$(215) \quad i_f(n) = O(n) \quad \text{pour } n \rightarrow \infty.$$

Peut-on améliorer cette majoration, et prouver par exemple :

$$(216?) \quad i_f(n) = O(n/(\log n)^m) \quad \text{pour tout } m \geq 0,$$

ou même :

$$(217?) \quad i_f(n) = O(n^\delta) \quad \text{avec } \delta < 1?$$

3) Y a-t-il des résultats analogues pour les formes de poids ≥ 2 (non nécessairement entier) sur d'autres sous-groupes de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$, ou plus généralement d'autres groupes fuchsien? Voir là-dessus Knopp-Lehner [21], qui contient un certain nombre d'exemples.

7.7. Formes paraboliques de poids 1

Dans ce numéro, on suppose que le poids k est égal à 1; pour simplifier, on ne considère que des formes paraboliques (il y a des résultats analogues pour les séries d'Eisenstein).

Fonctions propres des opérateurs de Hecke

Soit f un élément non nul de $S(N, 1, \omega)$. Supposons que f soit fonction propre des T_p , $p \nmid N$, avec pour valeurs propres a_p . On sait ([9], [43]) qu'il existe alors une représentation irréductible continue

$$\rho : \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{C})$$

qui est non ramifiée en dehors de N , et telle que

$$(218) \quad \text{Tr } \rho(\sigma_p) = a_p \quad \text{et} \quad \det \rho(\sigma_p) = \omega(p) \quad \text{pour tout } p \nmid N.$$

Ces propriétés caractérisent ρ à isomorphisme près.

Le groupe $G = \text{Im}(\rho)$ est un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{C})$. Son image PG dans $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{C}) = \mathbf{GL}_2(\mathbf{C})/\mathbf{C}^*$ est isomorphe à l'un des groupes suivants :

- groupe diédral $\mathbf{D}_n$ d'ordre $2n$ ($n \geq 2$),
- groupe alterné $\mathfrak{A}_4$,
- groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$,
- groupe alterné $\mathfrak{A}_5$.

Nous dirons, suivant les cas, que f est de type $\mathbf{D}_n$, $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$ ou $\mathfrak{A}_5$; les types $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_5$ sont parfois appelés « exotiques ».

Si PG_2 désigne l'ensemble des éléments d'ordre 2 du groupe PG (images des éléments de G de trace 0), nous poserons

$$(219) \quad \lambda = |\text{PG}_2|/|\text{PG}|.$$

On a

$$(220) \quad \lambda = \begin{cases} 1/2 + 1/2n & \text{si } \text{PG} \simeq \mathbf{D}_n \quad (n \text{ pair} \geq 2) \\ 1/2 & \text{si } \text{PG} \simeq \mathbf{D}_n \quad (n \text{ impair} \geq 3) \\ 3/8 & \text{si } \text{PG} \simeq \mathfrak{S}_4 \\ 1/4 & \text{si } \text{PG} \simeq \mathfrak{A}_4 \text{ ou } \mathfrak{A}_5. \end{cases}$$

Théorème 18. — Soit f un élément non nul de $S(N, 1, \omega)$. Supposons f fonction propre des opérateurs U_p et T_p . Il existe alors un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$(221) \quad M_f(x) \sim \alpha x / (\log x)^\lambda \quad \text{pour } x \rightarrow \infty,$$

où λ est défini par les formules (219) et (220) ci-dessus.

Ce résultat est démontré dans [42], th. 4.2, qui donne même un développement asymptotique pour $M_f(x)$. On peut aussi le déduire du th. 13 du n° 6.1, en remarquant que l'ensemble des p tels que $a_p = 0$ est *frobénien* ([42], (1.4)) de densité λ .

Remarque. — Les formes les moins « lacunaires » sont les formes de type exotique, pour lesquelles λ est $< 1/2$. Les plus lacunaires sont celles de type $\mathbf{D}_2$, où $\lambda = 3/4$ (cf. fin du n° 6.5); pour un exemple explicite (et le calcul de la constante α correspondante), voir n° 7.8 ci-après.

Cas général

Revenons à la base (f_d) de $S(N, 1, \omega)$ définie au n° 7.6. Si v est un nombre donné, avec $0 < v < 1$, notons $S^v(N, 1, \omega)$ le sous-espace de $S(N, 1, \omega)$ qui a pour base les f_d tels que l'invariant λ de f soit égal à v . On a évidemment

$$(222) \quad S(N, 1, \omega) = \bigoplus_v S^v(N, 1, \omega).$$

Si l'on pose

$$(223) \quad S_\mu(N, 1, \omega) = \bigoplus_{v \geq \mu} S^v(N, 1, \omega),$$

on obtient une *filtration décroissante* de l'espace $S(N, 1, \omega)$; on a

$$S_{1/4}(N, 1, \omega) = S(N, 1, \omega) \quad \text{et} \quad S_{\mu}(N, 1, \omega) = 0 \quad \text{si} \quad \mu > 3/4.$$

Un élément $f \neq 0$ de $S(N, 1, \omega)$ est dit de *filtration* λ s'il appartient à $S_{\lambda}(N, 1, \omega)$, et s'il n'appartient pas à $S_{\mu}(N, 1, \omega)$ pour $\mu > \lambda$.

Théorème 19. — Si f est un élément non nul de $S(N, 1, \omega)$ de filtration λ , on a

$$(224) \quad M_f(x) \asymp x/(\log x)^{\lambda} \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

Le th. 18 entraîne que $M_f(x) = O(x/(\log x)^{\lambda})$, et il faut montrer que

$$\liminf x^{-1} M_f(x) (\log x)^{\lambda} > 0.$$

On procède comme pour la démonstration du th. 17. On pose :

$$R_{\lambda} = \text{ensemble des } f \text{ tels que } \liminf x^{-1} M_f(x) (\log x)^{\lambda} = 0.$$

Si $S_{\lambda}^{+}(N, 1, \omega)$ désigne la réunion des $S_{\mu}(N, 1, \omega)$ pour $\mu > \lambda$, on a $R_{\lambda} \supset S_{\lambda}^{+}(N, 1, \omega)$, et il s'agit de prouver qu'il y a *égalité*. Or R_{λ} jouit des deux propriétés suivantes :

- (i) $f \in R_{\lambda}$ et $g \in S_{\lambda}^{+}(N, 1, \omega) \Rightarrow f + g \in R_{\lambda}$ (immédiat);
- (ii) R_{λ} est stable par l'algèbre $\mathfrak{H}$ engendrée par les U_p et les T_p (cela se démontre comme le lemme 9, en utilisant (214)).

En combinant (i) et (ii) on en déduit (cf. démonstration du th. 17) que, si R_{λ} est distinct de $S_{\lambda}^{+}(N, 1, \omega)$, il contient un élément non nul f' qui est vecteur propre des U_p et des T_p et qui appartient à la somme directe des $S^{\nu}(N, 1, \omega)$ pour $\nu \geq \lambda$. Un tel f' contredit le th. 18. On a donc bien $R_{\lambda} = S_{\lambda}^{+}(N, 1, \omega)$, ce qui démontre le th. 19.

$$\mathbf{7.8. Exemple :} \quad f = q \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{12m})^2 = \eta^2(12z)$$

On a :

$$f = q - 2q^{13} - q^{25} + 2q^{37} + q^{49} + 2q^{61} - 2q^{73} - 2q^{97} - 2q^{109} + q^{121} + 2q^{157} \\ + 3q^{169} - 2q^{181} + 2q^{193} - 2q^{229} - 2q^{241} - \dots$$

La forme f est une forme parabolique de poids 1, de niveau $N = 2^4 3^2$ et de caractère ω tel que $\omega(p) = (-1)^{(p-1)/2}$ si $p \geq 5$. Elle est fonction propre des U_p ($p = 2, 3$) et des T_p ($p \geq 5$). La représentation correspondante est de type $\mathbf{D}_2$; elle est décrite dans [43], p. 242-244. L'exposant λ est égal à $3/4$. D'après le th. 18, on a

$$(225) \quad M_f(x) \sim \alpha x / (\log x)^{3/4}, \quad \text{avec } \alpha > 0.$$

Nous allons calculer α :

Proposition 19. — On a

$$(226) \quad \alpha = \{2^{-1} 3^{-7} \pi^6 \log(2 + \sqrt{3})\}^{1/4} A^{1/2} / \Gamma(1/4),$$

$$\text{avec } A = \prod_{p \equiv 1 \pmod{12}} (1 - p^{-2}).$$

Un calcul approché de A , basé sur $p \leq 25\,000$, donne $A = 0,992\,44\dots$. Comme $\Gamma(1/4) = 3,625\,609\,9\dots$ et $\log(2 + \sqrt{3}) = 1,316\,957\dots$, on en déduit :

$$(226') \quad \alpha = 0,201\,54\dots$$

Démonstration de la prop. 19

L'extension galoisienne correspondant au groupe $PG \simeq D_2$ est le corps des racines 12-ièmes de l'unité $E = \mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{3})$, cf. [43], p. 243. On en déduit que, pour $p \geq 5$, la valeur propre a_p de T_p est $\neq 0$ si et seulement si p est totalement décomposé dans $E/\mathbf{Q}$, i.e. si $p \equiv 1 \pmod{12}$. D'autre part, les valeurs propres de U_2 et U_3 sont nulles. On déduit de là que $a_n(f)$ est $\neq 0$ si et seulement si $v_p(n) = 0$ pour $p = 2, 3$ et $v_p(n) \equiv 0 \pmod{2}$ pour tout $p \equiv 5, 7$ ou $11 \pmod{12}$.

Posons alors, comme au n° 6.2 :

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0(f) n^{-s},$$

où $a_n^0(f)$ est égal à 0 ou 1 suivant que $a_n(f)$ est 0 ou $\neq 0$. Vu ce qui précède, on a :

$$(227) \quad \varphi(s) = \prod_p \varphi_p(s),$$

avec

$$(228) \quad \varphi_p(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } p=2 \text{ ou } 3, \\ 1/(1-p^{-s}) & \text{si } p \equiv 1 \pmod{12} \\ 1/(1-p^{-2s}) & \text{si } p \equiv 5, 7 \text{ ou } 11 \pmod{12}. \end{cases}$$

D'après le lemme 5 du n° 6.2, il existe une constante $u > 0$ telle que

$$(229) \quad \varphi(s) \sim u/(s-1)^{1/4} \quad \text{pour } s \rightarrow 1 \quad (s \text{ réel} > 1),$$

et d'après (143) on a

$$(230) \quad \alpha = u/\Gamma(1/4).$$

Tout revient donc à calculer u .

Soit $\zeta_E(s)$ la fonction zêta du corps E . On a

$$\zeta_E(s) = \prod_p \zeta_{E,p}(s),$$

avec

$$(231) \quad \zeta_{E,p}(s) = \begin{cases} 1/(1-p^{-2s}) & \text{si } p=2 \text{ ou } 3 \\ 1/(1-p^{-s})^4 & \text{si } p \equiv 1 \pmod{12} \\ 1/(1-p^{-2s})^2 & \text{si } p \equiv 5, 7, 11 \pmod{12}. \end{cases}$$

En comparant (228) et (231), on voit que

$$(232) \quad \varphi(s)^4 = \zeta_E(s) \psi(s),$$

avec

$$(233) \quad \psi(s) = \prod_{p=2,3} (1-p^{-2s}) \prod_{p \equiv 5,7,11 \pmod{12}} (1-p^{-2s})^{-2}.$$

La fonction ψ est holomorphe et non nulle en $s=1$. Si κ désigne le résidu de $\zeta_{\mathbb{E}}(s)$ en $s=1$, la formule (232) montre que

$$\varphi(s) \sim (\kappa \psi(1))^{1/4} / (s-1)^{1/4} \quad \text{pour } s \rightarrow 1,$$

d'où

$$(234) \quad u = (\kappa \psi(1))^{1/4}.$$

Le résidu κ se calcule sans difficulté : on a

$$(235) \quad \kappa = L_{\omega}(1) L_{\chi}(1) L_{\chi\omega}(1),$$

où $L_{\omega}(s)$, $L_{\chi}(s)$ et $L_{\chi\omega}(s)$ sont les fonctions L associées aux trois corps quadratiques $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$. On trouve

$$L_{\omega}(1) = \pi/4, \quad L_{\chi}(1) = (\log(2 + \sqrt{3}))/\sqrt{3} \quad \text{et} \quad L_{\chi\omega}(1) = \pi/3 \sqrt{3},$$

d'où :

$$(236) \quad \kappa = \frac{\pi^2}{36} \log(2 + \sqrt{3}).$$

On a d'autre part

$$\psi(1) = (1-1/4)(1-1/9) \prod_{p \equiv 5, 7, 11 \pmod{12}} (1-p^{-2})^{-2},$$

d'où, en multipliant par A^{-2} :

$$\begin{aligned} \psi(1) A^{-2} &= (1-1/4)^3 (1-1/9)^3 \prod_p (1-p^{-2})^{-2} \\ &= (3/4)^3 (8/9)^3 (\pi^2/6)^2, \end{aligned}$$

$$\text{i.e.} \quad \psi(1) = 2 \cdot 3^{-5} \pi^4 A^2.$$

En combinant cette égalité avec (234) et (236), on obtient

$$u^4 = 2^{-1} 3^{-7} \pi^6 A^2 \log(2 + \sqrt{3}),$$

d'où le résultat cherché, d'après (230).

§ 8. Applications aux courbes elliptiques

8.1. Notations et rappels (cf. [24], [28], [31], [40], [41])

Soit E une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$.

On note S_E l'ensemble des nombres premiers en lesquels E a mauvaise réduction; c'est un ensemble fini, qui est non vide d'après un théorème de Šafarevič ([35], voir aussi Ogg [31]).

Si p est un nombre premier n'appartenant pas à S_E , on note $\tilde{E}(p)$ la réduction de E en p , π_p l'endomorphisme de Frobenius de $\tilde{E}(p)$, et a_p la trace de π_p ; on a

$$(237) \quad a_p = 1 + p - A_p(E),$$

où $A_p(E)$ est le nombre de points de $\tilde{E}(p)$ sur le corps $\mathbf{F}_p$.

Si n est un entier ≥ 1 , on note E_n le groupe des points $x \in E(\bar{\mathbf{Q}})$ tels que $nx = 0$; l'action de $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur E_n définit un homomorphisme continu

$$\varphi_n: \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \text{Aut}(E_n) \simeq \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}).$$

Soit $S_{E,n}$ la réunion de S_E et de l'ensemble des diviseurs premiers de n . L'homomorphisme φ_n est non ramifié en dehors de $S_{E,n}$; si $p \notin S_{E,n}$, on a

$$(238) \quad \text{Tr } \varphi_n(\sigma_p) \equiv a_p \pmod{n} \quad \text{et} \quad \det \varphi_n(\sigma_p) \equiv p \pmod{n},$$

où σ_p désigne la substitution de Frobenius de p .

Si ℓ est un nombre premier, les représentations φ_{ℓ^m} définissent par passage à la limite une représentation ℓ -adique

$$\rho_\ell: \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \varprojlim \text{Aut}(E_{\ell^m}) \simeq \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell).$$

Cette représentation est non ramifiée en dehors de $S_{E,\ell}$, et l'on a, d'après (238) :

$$(239) \quad \text{Tr } \rho_\ell(\sigma_p) = a_p \quad \text{et} \quad \det \rho_\ell(\sigma_p) = p \quad \text{si } p \notin S_{E,\ell}.$$

Lorsque E n'a pas de multiplication complexe, i.e. lorsque $\text{End}_{\bar{\mathbf{Q}}} E = \mathbf{Z}$, le groupe $G_\ell = \text{Im}(\rho_\ell)$ est ouvert dans $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$, et l'on a $G_\ell = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$ pour tout ℓ sauf un nombre fini (cf. [41]).

8.2. Nombre des $p \leq x$ tels que a_p ait une valeur donnée

Soit $h \in \mathbf{Z}$. Si x est un nombre réel ≥ 2 , posons

$$(240) \quad P_{E,h}(x) = \text{nombre des } p \leq x \text{ tels que } p \notin S_E \text{ et } a_p = h.$$

Théorème 20. — Supposons que E n'ait pas de multiplication complexe. On a alors

$$(241) \quad P_{E,h}(x) = O(\text{Li}(x)/\varepsilon(x)^{1/4}) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty,$$

et, sous (GRH) :

$$(242_R) \quad P_{E,h}(x) = O(\text{Li}(x)/\varepsilon_R(x)^{1/4}) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty,$$

où $\varepsilon(x)$ et $\varepsilon_R(x)$ sont les fonctions définies au n° 4.1.

De plus, lorsque $h \neq \pm 2$, on peut remplacer l'exposant $1/4$ de (241) et (242_R) par $1/3$, et lorsque $h = 0$, on peut le remplacer par $1/2$.

En particulier :

Corollaire 1. — Si $h \neq \pm 2$, on a

$$(243) \quad P_{E,h}(x) = O(x/(\log x)^{4/3-\delta}) \quad \text{pour tout } \delta > 0,$$

et, sous (GRH),

$$(244_R) \quad P_{E,h}(x) = O(x^{5/6}/(\log x)^{1/3}).$$

Corollaire 2. — On a

$$(245) \quad P_{E,0}(x) = O(x/(\log x)^{3/2-\delta}) \quad \text{pour tout } \delta > 0,$$

et, sous (GRH),

$$(246_R) \quad P_{E,0}(x) = O(x^{3/4}).$$

Démonstration du th. 20

C'est essentiellement la même que celle du th. 15 :

i) *Cas général*

On choisit un nombre premier ℓ . On applique le th. 10 du n° (4.1) au groupe de Galois $G_\ell = \text{Im}(\rho_\ell)$, et à la partie $C_{\ell,h}$ de G_ℓ formée des éléments $s \in G_\ell$ tels que $\text{Tr}(s) = h$. Avec les notations du n° (4.1), on a $\dim G_\ell = 4$, $\dim C_{\ell,h} = 3$, d'où $\alpha = 1/4$, et l'on obtient le résultat cherché.

ii) *Le cas $h \neq 0, 2, -2$*

On choisit ℓ de la manière suivante :

ii₁) $\ell = 2$ si h est de la forme $\pm 2^m$, $m = 0$ ou $m \geq 2$;

ii₂) $\ell =$ facteur premier impair de h sinon.

On définit G_ℓ et $C_{\ell,h}$ comme dans le cas i).

Lemme 10. — Pour tout $s \in C_{\ell, h}$, on a $\text{Tr}(s)^2 - 4 \det(s) \neq 0$.

Supposons que $\text{Tr}(s)^2 = 4 \det(s)$. Comme $\text{Tr}(s) = h$, et que $\det(s)$ est une unité ℓ -adique, on en conclut que $v_{\ell}(h) = v_{\ell}(2)$, où v_{ℓ} désigne la valuation ℓ -adique. Mais c'est impossible :

dans le cas ii₁), on a $v_{\ell}(2) = 1$ et $v_{\ell}(h) \neq 1$,

dans le cas ii₂), on a $v_{\ell}(2) = 0$ et $v_{\ell}(h) \geq 1$.

D'où le lemme.

Ainsi, pour tout $s \in C_{\ell, h}$, les valeurs propres de s sont distinctes : l'élément s est « régulier » dans $\mathbf{GL}_2$, et la dimension $r(s)$ de sa classe de conjugaison est égale à 2. On peut alors appliquer le th. 12 du n° 5.1 avec

$$\beta = (4 - 3)/(4 - 2/2) = 1/3,$$

et l'on a bien remplacé l'exposant $1/4$ par $1/3$.

iii) *Le cas $h = 0$*

On procède comme dans le cas i), mais l'on remplace le groupe G_{ℓ} par son image G'_{ℓ} dans $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{Z}_{\ell})$, qui est un groupe de Lie de dimension 3, cf. n° 7.3, iii). Cela a pour effet de remplacer $C_{\ell, 0}$ par l'ensemble C'_{ℓ} des éléments de G'_{ℓ} d'ordre 2; comme les éléments de C'_{ℓ} sont réguliers dans $\mathbf{PGL}_2$, on peut appliquer le th. 12 du n° 5.1, avec

$$\beta = (3 - 2)/(3 - 2/2) = 1/2.$$

D'où le résultat cherché.

Remarques

1) A la place de la représentation ℓ -adique ρ_{ℓ} (avec ℓ fixé), on peut utiliser les représentations φ_{ℓ} (avec ℓ variable) à valeurs dans les groupes $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_{\ell})$. Grâce au th. 11 du n° 4.6, on obtient ainsi les formules (241) et (242_R) du th. 20, avec le même exposant $\alpha = 1/4$. Toutefois, je ne sais pas obtenir par cette méthode les améliorations de α données ci-dessus pour $h \neq \pm 2$.

2) Le th. 20 s'étend aux courbes elliptiques définies sur un corps de nombres quelconque. La démonstration est la même.

3) Disons que l'entier h est *permis* (pour la courbe E) si, pour tout $n \geq 1$, il existe $s \in \text{Im}(\varphi_n)$ tel que $\text{Tr}(s) \equiv h \pmod{n}$. Par exemple, 2 et 0 sont permis (prendre pour s l'élément neutre, et la conjugaison complexe, respectivement); 1 n'est pas toujours permis.

Si h n'est pas permis, la formule (238) montre que $a_p \neq h$ pour tout p assez grand; on a $P_{E, h}(x) = O(1)$.

Par contre, si h est permis, il est vraisemblable que $P_{E, h}(x)$ tend vers l'infini avec x . Lang et Trotter ([24]) ont même conjecturé que

$$(247?) \quad P_{E, h}(x) \sim C_h(E) x^{1/2} / \log x \quad \text{pour } x \rightarrow \infty,$$

où $C_h(E)$ est un nombre >0 dont on trouvera la valeur dans [24]. La majoration de $P_{E,h}(x)$ donnée par le th. 20 n'est donc probablement pas optimale, même sous (GRH), et même dans le cas le plus favorable, qui est $h=0$ (cas « supersingulier »).

4) Soit K un corps quadratique imaginaire. Notons $P_{E,K}(x)$ le nombre des $p \leq x$, $p \notin S_E$, tels que le corps $\mathbf{Q}(\pi_p)$ engendré par l'endomorphisme de Frobenius de $\tilde{E}(p)$ soit isomorphe à K . Dans [24], Lang et Trotter conjecturent que

$$(248_p) \quad P_{E,K}(x) \sim C_K(E) x^{1/2} / \log x, \quad \text{avec } C_K(E) > 0.$$

Cette conjecture semble au moins aussi difficile que la précédente — elle-même analogue au classique problème des nombres premiers de la forme $1 + n^2$. À défaut de la démontrer, on peut se demander si l'on peut donner une *majoration* non triviale de $P_{E,K}(x)$ pour $x \rightarrow \infty$. Il en est bien ainsi. On peut prouver que :

$$(249) \quad P_{E,K}(x) = O(x / (\log x)^\gamma) \quad \text{avec } \gamma > 1,$$

et, sous (GRH) :

$$(250_R) \quad P_{E,K}(x) = O(x^\delta) \quad \text{avec } \delta < 1.$$

La démonstration combine des arguments de style « Chebotarev » avec une technique de crible à la Selberg; elle est trop longue pour être donnée ici.

8.3. Comparaison de deux courbes elliptiques

Soient E et E' deux courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$. Nous conservons pour E les notations S_E , a_p , E_n , φ_n , ρ_ℓ définies au n° 8.1, et nous utilisons pour E' les notations analogues $S_{E'}$, a'_p , E'_n , φ'_n et ρ'_ℓ . Deux cas sont possibles :

- (a) les représentations ℓ -adiques ρ_ℓ et ρ'_ℓ sont isomorphes (pour un ℓ , ou pour tout ℓ , cela revient au même, cf. [40], p. IV-15); on a alors $S_E = S_{E'}$ et $a_p = a'_p$ pour tout $p \notin S_E$;
- (b) les représentations ρ_ℓ et ρ'_ℓ ne sont pas isomorphes; l'ensemble des p tels que $a_p \neq a'_p$ est alors de densité >0 ([40], *loc. cit.*).

Le cas (a) se produit lorsque E et E' sont $\mathbf{Q}$ -isogènes. On conjecture qu'il ne se produit que dans ce cas, mais on ne sait le démontrer que lorsque E ou E' a des multiplications complexes, ou lorsque l'invariant modulaire de E ou E' n'appartient pas à $\mathbf{Z}$ ([40], p. IV-14).

Théorème 21. — Supposons que l'on soit dans le cas (b), i.e. que l'ensemble des p tels que $a_p \neq a'_p$ soit infini. Soit S un ensemble fini de nombres premiers contenant S_E et $S_{E'}$; posons $N_S = \prod_{\ell \in S} \ell$.

Soit $p = p(E, E', S)$ le plus petit nombre premier n'appartenant pas à S tel que $a_p \neq a'_p$. Sous (GRH), on a alors

$$(251_R) \quad p \leq c_{34} (\log N_S)^2 (\log \log 2N_S)^{12},$$

où c_{34} est une constante absolue.

(Noter que $N_S \geq 2$, puisque S contient S_E , qui est non vide; par suite $\log N_S$ et $\log \log 2N_S$ sont > 0 .)

On peut reformuler le th. 21 en disant que, sous (GRH), si l'on vérifie que $a_p = a'_p$ pour tout $p \notin S$ satisfaisant à (251_R), alors $a_p = a'_p$ pour tout $p \notin S_E = S_{E'}$.

Démonstration du th. 21

Commençons par deux lemmes élémentaires :

Lemme 11. — Il existe une constante absolue $c_{23} > 0$ telle que

$$(252) \quad \sum_{\ell \leq x} \log \ell \geq c_{23} x \quad \text{pour tout } x \geq 2.$$

(Précisons que la sommation porte sur les nombres premiers ℓ qui sont $\leq x$.)

Ce lemme résulte du théorème des nombres premiers — ou même simplement de la version plus faible due à Chebyshev.

Lemme 12. — Si n est un entier > 0 , il existe un nombre premier ℓ tel que

$$(253) \quad n \not\equiv 0 \pmod{\ell} \quad \text{et} \quad \ell \leq c_{24} \log 2n,$$

où c_{24} est une constante absolue.

Prenons $c_{24} = \text{Sup}(2/\log 2, 1/c_{23})$. Si le nombre premier cherché ℓ n'existait pas, n serait divisible par tous les $\ell \leq x$, où $x = c_{24} \log 2n$. On aurait alors $n \geq \prod_{\ell \leq x} \ell$, i.e.

$$\log n \geq \sum_{\ell \leq x} \log \ell.$$

Par hypothèse, on a $x \geq c_{24} \log 2 \geq 2$, et le lemme 11 montre que

$$\sum_{\ell \leq x} \log \ell \geq c_{23} x = c_{23} c_{24} \log 2n \geq \log 2n.$$

On aurait donc $\log n \geq \log 2n$, ce qui est absurde.

(Les valeurs optimales de c_{23} et c_{24} sont $c_{23} = \frac{1}{3} \log 2$ et $c_{24} = 2/\log 2$.)

Revenons à la démonstration du th. 21. Il s'agit de majorer le nombre premier $p = p(E, E', S)$. Par hypothèse, l'entier $n = |a_p - a'_p|$ est > 0 . Choisissons un nombre premier ℓ satisfaisant à la condition (253) du lemme 12. On a :

$$(254) \quad a_p \not\equiv a'_p \pmod{\ell}$$

et

$$(255) \quad \ell \leq c_{24} \log(2|a_p - a'_p|).$$

D'après un théorème de Hasse, on a

$$(256) \quad |a_p| \leq 2p^{1/2} \quad \text{et} \quad |a'_p| \leq 2p^{1/2}$$

d'où

$$(257) \quad |a_p - a'_p| \leq 4p^{1/2}.$$

Vu (255), cela entraîne

$$(258) \quad \ell \leq c_{24} \log 8p^{1/2} \leq c_{25} \log p,$$

où c_{25} est une constante absolue > 0 . En particulier, on a

$$(259) \quad \ell \neq p$$

sauf si p est inférieur à une constante absolue c_{26} (auquel cas il n'y a rien à démontrer).

Les représentations

$$\varphi_\ell : \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell) \quad \text{et} \quad \varphi'_\ell : \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell)$$

associées aux courbes E et E' , ainsi qu'au nombre premier ℓ , définissent un homomorphisme

$$\psi_\ell : \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell) \times \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell).$$

Soit $G_\ell \subset \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell) \times \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell)$ l'image de ψ_ℓ et soit C_ℓ le sous-ensemble de G_ℓ formé des couples (s, s') tels que $\text{Tr}(s) \neq \text{Tr}(s')$. Si q est un nombre premier n'appartenant pas à $S_\ell = S \cup \{\ell\}$, la représentation ψ_ℓ est non ramifiée en q , et l'on peut parler de la substitution de Frobenius de q :

$$\psi_\ell(\sigma_q) = (\varphi_\ell(\sigma_q), \varphi'_\ell(\sigma_q));$$

c'est un élément de G_ℓ , défini à conjugaison près; nous le noterons (s_q, s'_q) . Vu (238), on a

$$\text{Tr}(s_q) \equiv a_q \pmod{\ell} \quad \text{et} \quad \text{Tr}(s'_q) \equiv a'_q \pmod{\ell}.$$

Il en résulte que (s_q, s'_q) appartient à C_ℓ si et seulement si l'on a

$$(260) \quad a_q \not\equiv a'_q \pmod{\ell}.$$

D'après (254) et (259), cette condition est satisfaite si $q = p$. On a donc $(s_p, s'_p) \in C_\ell$, ce qui montre que C_ℓ est non vide.

Soit maintenant H_ℓ l'intersection de G_ℓ avec le groupe des homothéties (λ, λ) , où λ parcourt $\mathbf{F}_\ell^*$. Il est clair que C_ℓ est stable par H_ℓ , donc est image réciproque d'une partie non vide C'_ℓ du groupe quotient $G'_\ell = G_\ell/H_\ell$.

Lemme 13. — On a $|G'_\ell| < 2\ell^6$.

L'homomorphisme canonique

$$G_\ell \rightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell) \times \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell) \rightarrow \mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_\ell) \times \mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_\ell)$$

a pour noyau l'intersection $\tilde{H}_\ell$ de G_ℓ avec le groupe des (λ, μ) , où λ et μ parcourent $\mathbf{F}_\ell^*$. Il est clair que $\tilde{H}_\ell$ contient H_ℓ . D'autre part, si $(s, s') \in G_\ell$, on a $\det(s) = \det(s')$ d'après

(238); il en résulte que, si $(\lambda, \mu) \in \tilde{H}_\ell$, on a $\lambda^2 = \mu^2$, d'où $\lambda = \pm \mu$; cela montre que $(\tilde{H}_\ell : H_\ell) = 1$ ou 2. D'où :

$$|G_\ell/H_\ell| \leq 2 |G_\ell/\tilde{H}_\ell| \leq 2 |\mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_\ell)|^2 \leq 2(\ell^3 - \ell)^2 < 2\ell^6,$$

ce qui démontre le lemme.

[On a en fait $|G'_\ell| \leq (\ell^3 - \ell)^2 < \ell^6$, mais la majoration ci-dessus nous suffira.]

Lemme 14. — Sous (GRH), il existe $q \notin S_\ell$ tel que $a_q \not\equiv a'_q \pmod{\ell}$ et

$$(261_R) \quad q \leq c_{27} \ell^{12} (\log \ell + \log N_S)^2,$$

où c_{27} est une constante absolue.

Soit L le sous-corps de $\bar{\mathbf{Q}}$ fixé par le noyau de l'homomorphisme

$$\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow G_\ell \rightarrow G'_\ell.$$

L'extension $L/\mathbf{Q}$ est galoisienne, de groupe de Galois G'_ℓ . Elle est non ramifiée en dehors de S_ℓ . Appliquons alors le th. 6 du n° 2.5 à cette extension, et à une classe de conjugaison de G'_ℓ contenue dans C'_ℓ . On en conclut, sous (GRH), qu'il existe un nombre premier $q \notin S_\ell$ dont la substitution de Frobenius appartient à C'_ℓ , et qui satisfait à l'inégalité

$$(262_R) \quad q \leq c_{12} n^2 (\log n + \log N_S + \log \ell)^2,$$

où $n = [L : \mathbf{Q}] = |G'_\ell|$. La première propriété équivaut à

$$a_q \not\equiv a'_q \pmod{\ell},$$

on l'a vu. Quant à la majoration (262_R), combinée avec l'inégalité $n < 2\ell^6$ du lemme 13, elle entraîne bien (261_R) si c_{27} est assez grand.

Si q satisfait aux conditions du lemme 14, on a évidemment $a_q \neq a'_q$. Vu la minimalité de p , cela entraîne $p \leq q$, d'où, d'après (261_R) :

$$(263_R) \quad p \leq c_{27} \ell^{12} (\log \ell + \log N_S)^2.$$

Mais, d'après (258), on a $\ell \leq c_{25} \log p$. L'inégalité (263_R) entraîne donc

$$(264_R) \quad p \leq c_{28} (\log p)^{12} (\log \log p + \log N_S)^2,$$

où c_{28} est une constante absolue > 0 .

Il reste maintenant à déduire (251_R) de (264_R). Cela ne présente pas de difficulté. En divisant les deux membres de (264_R) par $(\log p)^{14}$, on obtient

$$(265_R) \quad p/(\log p)^{14} \leq c_{29} (1 + \log N_S)^2 \leq c_{30} (\log 2N_S)^2.$$

Comme $x^{1/2} \leq c_{31} x/(\log x)^{14}$ pour $x \geq 2$, cela implique

$$(266_R) \quad p^{1/2} \leq c_{32} (\log 2N_S)^2$$

d'où

$$(267_R) \quad \log p \leq c_{33} \log \log 2N_S;$$

en portant dans (264_R), cela donne

$$p \leq c_{28}(c_{33})^2 (\log \log 2N_s)^{12} (\log c_{33} + \log \log \log 2N_s + \log N_s)^2,$$

d'où

$$p \leq c_{34} (\log \log 2N_s)^{12} (\log N_s)^2$$

si c_{34} est assez grand.

Variantes

L'exposant 12 de (251_R) provient de l'exposant 6 du lemme 13, lui-même égal à la dimension du groupe $\mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2$. On peut l'abaisser si l'on sait que l'image de G_ℓ dans $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_\ell) \times \mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_\ell)$ est sensiblement plus petite que le groupe entier. Par exemple :

Théorème 21'. — Supposons que E' se déduise de E par « torsion » au moyen d'un caractère quadratique, i.e. que $a'_p/a_p = \pm 1$ pour tout $p \notin S$. Sous les hypothèses du th. 21, on a alors :

$$(268_R) \quad p \leq c_{35} (\log N_s)^2 (\log \log 2N_s)^6,$$

où c_{35} est une constante absolue.

L'hypothèse signifie qu'il existe un caractère continu

$$\varepsilon : \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \{\pm 1\}$$

tel que $\varphi'_n(g) = \varepsilon(g) \varphi_n(g)$ pour tout $g \in \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ et tout $n \geq 1$. L'image de G_ℓ par l'homomorphisme

$$G_\ell \rightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell) \times \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell) \rightarrow \mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_\ell) \times \mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_\ell)$$

est contenue dans le sous-groupe diagonal de $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_\ell) \times \mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_\ell)$; son ordre est $< \ell^3$. Comme dans la démonstration du lemme 13 on déduit de là que $|G'_\ell| < 2\ell^3$; le lemme 14 est alors valable avec ℓ^{12} remplacé par ℓ^6 (et c_{27} remplacé par une autre constante absolue); il en est de même de (263_R) et (264_R), et l'on en déduit (268_R) par le même argument que ci-dessus.

Remarques

1) Des arguments analogues montrent que, si E (resp. E et E') a des multiplications complexes, l'exposant 12 peut être remplacé par 8 (resp. par 4).

2) A la place de l'équation $a_p = a'_p$, on aurait pu considérer une équation plus générale, par exemple

$$(269) \quad F(p, a_p, a'_p) = 0 \quad (\text{pour } p \notin S),$$

où F est un polynôme à trois variables. On aurait obtenu le résultat suivant :

ou bien $F(p, a_p, a'_p) = 0$ pour tout $p \notin S$,

ou bien il existe une infinité de $p \notin S$ tels que $F(p, a_p, a'_p) \neq 0$, et, si l'on appelle p_F le plus petit de ceux-là, on a, sous (GRH),

$$(270_R) \quad p_F \leq c(F) (\log N_s)^2 (\log \log 2N_s)^{14},$$

où $c(F)$ est un nombre > 0 qui ne dépend que de F . Si de plus F est isobare (la première variable étant de poids 2, et les deux autres de poids 1), l'exposant 14 peut être remplacé par 12.

Il y a des résultats analogues pour trois (ou quatre...) courbes elliptiques, ou pour des systèmes rationnels de représentations ℓ -adiques (cf. [40]) qui satisfont à une « conjecture de Weil » semblable à (236). Dans chaque cas, on trouve une borne en

$$(\log N_g)^2 (\log \log N_g)^{2d},$$

où d est la dimension (comme groupe algébrique) du groupe de Galois qui intervient.

3) Il serait intéressant d'obtenir une majoration effective de $p = p(E, E', S)$ qui n'utilise pas (GRH). Je n'y suis pas parvenu.

8.4. Groupes de Galois des points de ℓ -division

Supposons E sans multiplication complexe. Comme on l'a rappelé au n° 8.1, les représentations ℓ -adiques

$$\rho_\ell : \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$$

sont surjectives pour ℓ assez grand. Nous allons préciser ce résultat.

Posons

$$(271) \quad N_E = \prod_{\ell \in S_E} \ell.$$

Théorème 22. — Sous (GRH), on a $\text{Im}(\rho_\ell) = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$ pour tout nombre premier ℓ tel que

$$(272_R) \quad \ell \geq c_{36} (\log N_E) (\log \log 2N_E)^3,$$

où c_{36} est une constante absolue.

De façon plus précise, on va montrer, sous (GRH), que ρ_ℓ est surjectif pour tout ℓ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

$$(273) \quad \ell \geq 19 \quad \text{et} \quad \ell \neq 37,$$

$$(274_R) \quad \ell \geq 2(c_{35})^{1/2} (\log N_E) (\log \log 2N_E)^3,$$

où c_{35} est la constante du th. 21'.

Le lemme suivant permet de se ramener au groupe

$$G_\ell = \text{Im}(\varphi_\ell) \subset \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell).$$

Lemme 15. — Supposons $\ell \geq 5$. On a $G_\ell = \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell)$ si et seulement si $\text{Im}(\rho_\ell) = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$.

Posons $\Gamma_\ell = \text{Im}(\rho_\ell)$; l'image de Γ_ℓ dans $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell)$ par réduction modulo ℓ est G_ℓ . Cela montre que $\Gamma_\ell = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell) \Rightarrow G_\ell = \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell)$. Posons d'autre part

$$\Gamma_\ell^1 = \Gamma_\ell \cap \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_\ell) \quad \text{et} \quad G_\ell^1 = G_\ell \cap \mathbf{SL}_2(\mathbf{F}_\ell).$$

Ces groupes sont les noyaux des homomorphismes

$$\det : \Gamma_\ell \rightarrow \mathbf{Z}_\ell^* \quad \text{et} \quad \det : G_\ell \rightarrow \mathbf{F}_\ell^*;$$

ces homomorphismes sont surjectifs, d'après (239). Il s'ensuit que la réduction modulo ℓ applique Γ_ℓ^1 sur G_ℓ^1 . Si l'on suppose que $G_\ell = \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell)$, on a $G_\ell^1 = \mathbf{SL}_2(\mathbf{F}_\ell)$, et, pour

$\ell \geq 5$, le lemme 3 de [40], p. iv-23, montre que $\Gamma_\ell^1 = \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$, d'où $\Gamma_\ell = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$, ce qui achève de prouver le lemme 15.

Nous n'avons donc à nous occuper que du groupe $G_\ell \subset \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell)$. Notons PG_ℓ l'image de ce groupe dans le groupe projectif $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_\ell)$. Pour prouver que $G_\ell = \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell)$, il suffit de montrer que PG_ℓ est égal à $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_\ell)$, ou même seulement que PG_ℓ contient le groupe $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{F}_\ell)$ (qui est un sous-groupe simple, d'indice 2, de $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_\ell)$). Or on sait (cf. par exemple [41], § 2) que tout sous-groupe H de $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_\ell)$ ne contenant pas $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{F}_\ell)$ possède l'une des propriétés suivantes :

- (i) H est contenu dans un sous-groupe de Borel de $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_\ell)$;
- (ii) H est contenu dans un sous-groupe de Cartan non déployé C_ℓ de $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_\ell)$;
- (iii) H est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$ ou $\mathfrak{A}_5$;
- (iv) H est contenu dans le normalisateur N_ℓ d'un sous-groupe de Cartan C_ℓ de $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_\ell)$, et n'est pas contenu dans C_ℓ .

Nous allons éliminer ces diverses possibilités :

Lemme 16. — *Le cas (i) est impossible si ℓ satisfait à (273).*

Cela résulte d'un théorème de Mazur [29], compte tenu de ce que E n'a pas de multiplication complexe.

Lemme 17. — *Le cas (ii) est impossible pour $\ell \geq 3$.*

Cela résulte de ce que G_ℓ contient un élément de valeurs propres 1 et -1 , à savoir celui défini par la conjugaison complexe (cf. [41], § 5.2 iii)).

Lemme 18. — *Le cas (iii) est impossible pour $\ell \geq 17$.*

On a vu ci-dessus que $H = \mathrm{PG}_\ell$ n'est pas contenu dans le sous-groupe $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{F}_\ell)$ de $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_\ell)$. Or $\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{A}_5$ sont contenus dans $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{F}_\ell)$, et il en est de même de $\mathfrak{S}_4$ si $\ell \equiv \pm 1 \pmod{8}$. Reste à éliminer le cas où $H \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\ell \equiv \pm 3 \pmod{8}$. Cela se fait au moyen du résultat suivant (cf. [28], p. 36) :

Lemme 18'. — *Le groupe d'inertie de $H = \mathrm{PG}_\ell$ en ℓ contient un élément d'ordre $\geq (\ell - 1)/4$.*

(Lorsque $\ell > 17$, ce lemme montre que H contient un élément d'ordre > 4 , donc n'est pas isomorphe à $\mathfrak{S}_4$; le cas $\ell = 17$ est exclu grâce au fait que $17 \equiv 1 \pmod{8}$.)

Pour prouver le lemme 18', on distingue deux cas :

- a) L'invariant modulaire j de E n'est pas entier en ℓ .

Il existe alors une extension de degré ≤ 2 du corps $\mathbf{Q}_\ell$ sur laquelle E devient une « courbe de Tate », cf. [41], § 1.12. On en déduit (*loc. cit.*) que le groupe d'inertie modérée de H en ℓ contient un sous-groupe cyclique d'ordre $\geq (\ell - 1)/2$.

- b) L'invariant modulaire j de E est entier en ℓ .

Il y a bonne réduction « potentielle », cf. [41], § 5.6. Comme $\ell \neq 2, 3$, cela entraîne l'existence d'une extension finie K de $\mathbf{Q}_\ell$, avec indice de ramification e égal

à 1, 2, 3, 4 ou 6, sur laquelle E a bonne réduction; de plus, le cas $e=6$ peut être ramené par « torsion » au moyen d'un caractère quadratique au cas $e=3$ (noter que la « torsion » ne change pas le groupe PG_ℓ). On peut donc supposer que $e \leq 4$.

Identifions alors E (sur l'anneau des entiers de K) à une cubique $y^2 = x^3 + Ax + B$ à discriminant inversible, et soit

$$[\ell](t) = \ell t + \dots + a_\ell t^\ell + \dots \quad (\text{avec } t = x/y)$$

la série formelle donnant la multiplication par ℓ dans le groupe formel défini par E (cf. [41], § 1.11). Soit $f = v_K(a_\ell)$ la valuation du coefficient a_ℓ . Il y a trois possibilités :

$b_1)$ $f = 0$.

La réduction de E est de hauteur 1. Il résulte alors de [41], prop. 11, que le groupe d'inertie de H en ℓ contient un élément d'ordre $(\ell-1)/e'$, où $e' = (e, \ell-1) \leq 4$.

$b_2)$ $1 \leq f < e\ell/(\ell+1)$.

La réduction de E est de hauteur 2, et le polygone de Newton de $[\ell](t)$ est formé de deux segments de pentes distinctes, à savoir $(e-f)/(\ell-1)$ et $f/(\ell^2-\ell)$. Comme la seconde de ces pentes n'est pas ℓ -entière, cela entraîne que le groupe d'inertie de G_ℓ en ℓ contient un élément d'ordre ℓ , et il en est de même de $H = PG_\ell$.

$b_3)$ $f \geq e\ell/(\ell+1)$.

La réduction de E est de hauteur 2, et le polygone de Newton de $[\ell](t)$ est formé d'un seul segment de pente $e/(\ell^2-1)$. D'après [41], prop. 10, les caractères de l'inertie modérée (sur le corps de base K) qui interviennent dans E_p sont les puissances e -ièmes des deux caractères fondamentaux de niveau 2, au sens de [41]. On en déduit que le groupe d'inertie de H en ℓ contient un élément d'ordre $(\ell+1)/e''$, où $e'' = (\ell+1, e) \leq 4$. Cela achève la démonstration du lemme 18'.

Reste le cas (iv) :

Lemme 19. — Sous (GRH), le cas (iv) est impossible si ℓ satisfait à (274_R) et $\ell \geq 5$.

Supposons que ℓ satisfasse à (iv), i.e. soit contenu dans le normalisateur N_ℓ d'un sous-groupe de Cartan C_ℓ , sans être contenu dans C_ℓ . Soit ε le caractère d'ordre 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ défini par

$$\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow G_\ell \rightarrow PG_\ell \rightarrow N_\ell \rightarrow N_\ell/C_\ell \simeq \{\pm 1\}.$$

D'après [41], p. 317, ε est *non ramifié en dehors de S_E* . De plus, si l'on identifie comme d'ordinaire ε à un caractère de Dirichlet, on a

$$(275) \quad a_p \equiv 0 \pmod{\ell} \quad \text{pour tout } p \notin S_E \text{ tel que } \varepsilon(p) = -1,$$

cf. [41], p. 317, (c₅).

Soit alors E' la courbe elliptique déduite de E par torsion au moyen de ε . Du fait

que ε est non ramifié en dehors de S_E , la courbe E' a bonne réduction en dehors de S_E . Avec les notations du n° 8.3, on a

$$(276) \quad a'_p = \varepsilon(p)a_p \quad \text{pour tout } p \notin S_E.$$

De plus, il existe des p tels que $a'_p \neq a_p$: sinon, en effet, on aurait $a_p = 0$ pour tout p tel que $\varepsilon(p) = -1$, et cela contredirait l'hypothèse que E n'a pas de multiplication complexe (cf. th. 20 par exemple). On peut donc appliquer le th. 21' aux courbes E et E' , avec $S = S_E$. On en déduit, sous (GRH), qu'il existe un nombre premier $p \notin S_E$ tel que :

$$(277_R) \quad a'_p \neq a_p$$

et

$$(278_R) \quad p \leq c_{35}(\log N_E)^2(\log \log 2N_E)^6.$$

La propriété (277_R) équivaut à $\varepsilon(p) = -1$ et $a_p \neq 0$. Vu (275), il en résulte que ℓ divise a_p . Comme $a_p \neq 0$, cela entraîne $\ell \leq |a_p|$, d'où

$$(279_R) \quad \ell < 2p^{1/2}, \quad \text{d'après (256).}$$

Compte tenu de (278_R), on obtient

$$\ell < 2(c_{35})^{1/2}(\log N_E)(\log \log 2N_E)^3,$$

ce qui contredit (274_R), et achève la démonstration.

Questions

- 1) Peut-on démontrer un résultat analogue au th. 22 *sans supposer* (GRH)?
- 2) La condition $\ell \geq 41$ *suffit-elle* à assurer que ρ_ℓ est surjectif?
- 3) Peut-on étendre le th. 22 aux courbes elliptiques définies sur un corps de nombres quelconque?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. ARTIN, Über eine neue Art von L-Reihen, *Hamb. Abh.*, **3** (1923), 89-108 (= *Coll. Papers*, 105-124).
- [2] N. BOURBAKI, *Variétés différentielles et analytiques. Fascicule de résultats*, Paris, Hermann, 1971.
- [3] N. BOURBAKI, *Groupes et Algèbres de Lie*, chapitre II : « Algèbres de Lie libres »; chapitre III : « Groupes de Lie », Paris, Hermann, 1972.
- [4] S. CHOWLA, On the least prime in an arithmetic progression, *J. Indian Math. Soc.*, **1** (1934), 1-3.
- [5] R. DEDEKIND, Über die Diskriminanten endlicher Körper, *Gött. Abh.*, **29** (1882), 1-56 (= *Ges. Math. Werke*, I, 351-397).
- [6] R. DEDEKIND, *Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune-Dirichlet*, 4^e éd., Braunschweig, 1893 (réimpr. : New York, Chelsea, 1968).
- [7] P. DELIGNE, Formes modulaires et représentations ℓ -adiques, Sémin. Bourbaki 1968-1969, exposé 355, *Lecture Notes in Math.*, **179**, Springer-Verlag, 1971, 139-172.
- [8] P. DELIGNE, La conjecture de Weil, I, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **43** (1974), 273-307.
- [9] P. DELIGNE et J.-P. SERRE, Formes modulaires de poids 1, *Ann. Sci. E.N.S.*, 4^e série, **7** (1974), 507-530.

- [10] J. DIEUDONNÉ et A. GROTHENDIECK, Critères différentiels de régularité pour les localisés des algèbres analytiques, *J. of Algebra*, **5** (1967), 305-324.
- [11] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Berlin, Springer-Verlag, 1969.
- [12] G. F. FROBENIUS, Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe, *Sitz. Akad. Berlin* (1896), 689-703 (= *Ges. Abh.*, II, 719-733).
- [13] G. H. HARDY et J. E. LITTLEWOOD, Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet series whose coefficients are positive, *Proc. London Math. Soc.*, 2^e série, **13** (1914), 174-191 (= G. H. HARDY, *Coll. Papers*, VI, 510-527).
- [14] G. H. HARDY et J. E. LITTLEWOOD, Some theorems concerning Dirichlet series, *Messenger of Math.*, **43** (1914), 134-147 (= G. H. HARDY, *Coll. Papers*, VI, 542-555).
- [15] K. HENSEL, Über die Entwicklung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen, *Math. Ann.*, **55** (1902), 301-336.
- [16] H. HIRONAKA, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, *Ann. of Math.*, **79** (1964), 109-326.
- [17] J. IGUSA, Complex Powers and Asymptotic Expansions II, *J. Crelle*, **278-279** (1975), 307-321.
- [18] J. IGUSA, Some observations on higher degree characters, *Amer. J. of Math.*, **99** (1977), 393-417.
- [19] N. IWAHORI et H. MATSUMOTO, Several remarks on projective representations of finite groups, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **10** (1964), 129-146.
- [20] H. D. KLOOSTERMAN, Asymptotische Formeln für die Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen, *Hamb. Abh.*, **5** (1927), 338-352.
- [21] M. I. KNOPP et J. LEHNER, *Gaps in the Fourier series of automorphic forms* (à paraître).
- [22] J. C. LAGARIAS, H. L. MONTGOMERY et A. M. ODLYZKO, A Bound for the Least Prime Ideal in the Chebotarev Density Theorem, *Invent. Math.*, **54** (1979), 271-296.
- [23] J. C. LAGARIAS et A. M. ODLYZKO, Effective Versions of the Chebotarev Density Theorem, *Algebraic Number Fields* (A. Fröhlich edit.), New York, Academic Press, 1977, 409-464.
- [24] S. LANG et H. TROTTER, Frobenius Distributions in GL_2 -Extensions, *Lect. Notes in Math.*, **504**, Springer-Verlag, 1975.
- [25] R. P. LANGLANDS, Automorphic representations, Shimura varieties and motives. Ein Märchen, *Proc. Symp. Pure Math.*, **33**, Amer. Math. Soc., 1979, t. 2, 205-246.
- [26] M. LAZARD, Groupes analytiques p -adiques, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **26** (1965), 1-219.
- [27] W. LI, Newforms and Functional Equations, *Math. Ann.*, **212** (1975), 285-315.
- [28] B. MAZUR, Modular curves and the Eisenstein ideal, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **47** (1978), 33-186.
- [29] B. MAZUR, Rational Isogenies of Prime Degree, *Invent. Math.*, **44** (1978), 129-162.
- [30] J. ŒSTERLÉ, Versions effectives du théorème de Chebotarev sous l'hypothèse de Riemann généralisée, *Astérisque*, **61** (1979), 165-167.
- [31] A. OGG, Abelian curves of 2-power conductor, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **62** (1966), 143-148.
- [32] R. RANKIN, Contribution to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions, I, II, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **35** (1939), 351-372.
- [33] K. RIBET, Galois Representations attached to Eigenforms with Nebentypus, *Lect. Notes in Math.*, **601**, Springer-Verlag, 1977, 17-52.
- [34] P. ROBBA, Lemmes de Schwarz et lemmes d'approximations p -adiques en plusieurs variables, *Invent. Math.*, **48** (1978), 245-277.
- [35] I. ŠAFAREVIČ, Corps de nombres algébriques (en russe), *Proc. Int. Congr. Math.*, Stockholm (1962), 163-176 (trad. anglaise : *Amer. Math. Transl.* (2), vol. 31 (1963), 25-39).
- [36] L. SCHENFELD, Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$, II, *Math. of Comp.*, **30** (1976), 337-360.
- [37] S. SEN, Ramification in p -adic Lie Extensions, *Invent. Math.*, **17** (1972), 44-50.
- [38] J.-P. SERRE, *Corps locaux*, Paris, Hermann, 1980, 3^e éd. (trad. anglaise, *Local Fields*, GTM 67, Springer-Verlag, 1979).
- [39] J.-P. SERRE, Classification des variétés analytiques p -adiques compactes, *Topology*, **3** (1965), 409-412.
- [40] J.-P. SERRE, *Abelian ℓ -adic representations and elliptic curves*, New York, Benjamin Publ., 1968.
- [41] J.-P. SERRE, Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques, *Invent. Math.*, **15** (1972), 259-331.
- [42] J.-P. SERRE, Divisibilité de certaines fonctions arithmétiques, *L'Ens. Math.*, **22** (1976), 227-260.

- [43] J.-P. SERRE, Modular forms of weight one and Galois representations, *Algebraic Number Theory* (A. Fröhlich edit.), New York, Academic Press, 1977, 193-268.
- [44] G. SHIMURA, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Publ. Math. Soc. Japan, vol. 11, Princeton Univ. Press, 1971.
- [45] H. STARK, Some effective cases of the Brauer-Siegel theorem, *Invent. Math.*, **23** (1974), 135-152.
- [46] H. P. F. SWINNERTON-DYER, On ℓ -adic representations and congruences for coefficients of modular forms, *Lecture Notes in Math.*, **350**, Springer-Verlag, 1973, 1-55.
- [47] N. TSCHEBOTAREFF, Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören, *Math. Ann.*, **95** (1926), 191-228.
- [48] A. WEIL, Zeta-functions and Mellin transforms, *Proc. Bombay Coll. on Alg. Geometry*, Bombay, Tata Institute, 1968, 409-426 (= *Œuvres Sci.*, III, 179-196).
- [49] H. WEYL, On the volume of tubes, *Amer. J. of Math.*, **61** (1939), 461-472 (= *Ges. Abh.*, III, 658-669).
- [50] E. WIRSING, Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen, *Math. Ann.*, **143** (1961), 75-102.

Collège de France,
Paris.

Manuscrit reçu le 14 juillet 1981.